Valószínűségszámítás és statisztika

complex.elte.hu/valszam

II. 24 május végefelé

Z: március 30-ai héten

PRÉKOPA ANDRÁS Valószínűségelmélet

BOLYAI VALÓSZÍNŰSÉG SZÁMÍTÁS SOLT GYÖRGY

MATEMATIKAI STATISZTIKA

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI FELADATGYŰJTEMÉNY

Elemi esemény: kísérlet kimeneti értéke

Valószínűség: $0 \le P \le 1$ $\quad P(A) = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$ $\quad$ összes $\to \infty$

$P(\emptyset) = 0 \qquad P(\Omega) = 1$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ mert $A + \bar{A} = \Omega$

$A+B$ vagy, $\cup$, $+$

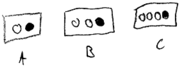
$A \cdot B$ és, $\cdot$, $\cap$

Teljes eseményrendszer

$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_N = \Omega$

$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_N) = 1$

Példa



A: első dobozból fehér

B: második -||-

C: harmadik -||-

• Mennyi a val, hogy 3 fehéret húzunk?

$P(A \cdot B \cdot C) \underset{?}{=} P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$

ha függetlenek

• Mennyi a val, hogy 2 fehéret húzunk pontosan

$P(AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC) = P(AB\bar{C}) + P(A\bar{B}C) + P(\bar{A}BC) =$

$= P(A)P(B)\left(1-P(C)\right) + P(A)\left(1-P(B)\right)P(C) + \left(1-P(A)\right)P(B)P(C)$

• 1-et húznak legalább $\Leftrightarrow$ 1 - P(1-et sem) = 1 - P($\bar{A}\bar{B}\bar{C}$)

$P(\Omega)=1$

$P(\emptyset)=0$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Ha $\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega \\ A_i A_j = \delta_{ij} A_j \end{aligned}\right\}$ teljes eseményrendszer

02. 25.

<u>Feltételes valószínűség</u>

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

teljes valószínűség tétele : $P(A) = \sum_i P(A|B_i) \cdot P(B_i)$ ha B_i teljes eseményrendszert alkot.

Bayes tétel: $$P(B_a|A) = \frac{P(A|B_a)\,P(B_a)}{\sum_i P(A|B_i)\,P(B_i)}$$

p valószínűséggel tudja, és ha nem, tippel a diák és 1/3 valószínűséggel eltalálja. $P(B|A)=?$

B: tudta a kérdésre a választ

A: helyes választ ad

$\bar{B}$: nem tudta, tippelt

teljes eseményrendszer

$P(B) = p$ $\qquad P(A|B) = 1$

$P(\bar{B}) = 1-p$ $\qquad P(A|\bar{B}) = 1/3$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A|B)\,P(B) + P(A|\bar{B})\,P(\bar{B})} = \frac{p}{p+\frac{1}{3}(1-p)} = \frac{3p}{2p+1}$$

<u>Kombinatorika</u>

$$p = \frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$$

permutáció $P_n = n!$ sorbarendezés különböző elemekre

ismétléses permutáció $P_n^{k_i} = \dfrac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_n!}$ több elem azonos lehet kombináció

hányféleképp lehet kiválasztani, sorrend nem számít

$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $k \le n$ legyen

ismétléses kombináció

$C_n^{i,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

variáció : fontos a sorrend

$V = \frac{n!}{(n-k)!}$

ismétléses variáció n^k

Példa ① $m_1 + m_2$ üveg van m_1 teli üvegek, m üveget akarunk kivenni, $m \le \min(m_1, m_2)$
m_2 üres

a/ mennyi a valószínűsége, hogy mind teli $p = \frac{\binom{m_1}{m}}{\binom{m_1+m_2}{m}}$

b/ pontosan k db teli $p = \frac{\binom{m_1}{k}\binom{m_2}{m-k}}{\binom{m_1+m_2}{m}}$

c/ legalább 1 teli: $p = 1 - P(\text{mind üres})$ $P(\text{mind üres}) = \frac{\binom{m_2}{m}}{\binom{m_1+m_2}{m}}$

② 5 levél, 5 postaláda.

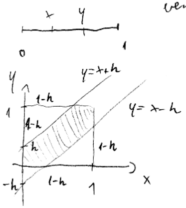
a/ min 3 ember a sajátját kapja $p = \frac{\binom{5}{3} + 0 + 1}{5!}$

b/ max 2 $\frac{\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + 0 + \binom{5}{5}}{5!}$ pontosan 5, 4, 3, 2, 1, 0?   n esetben

③ p eséllyel száll fel ellenőr, ha m szakaszt utazunk, $(1-p)^m$

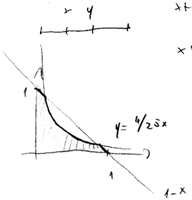
$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

veszünk véletlenszerűen 2 pontot. $|x-y|$ mennyi eséllyel lesz $< h \leq 1$



$$|x-y| < h \quad \begin{cases} y < x+h \\ y > x-h \end{cases}$$

$$p = \frac{1 - \frac{(1-h)^2 \cdot 2}{2}}{1} = 1-(1-h)^2$$



$x+y<1 \qquad y < 1-x$

$xy < 4/25 \qquad y < \frac{4}{25x}$

Tengelymetszetek

$$1-x = \frac{4}{25x} \Rightarrow x = \begin{matrix} 1/5 \\ 4/5 \end{matrix}$$

Valószínűségi változó

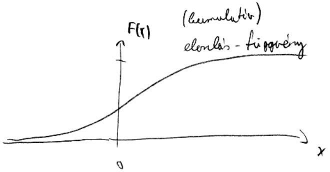
N db család $\longrightarrow$ havi jövedelem ξ

$\longrightarrow$ létszám η

ξ/η 1 főre jutó

$F(x) := P(\xi < x) \Rightarrow F(t_1) \leq F(t_2)$ vagyis F monoton nő

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$



$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a)$

$\xi :=$ megnyert csokik száma

03.04 / 2

$\xi = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A_i :=$ i-edik sorsoláson nyer, $P(A_i) = 1/3$

$P(\xi = 0) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) P(\bar{A}_3) = 8/27$

$P(\xi = 1) = P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = 4/27$

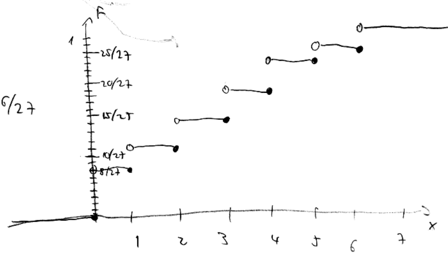
$P(\xi = 2) = P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) = 4/27$

$P(\xi = 3) = P(A_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = 6/27$

$P(\xi = 4) = P(\bar{A}_1 A_2 A_3) = 2/27$

$P(\xi = 5) = P(A_1 \bar{A}_2 A_3) = 2/27$

$P(\xi = 6) = P(A_1 A_2 A_3) = 1/27$

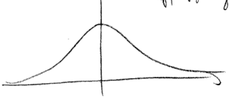


$P(\xi < 3) = 16/27$

$P(\xi \geq 4) = 1 - P(\xi < 4) = 1 - 22/27 = 5/27$

$P(5{,}2 < \xi < 5{,}7) = 0$

sűrűségfüggvény



03.11

Folytonos valószínűségű változó

$F(x) := P(\xi < x)$

$f(x) := F'(x)$ vagyis $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')\,dx'$ így

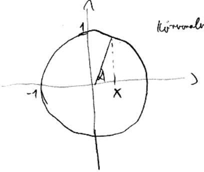
$f(x) \cdot dx = P(x \leq \xi < x + dx)$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = F(\infty) = 1$ vagyis normált

$f(x) \geq 0 \quad \forall x$

$P(a < \xi \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$

Körvonalon egyenletesen véletlenül pontot



$F(x) = ?$

$f(x) = ?$

$P(0 \leq \xi \leq 1/2) = ?$

$$F(x) = P(\xi < x) = \frac{\pi - \alpha}{\pi} = 1 - \frac{\alpha}{\pi} \qquad \cos\alpha = \xi$$

$$\alpha = \arccos \xi$$

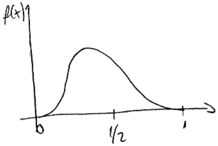
$$F(x) = 1 - \frac{\arccos x}{\pi}$$

$$f(f^{-1}(t)) = id$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi \sin(\arccos(x))} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \qquad f'(f^{-1}(t))\,(f^{-1})'\,x = 1$$

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$$

$$P(0 \leq \xi < 1/2) = \left(1 - \frac{\arccos 1/2}{\pi}\right) - \left(1 - \frac{\arccos 0}{\pi}\right) = 1/6$$

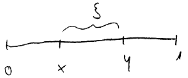


$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ a x (1-x)^2 & \text{egyébként} \\ 0 & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt := 1 = \int_0^1 f(t)\,dx = \int_0^1 a t (1-x)^2\,dx = \frac{a}{12} \qquad a = 12$$

$$F(t) = \int_0^x f(y)\,dy = 12\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]$$

$$P(0 \leq \xi < 1/2) = F(1/2) - F(0) = 12\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{64}\right)$$



$F(z)$, $f(z)$, $P(\xi \geq 3/4)$

$x - y < z$

$y - x < z$

$P(\xi < z) = F(z) = 2z - z^2$

$f(z) = z - 2z$

Többdimenziós eloszlások

ξ, η függetlenek, ha $P(a \leq \xi < b,\ c \leq \eta < d) = P(a \leq \xi b) \cdot P(c \leq \eta < d)$

$\zeta = \xi + \eta$, legyen h a ζ-nak sűrűségfüggvénye, ekkor $h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y)\, g(y)\, dy$

ha $f(x) = g(y) = 0 \ \forall x, y < 0 \Rightarrow h(z) = \int_0^z f(z-y)\, g(y)\, dy$

pl: két izzólámpa, $\zeta = \xi + \eta$

$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$ $\quad x > 0$

$g(y) = \mu \cdot e^{-\mu y}$ $\quad y > 0$

$h(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda(z-y)} \mu e^{-\mu y}\, dy = \frac{\lambda \mu}{\lambda - \mu}\left(e^{-\mu z} - e^{-\lambda z}\right)$ $\quad$ ha $\lambda = \mu$ $\quad h(z) =$

Várható érték

$\langle x \rangle = \sum x_i p_i$ $\quad$ ha $\sum |x_i| p_i < \infty$

folytonosra $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, x \cdot dx$

szórás: $\sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} := \sigma(x)$

$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \left(\sum_i x_i^2 p_i\right) - \langle x \rangle^2$

folytonosra: $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - \langle x \rangle^2$

független valószínűségek esetén 03.17

$\langle x+y \rangle = \langle x \rangle + \langle y \rangle$

április 1. 18-tól É konferencia

$\langle x \cdot y \rangle = \langle x \rangle \cdot \langle y \rangle$

$\sigma^2(x^2+y^2) = \sigma^2(x^2) + \sigma^2(y^2)$

Visszatevéses mintavételezés, 1/3 helyes, 2/3 hibás

ξ: hibátlan minták száma

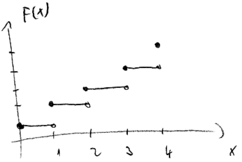
$F(x)$, $\langle \xi \rangle$, σ

A: hibátlan $P(A) = 1/3$ $P(\bar{A}) = 2/3$

4 db húzás $P(\xi = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}$ k db hibátlan

---

4 db húzás, $\xi = \{0, 1, 2, 3, 4\}$



$P(\xi = 0) = 16/81$

$P(\xi = 1) = 32/81$

$P(\xi = 2) = 24/81$

$P(\xi = 3) = 8/81$

$P(\xi = 4) = 1/81$

$\langle \xi \rangle = \sum x_i p_i = \frac{108}{81}$

$\sigma^2 = \sum x_i^2 p_i - \langle x \rangle^2 = 8/9$

03.23.

$C := \langle (x-\langle x\rangle)\cdot(y-\langle y\rangle)\rangle =$

$\boxed{\text{ápr 1. ZH}}$

$C_{xx} = \sigma^2$ önmagával vett korreláció

ha független $\Rightarrow$ $C=0$

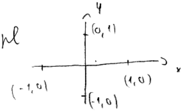
ha nem, $C \in (-\infty, \infty)$

$r := \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ $\quad r \in [-1, 1]$, ha x és y függetlenek, akkor $C_{xy} = 0 \Rightarrow r=0$

fordítva nem igaz, ha $r=0=C \not\Rightarrow$ függetlenek

---

pl



$\langle \xi \rangle = -1\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{2}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} = 0$

$\langle \eta \rangle = -1\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{2}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} = 0$

ξ, η független-e

$\langle \xi\cdot\eta \rangle = 0+0+0+0 = 0$

$r = ?$

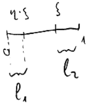
$r = \frac{C}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\langle \xi\eta\rangle - \langle\eta\rangle\cdot\langle\xi\rangle}{\sigma_x\sigma_y} = 0$

független-e?

$P(\eta=0, \xi=0) = 0 \stackrel{?}{=} P(\xi)\cdot P(\eta) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ tehát nem független

---

pl



ξ-t választjuk véletlenszerűen $\to \xi$: 0 —ξ— 1

$\xi\cdot\eta$-t választjuk ξ-től balra $\to \eta$ 0 —η— 1

$\Big\}$ $\xi\cdot\eta$ 0 —$\xi\cdot\eta$—ξ— 1

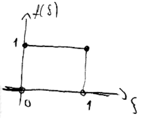
r_{l_1}, r_{l_2}

$\xi := x$

$\eta := y$

$l_1 = x\cdot y$

$l_2 = 1-x$



$\langle l_1 \rangle = \int_0^1\int_0^1 xy\, dx\, dy = \frac{1}{4}$ $\left(= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overset{1}{f(x)}\, \overset{1}{g(y)}\, x\cdot y\, dx\, dy\right)$

$\langle l_2 \rangle = \int_0^1\int_0^1 (1-x)\, dx\, dy = 1/2$

$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$

$\langle l_1 l_2 \rangle = \int_0^1\int_0^1 (1-x)\, x\, y\, dx\, dy = 1/12$

$$\langle \ell_1^2 \rangle = \int_0^1 \int_0^1 x^2 y^2 \, dx\,dy = 1/9$$

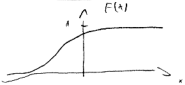
$$\langle \ell_2^2 \rangle = \int_0^1 \int_0^1 (1-x)^2 \, dx\,dy = 1/3$$

$$\sigma_{\ell_1}^2 = 1/9 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{144}$$

$$\sigma_{\ell_2}^2 = 1/3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1/12$$

$$r = \frac{1/12 - 1/4 \cdot 1/2}{\sqrt{\frac{7}{144}} \cdot \sqrt{\frac{1}{12}}} = -0{,}65$$

ZH



csomó fajta lehet, de egyszerűbb jobban szeretünk

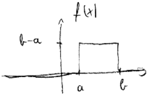
Híres eloszlások

1/ diszkrét egyenletes

$$P(x_i) = \frac{1}{n} \qquad \sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1 \qquad \langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 \ldots + x_n}{n} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \langle x \rangle^2$$

2/ folytonos egyenletes

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\langle x \rangle = \int_a^b \frac{1}{b-a} x \, dx = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \langle x \rangle^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\langle \ell_1^2 \rangle = \int_0^1 \int_0^1 x^2 y^2 \, dx\, dy = 1/9$$

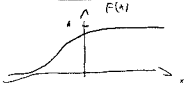
$$\langle \ell_2^2 \rangle = \int_0^1 \int_0^1 (1-x)^2 \, dx\, dy = 1/3$$

$$\sigma_{\ell_1}^2 = 1/9 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{144}$$

$$\sigma_{\ell_2}^2 = 1/3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1/12$$

$$r = \frac{1/12 - 1/4 \cdot 1/2}{\sqrt{\frac{7}{144}} \cdot \sqrt{\frac{1}{12}}} = -0{,}65$$

ZH



csomó fajta lehet, de egyeseket jobban szeretünk

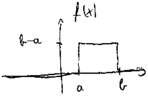
Híres eloszlások

1/ diszkrét egyenletes

$$P(x_i) = \frac{1}{n} \qquad \sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1 \qquad \langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 \ldots + x_n}{n} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \langle x \rangle^2$$

2/ folytonos egyenletes

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\langle x \rangle = \int_a^b \frac{1}{b-a} x \, dx = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \langle x \rangle^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

04.15.
Szünet után

3/ binomiális

$A, \bar{A} \quad P(A) = p \quad P(\bar{A}) = 1-p = q$

$$P(\xi = k) = p^k q^{n-k} \binom{n}{k}$$

k db alkalommal lesz n-ből az eredmény A

$$\left.\begin{array}{l} \langle \xi \rangle = 1 \cdot p + 0 \cdot q \\ \sigma^2 = p \cdot q \end{array}\right\}_{n=1} \quad \text{ált:} \left\{ \begin{array}{l} \langle \xi \rangle = n \cdot p \\ \sigma^2 = n \cdot p \cdot q \end{array} \right.$$

4/ Geom. eloszlás

$A, \bar{A}$ $\quad P(A)=p$

$P(\bar{A})=q$

$$P(\eta=k) = q^{k-1}\cdot p$$

k-adikra következik be

$$\langle\xi\rangle = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = \frac{q}{p^2}$$

Példa:

$p=0{,}02$, ennyi valószínűséggel megy tönkre bekapcsoláskor

ξ hányszor sikerül bekapcsolni mielőtt tönkremegy

$$\langle\xi\rangle = \frac{1}{p} = 50$$

$$\sigma^2 = \frac{q}{p^2} = \frac{0{,}98}{(0{,}02)^2} = 2450$$

5/ exponenciális eloszlás

Bármely x időpontot választva ha a ξ véletlen időtartam x-ig még nem ért véget, akkor úgy tekinthető, mintha az egész folyamat x-ben kezdődött volna el

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & \text{ha } x\le 0 \end{cases} \quad \lambda>0 \text{ konst}$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

$$\langle\xi\rangle = \frac{1}{\lambda} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

példa

ξ: tönkremenetelig eltelt idő

exp. eloszlás

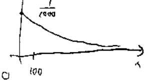
$\sigma = 1000$ óra

$\Downarrow ?$

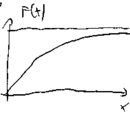
$\langle\xi\rangle,\ f(x),\ F(x),\ P(\xi\ge 3000)$

$$\sigma = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 1/1000$$

$$\langle\xi\rangle = \frac{1}{\lambda} = 1000 \text{ óra}$$



$$f(x) = \begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} & x>0 \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x\le 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{1000}} & x>0 \end{cases}$$

Poisson eloszlás

04.15
3

$$P_k^{(n)} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad \begin{matrix} n \to \infty \\ p \to 0 \end{matrix} \quad n \cdot p \to \lambda > 0$$

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad E(\xi) = \lambda \qquad \sigma^2 = \lambda$$

példa:

kalácsot csinálunk mazsolát teszünk bele

$$P(0 \text{ mazsola}) \leq \frac{1}{100}$$

ne legyen mazsola nélküli falat

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad P_0 = \frac{\lambda^0}{0} e^{-\lambda} \leq \frac{1}{100}$$

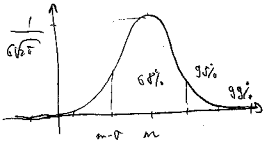
$$n \cdot p = \lambda \geq 4{,}65$$

04.22

Normális eloszlás

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$



$$E(\xi) = m$$

$$\sigma^2 = \sigma^2$$

$$N(0,1) \xrightarrow{?} N(m,\sigma)$$

szórása

m értéke

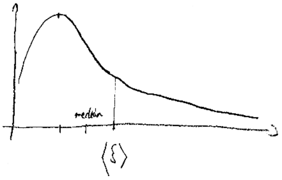
$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

lognormális eloszlás

ξ val.vál. ha $\eta = \ln \xi$ normális

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x}\, e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}}$$



$$\langle \xi \rangle = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}} \qquad \sigma^2 = e^{2m+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

példa: telefonközpont, 600 előfizető, hívásindítás valószínűsége 0,005 1 perc alatt

poisson eloszlás, $\lambda = n \cdot p = 600 \cdot 0{,}005 = 3$ $\quad P(\xi = 4) = \frac{3^4}{4!} e^{-3} \approx 0{,}17$

1 perc alatt 4 hívás fut be

példa dobókocka 3 dobás

ξ: 6-os dobások száma $\xi = \{0, 1, 2, 3\}$

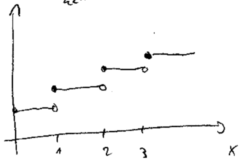
ξ eloszlása, $\langle \xi \rangle$, σ $\quad P$(több hatos lesz, mint a várható értéke)

binomiális $\quad p = p(A) = 1/6$

$q = p(\bar{A}) = 5/6 \qquad P(\xi = k) = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}$

$P(0) =$
$P(1) =$
$P(2) =$
$\vdots$

$F(x) = \sum_{k<x} p_k$



$$\langle \xi \rangle = n \cdot p = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 0{,}648$$

$$P(\xi \geq \langle \xi \rangle) = P\left(\xi \geq \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(\xi < 1/2\right) =$$

$$= 1 - F\left(\frac{1}{2}\right)$$

ξ: úthossz az első hibáig

04.22
3

tfh: exponenciális eloszlás $\langle \xi \rangle = 500\,km$ $\left(\lambda = \frac{1}{\langle \xi \rangle} \right)$

$f(x) = ?$

$F(x) = ?$

$P(\xi < \langle \xi \rangle)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{1}{500} e^{-\frac{x}{500}} & \text{egyébként} \end{cases}$$

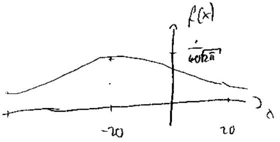
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{500}} & \text{egyébként} \end{cases}$$

04.29.

$$P(\xi < 500) = F(500) = 1 - \frac{1}{e} \approx 0,6$$

ξ = valódi - mért = hiba

ξ normális eloszlású, $m = -20$ $\sigma = 40$



$$f(x) = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+20)^2}{3200}}$$

$$\int_{-60}^{60} f(x) \approx 0,819$$ z-transzformáció meg ilyesmi

---

Markov egyenlőtlenség

$x \ge 0$, $\langle x \rangle$, $\varepsilon > 0$

$$P(x \ge \varepsilon) \le \frac{\langle x \rangle}{\varepsilon}$$

Csebisev egyenlőtlenség

$\langle x \rangle$, σ^2 létezik

$$P\left(|x - \langle x \rangle| \ge \varepsilon \right) \le \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

cseb. norm

Csebisev pl $\varepsilon = \sigma$, $P(|x - \langle x \rangle| \ge \sigma) \le 1$ triv 0,318

$P(|x - \langle x \rangle| \ge 2\sigma) \le 1/4$ 0,046

$P(|x - \langle x \rangle| \ge 3\sigma) \le 1/9$ 0,003

normális eloszlásra

$P(|x - \langle x \rangle| \ge n\sigma) = \ldots = 2 - 2\Phi(n) =$

$= 1 - P(|x - \langle x \rangle| \ge n\sigma)$

példa: $\langle \xi \rangle = 35 \quad \sigma = 0{,}3$

$P(|\xi - 35| \geq 1)$

csebisev egyenlőtlenség, $\varepsilon = 1 \Rightarrow P \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{0{,}09}{1} = 0{,}09$

$P = P(\xi < 34 \,\|\, \xi > 36) \leq 9\,\%$

példa $P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots \xi_n}{n} - \langle \xi \rangle\right| > \varepsilon\right\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$

példa
előírt pontossági közelítéshez szükséges kísérletek száma

$P\left[\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}\right| - \langle \xi \rangle \right| < \varepsilon\Big) \geq 1 - p_0 \qquad n \geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 p_0}$

nagy számok Bernulli törvénye (binom)

$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \leq \frac{pq}{\varepsilon^2 n}$

esési

ismer

hatos dobás valószínűségét az esemény relatív gyakorisága legalább 0,8

hányszor dobjunk, hogy az

valószínűséggel 0,1-re közelítse meg

$P\left(\left|\frac{k}{n} - \frac{1}{6}\right| > 0{,}1\right) \leq \frac{1/6 \cdot 5/6}{0{,}1^2 \cdot n} < 0{,}2 \quad n \geq 70$ legyen

mert erre van képlet

példa: ξ 1 óra alatt az autók száma

$\langle \xi \rangle = 500$

$\sigma = 25$

$\varepsilon = 100$

$$P(400 < \xi < 600) \Leftrightarrow P(|\xi - 500| < 100)$$

$$P(|\xi - 500| < 100) = 1 - P(|\xi - 500| \geq 100) \geq 1 - \frac{25^2}{100^2} = \frac{15}{16}$$

05.06.

Extrémumok eloszlása

Legyenek $x \geq 0$ függetlenek

N db-ra $x^* = \max\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$

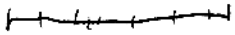
$N = 1$ db $\quad P(x^* < x) = P(x_1 < x) = F(x)$

$N = 2$ db $\quad P(x^* < x) = P(x_1, x_2 < x) = P(x_1 < x)\, P(x_2 < x) = F^2(x)$

N db $\quad P(x^* < x) = P(x_1, x_2 \dots x_N) = P(x_1 < x) \dots P(x_N < x) = F^N(x)$

$$\eta(x) = N \cdot F^{N-1}(x) \cdot f(x)$$

Példa N pont, egyenletes eloszlás, mennyi lesz a max. eloszlása? $G(x^*) = ?$ $\eta = ?$



0 a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/a & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ vagy } x > a \\ x/a & 0 < x < a \end{cases}$$

$$G(x^*) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \text{ vagy } x > a \\ (x/a)^N & \text{ha } 0 < x < a \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \text{ vagy } x > a \\ N \cdot \frac{x^{N-1}}{a^{N-1}} \frac{1}{a} & \text{ha } 0 < x < a \end{cases}$$

Generátorfüggvény (diszkrét változókra megy) ZH-ban nem lesz 05.06/2

$P(\xi=n)=p_n$

$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$ Generátorfüggvény

$\langle \xi^n \rangle = \left[z\frac{\partial}{\partial z}\right]^n G(z)\Big|_{z=1}$

$\langle \xi \rangle = G'(z)\Big|_{z=1}$ $\sigma = \langle \xi^2\rangle - \langle \xi \rangle^2 = G'(z)\Big|_{z=1} + G''(z)\Big|_{z=1}$

$\boxed{l \text{ db}}$ $\boxed{n \text{ db}}$

p $1-p=q$

$P(\text{első doboz ürül ki előbb}) := P_{l,n}$

$P_{l,n} = p\,P_{l-1,n} + q\,P_{l,n-1}$

ha $l=0,\ n>0$ $P_{0,n}=1$

ha $l>0,\ n=0$ $P_{l,0}=0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{l,n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} p\,P_{l-1,n}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} q\,P_{l,n-1}x^n$$

$\|$

$$g_l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{l,n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} P_{l,n}x^n \qquad g_0 = P_{0,1}x + P_{0,2}x^2 + \ldots = x + x^2 + x^3 + \ldots$$

$$g_l(x) = p\,g_{l-1}(x) + q\,x\,g_l(x)$$

$$g_l(x) = \frac{p}{1-qx}\,g_{l-1}(x) = \left(\frac{p}{1-qx}\right)^l \cdot g_0 = \underbrace{\left(\frac{p}{1-qx}\right)^l}_{\| } \frac{x}{1-x}$$

polinom $\xrightarrow{\text{ez is}}$ $p^l\left(1+\binom{l}{1}qx+\binom{l}{2}q^2x^2+\ldots\right)$

$$P_{l,n} = p^l\left(1+\binom{l}{1}q+\binom{l}{2}q^2+\ldots+\binom{l}{n-1}q^{n-1}\right)$$

Példa

p: kakas

ha k-ik az első kakas

$q = 1-p$ jérce

$$p_k = P\left(k\text{-ik alkalommal először kakas}\right) = q^{k-1} p$$

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k = \sum q^{k-1} p z^k = pz \sum (qz)^{k-1} = pz \frac{1}{1-qz}$$

$$G(1) = p \frac{1}{1-q} = 1$$

$$\langle k \rangle = G'(z) = \frac{p}{1-qz} + \frac{-1\, pz(-q)}{(1-qz)^2} \qquad G'(1) = 1 + \frac{q}{p} = \frac{1}{p}$$

$$G''(z) = \frac{-p(-q)}{(1-qz)^2} + \frac{pqz}{(1-qz)^2} + \frac{pqz(-z)(-q)}{(1-qz)^3} \qquad G''(1) = \frac{2pq}{(1-q)^2} + \frac{2pq^2}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2}$$

$$\sigma^2 = G''(1) + G'(1) - \left(G'(1)\right)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Cen Nagy Szávos