

Vektorszámítás vizsga, beugró zh 2010. 01. 16.

Munkaidő 1 óra. Segédeszköz (könyv, jegyzet, számológép, telefon) NEM használható. Minden feladat 10 pontot ér. Minimális követelmény: helyes válasz legalább 8 feladatra, ebből legalább két vektoranalízis feladatra.

1/ Értelmezd egy \mathbf{a} oszlopvektor és egy \mathbf{b} sorvektor ebben a sorrendben vett szorzatát! Mi a feltétele a művelet elvégezhetőségének? Milyen matematikai objektum az eredmény? Hány komponense lesz?

2/ Definiáld két vektor, \vec{a} és \vec{b} diadikus szorzatát! Kommutatív-e és asszociatív-e a művelet?

3/ Írd fel a két Levi-Civita szimbólum szorzatára vonatkozó összefüggést! Hogyan változik a képlet, ha a két szimbólumban nem egy, hanem két indexet ejtünk egybe?

4/ Írd fel a determinánsok szorzástételét! Mi és hogyan következik ebből egy operátort különböző bázison ábrázoló mátrixok determinánsára vonatkozóan?

5/ Számítsd ki az $\mathbf{a} = (5, 9, 1)$, $\mathbf{b} = (8, 8, -2)$ és $\mathbf{c} = (1, 5, 2)$ vektorokra egyaránt merőleges \mathbf{e} egységvektor komponenseit!

6/ A kettős vektorszorzat kifejtési tételét alkalmazva számítsd ki a

$\vec{v} = [(\vec{c} + \vec{a}) \times \vec{c}] \times [(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}]$ vektort a lehető legtömörebb, vektoriális szorzatot nem tartalmazó alakban. Mikor lesz nulla az eredmény, feltéve, ha a szereplő vektorok egyike sem nullvektor?

7/ Egy szimmetrikus 2×2 -es mátrix egyik sajátértéke -34 , a hozzá tartozó sajátvektor $(3, -5)$. A másik sajátérték 68 . Írd fel a mátrixot!

8/ Mikor mondhatjuk, hogy az \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} kétkomponensű oszlopvektorok lineárisan függetlenek? Igaz-e, hogy bázist alkotnak?

9/ A β paraméter minden lehetséges értéke mellett oldd meg az alábbi lineáris egyenletrendszer x -re és y -ra! Milyen paraméterek esetén létezik megoldás? Mi ez a megoldás?

$$\begin{aligned} -x - 7y &= \beta^2 - 13\beta + 30 \\ 2\beta x + 42y &= 0 \end{aligned}$$

10/ Definiáld egy görbe ívhosszát és görbületét! Az ellipszis melyik pontjában legkisebb a görbület? És melyikben legnagyobb? Miért?

11/ Definiáld egy $\vec{v}(\vec{r})$ vektormező felszíni integrálját! Milyen mennyiség az eredmény? Hogyan kell egy ilyen integrált ténylegesen kiszámítani?

12/ Hozd a legegyszerűbb alakra a következő kifejezést:
 $\text{rot} [2 \Delta \vec{v} - 4 \text{rot}(\text{rot} \vec{v})]$!

13/ Alakítsd át a Gauss-tétel segítségével az alábbi integrált:

$I = \oint d\vec{F}(\vec{r} \times \text{grad} f)$, ahol $f(\vec{r})$ egy skalármező, \vec{r} a helyvektor, $d\vec{F}$ pedig egy zárt felület felületelemét jelöli! A szükséges részletszámításokat indexes formában végezd el!