

Vektorszámítás vizsga, beugró zh 2010. 01. 09.

Munkaidő 1 óra. Segédeszköz (könyv, jegyzet, számológép, telefon) NEM használható. Minden feladat 10 pontot ér. Minimális követelmény: helyes válasz legalább 8 feladatra, ebből legalább két vektoranalízis feladatra.

1/ Értelmezd egy \mathbf{B} mátrix és egy \mathbf{a} oszlopvektor ebben a sorrendben vett szorzatát! Mi a feltétele a művelet elvégezhetőségének? Milyen matematikai objektum az eredmény? Hány komponense lesz?

2/ Definiáld két vektor, \vec{a} és \vec{b} skaláris szorzatát! Kommutatív-e és asszociatív-e a művelet?

3/ Írd fel a két Levi-Civita szimbólum szorzatára vonatkozó összefüggést! Hogyan változik a képlet, ha a két szimbólumban nem egy, hanem három indexet ejtünk egybe?

4/ Írd fel a determinánsok szorzástételét! Mi és hogyan következik ebből a mátrix inverzének determinánsára vonatkozóan?

5/ Számítsd ki az $\mathbf{a} = (5, 9, 1)$, $\mathbf{b} = (7, 3, -4)$ és $\mathbf{c} = (1, 5, 2)$ vektorokra egyaránt merőleges \mathbf{e} egységvektor komponenseit!

6/ A kettős vektorszorzat kifejtési tételét alkalmazva számítsd ki a

$\vec{v} = [(\vec{c} + \vec{b}) \times \vec{c}] \times [(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}]$ vektort a lehető legtömörebb, vektoriális szorzatot nem tartalmazó alakban. Mikor lesz nulla az eredmény, feltéve, ha a szereplő vektorok egyike sem nullvektor?

7/ Egy szimmetrikus 2×2 -es mátrix egyik sajátértéke 29, a hozzá tartozó sajátvektor $(2, -5)$. A másik sajátérték -58 . Írd fel a mátrixot!

8/ Mikor mondhatjuk, hogy az \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} háromkomponensű oszlopvektorok lineárisan függetlenek? Igaz-e, hogy bázist alkotnak?

9/ A β paraméter minden lehetséges értéke mellett oldd meg az alábbi lineáris egyenletrendszert x -re és y -ra! Milyen paraméterek esetén létezik megoldás? Mi ez a megoldás?

$$\begin{aligned} -x - 7y &= \beta^2 - 12\beta + 20 \\ 3\beta x + 42y &= 0 \end{aligned}$$

10/ Definiáld egy görbe torzióját és simulósíkját! Az ellipszis melyik pontjában legkisebb a görbület? És melyikben legnagyobb? Miért?

11/ Definiáld egy $\vec{v}(\vec{r})$ vektormező vonalmenti integrálját! Milyen mennyiség az eredmény? Hogyan kell egy ilyen integrált ténylegesen kiszámítani?

12/ Hozd a legegyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$\text{rot} [2 \Delta \vec{v} + 3 \text{rot} (\text{rot} \vec{v})]!$$

13/ Alakítsd át a Gauss-tétel segítségével az alábbi integrált:

$I = \oint d\vec{F} (\vec{r} \times \text{grad} f)$, ahol $f(\vec{r})$ egy skálármező, \vec{r} a helyvektor, $d\vec{F}$ pedig egy zárt felület felületelemét jelöli! A szükséges részletszámításokat indexes formában végezd el!