I. feladatsor

1.) $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$

$\underline{a}\underline{b} = \sum_k a_k b_k$

2.) $(\vec{a}\vec{b})\vec{c} \overset{?}{\neq} \vec{a}(\vec{b}\vec{c})$

ha $\vec{a} \nparallel \vec{c}$

3.) $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$ $\quad$ $\vec{c}\perp\vec{a}$

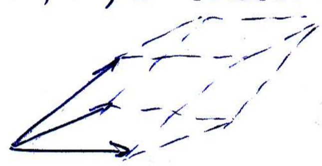
$\vec{c}\perp\vec{b}$

$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\cdot\sin\alpha$

4.) vegyesszorzat

$(\vec{a};\vec{b};\vec{c}) = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = -\vec{a}(\vec{c}\times\vec{b}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorok által kifeszített paralellepipedon térfogata



$(\vec{a};\vec{b};\vec{c}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b}) = -(\vec{c};\vec{b};\vec{a})$

ciklikus permutációk $\qquad$ nem ciklikus permutáció

ha a 3 vektor egy síkba esik $\Rightarrow$ vegyesszorzat = 0

ha 2 vektor $\parallel$ $\Rightarrow$ vegyesszorzat = 0.

5.) $\underline{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$

$|\underline{e}| = 1 \qquad \underline{e} = \frac{-\underline{a}}{|\underline{a}|} \qquad |\underline{e}| = \frac{|\underline{a}|}{|\underline{a}|} = 1$

$|\underline{a}| = \sqrt{16+9+144} = \sqrt{169} = 13$

$e = -\frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix}$

6.) $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\underline{a}\underline{b} = 2\cdot 2 - 2 - 2 = 0 \Rightarrow \underline{a}\perp\underline{b}$

$\Rightarrow$ bezárt szög $90°$

7.)

$$\underline{v} = (\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{a}\times\underline{c})$$

$$v_k = \varepsilon_{klm}(\underline{a}\times\underline{b})_l(\underline{a}\times\underline{c})_m = \varepsilon_{klm}\,\varepsilon_{lpq}\,a_p b_q\,\varepsilon_{mst}\,a_s c_t =$$

$$= \varepsilon_{lpq}\cdot\delta_{ks}\delta_{lt}\,a_p b_q a_s c_t - \delta_{kt}\delta_{ls}\,a_p b_q a_s c_t \ominus$$

$$\varepsilon_{klm}\,\varepsilon_{mst} = \delta_{ks}\delta_{lt} - \delta_{kt}\delta_{ls}$$

$$\ominus\, a_k\,\varepsilon_{lpq}\,c_l a_p b_q - c_k\,\varepsilon_{lpq}\,a_p a_l b_q = \underline{a}(\underline{c},\underline{a},\underline{b}) - \underline{c}(\underbrace{\underline{a};\underline{a};b}_{\underline{a}\parallel\underline{a}\Rightarrow 0}) =$$

$$= (\underline{c},\underline{a},\underline{b})\,\underline{a}$$

$\Rightarrow$ az iránya megegyezik az $\underline{a}$ irányával.

8.)

9.)

$$\left.\begin{aligned} -5x + 3y &= 0 \\ px - 12y &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{homogén egyenletrendszer} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ triviális megoldás $x = y = 0$

nem triviális megoldás:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ p & -12 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \underline{\underline{A}} = 0 = (-5)(-12) - 3p = 60 - 3p$$

$$3p = 60$$

$$\underline{\underline{p = 20}}$$

10.) görbület def.

11.) $\underline{w} = \operatorname{rot}\underline{v}$

akkor, ha $\operatorname{div}\underline{w} = 0$

$$\underline{w} = \operatorname{rot}\underline{v} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}\underline{w} = 0 = \partial_1 w_1 + \partial_2 w_2 + \partial_3 w_3$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\underline{v} = \cancel{\partial_1\partial_2} v_3 - \cancel{\partial_1\partial_3} v_2 + \cancel{\partial_2\partial_3} v_1 - \cancel{\partial_1\partial_2} v_3 + \cancel{\partial_3\partial_1} v_2 - \cancel{\partial_3\partial_2} v_1 = 0$$

12.) Gauss-tétel definíciója

Legyen egy zárt felületünk, ami egyszeresen összefüggő, és legyen egy $\underline{v}(\underline{r})$ reguláris vektormező.

$$\oint \underline{v}\, d\underline{F} = \int \operatorname{div}\underline{v}\, dV$$

II. feladatsor

1.) $\vec{a}$ és $\vec{b}$ diadikus szorzata:

$$(\vec{a}\circ\vec{b})\vec{v} = \vec{a}(\vec{b}\vec{v})$$

2.) asszociatív-e a diadikus szorzás

$$(\vec{a}\circ\vec{b})\circ\vec{c} \overset{?}{=} \vec{a}\circ(\vec{b}\circ\vec{c})$$

$$\vec{a}\circ(\vec{b}\circ\vec{c})\vec{v} = \vec{a}\circ(\vec{b}(\vec{c}\vec{v})) = \vec{c}\vec{v}\cdot(\vec{a}\circ\vec{b})$$

$$(\vec{a}\circ\vec{b})\circ\vec{c} = (\vec{a}\circ\vec{b})(\vec{c}\vec{v})$$

3.) $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$

Szimmetriatulajdonság.

4.)

$$\underline{a} = \begin{pmatrix}10\\3\\4\end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix}10\\4\\-3\end{pmatrix}$$

az ezekre merőleges egységvektor komponensei

$$\underline{c} = \underline{a}\times\underline{b} = \begin{vmatrix} e^{(1)} & e^{(2)} & e^{(3)} \\ 10 & 3 & 4 \\ 10 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-9-16\\40+30\\40-30\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-25\\70\\10\end{pmatrix}$$

$$|\underline{c}| = \sqrt{625+4900+100} = \sqrt{5625} = 75$$

$$\underline{c} = \frac{1}{75}\cdot\begin{pmatrix}-25\\70\\10\end{pmatrix}$$

5.) $\mathrm{tg}\,\alpha$

$$\sin\alpha = \frac{|\underline{a}\times\underline{b}|}{|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{|\underline{a}\underline{b}|}{|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{|\underline{a}\times\underline{b}|}{|\underline{a}\underline{b}|} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

$$\underline{ab} = 100 + 12 - 12 = 100$$

6.) Számoljuk ki az alábbi vegyesszorzatot kifejtési tétel alapján!

$$\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})}_{\vec{d}}(\vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{d},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{d}) = \vec{c}(\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})) =$$

$$= -\vec{c}(\vec{a}(\vec{a}\vec{b}) - \vec{b}\underbrace{(\vec{a}\vec{a})}_{1}) = (\vec{c}\vec{b}) + (\vec{a}\vec{c})(\vec{a}\vec{b})$$

az egyes vektorok egységvektorok.

7.)

$$(\underline{a}\times\underline{b})_i(\underline{c}\times\underline{a})_i = \varepsilon_{ijk}a_j b_k \varepsilon_{ilm} c_l a_m = \varepsilon_{lmi}\varepsilon_{ijk} a_j b_k c_l a_m =$$

$$=(\delta_{lj}\delta_{mk}-\delta_{lk}\delta_{mj})a_j b_k c_l a_m = a_l c_l a_k b_k - b_k c_k a_m a_m =$$

$$=(\underline{a}\cdot\underline{c})(\underline{a}\cdot\underline{b})-(\underline{b}\,\underline{c})$$

8.) Szimmetrikus mátrix

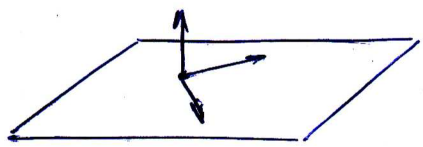
sajátértékek:

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 0$

$\lambda_3 = 1$

projektoroperátor:



$$P_{ij} = \vec{e}^{(i)}\hat{P}\,\vec{e}^{(j)} = P_{ji} = \vec{e}^{(j)}\hat{P}\,\vec{e}^{(i)}$$

ha $\vec{e}^{(i)}$ sajátvektor, akkor: $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \underline{\underline{P}}$

másik pl.:

$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 = 1\\ \lambda_2 = 1\\ \lambda_3 = -1\end{array}\right\}$ tükrözési mátrix.

ha van egy sík, és a vektorok ezen a síkon vannak, akkor azokat változatlanul hagyja, az erre merőlegeseket tükrözi (−1).

9.) A β paraméter milyen értékére

$-7x+3y=\beta$

$\beta x - 18y = 0$

ha $\beta = -6\cdot -7 = 42$, akkor

$42x - 18y = 0$ $\qquad -7x+3y=0$ } ilyenkor $\emptyset$ mego., mert a két egyenlet ellentmond.

$-7x+3y = \beta = 42$

ha a két egyenlet egyenlő $\Rightarrow$ végtelen sok megoldása van

Ha $\beta = 0$?

$\left.\begin{array}{l}-7x+3y=0\\ -18y=0\end{array}\right\}$ $x=y=0$ } $\emptyset$ mego.

Ha $\beta\neq 0$ és $\beta\neq 42$

Gauss-elimináció

I. feladatsor

9.) folyt.:

$$\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ \beta & -18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inverze:

$$\frac{1}{126-3\beta}\cdot\begin{pmatrix} -18 & -\beta \\ -3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\underbrace{ad-bc}_{\det \underline{A}}}\cdot\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

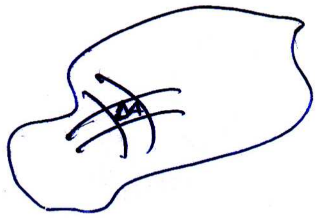
$$\frac{1}{126-3\beta}\cdot\begin{pmatrix} -18\beta \\ -3\beta \end{pmatrix}$$

$$x = -\frac{18\beta}{126-3\beta} \qquad y = -\frac{3\beta}{126-3\beta}$$

$$126-3\beta = 0$$

$$\beta = 42$$

10.)



$$F = \lim_{\Delta A \to 0} \sum_{i=1}^{N} (\Delta A)_i$$

$$F = \int_{u_0}^{u_N} du \int_{v_0}^{v_N} dv \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right|$$

11.)

$\underline{v} \overset{?}{=} \operatorname{grad} \phi$

akkor, ha $\operatorname{rot} \underline{v} = \underline{0}$

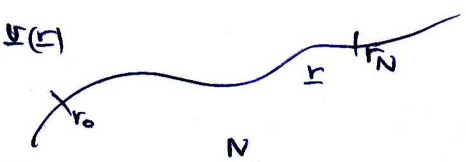
$\underline{w} \overset{?}{=} \operatorname{rot} \underline{v}$

ha, $\operatorname{div} \underline{v} = 0$

$\phi = \operatorname{div} \underline{v}$

12.) vektormező vonalmenti integrálja.

$\underline{v}(\underline{r})$



$$\int \underline{v}\, d\underline{r} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \underline{v}(\underline{r}_i)\,(r_i - r_{i-1})$$

$$\underline{r}(t) \Rightarrow \int \underline{v}\, d\underline{r} = \int \underline{v}(\underline{r}(t))\, \dot{r}(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_N} \underline{v}(t)\, \dot{r}(t)\, dt$$