Markov Folyamatok Stacionárius Állapota

Markov folyamatok során egy N állapotú rendszert modellezünk egy $N \times N$-es mátrixxal. Egy általános állapotvektor az egyes állapotokban való tartózkodás valószínűségét tartalmazza, ezért értelemszerűen egy általános állapotot jellemző $\boldsymbol{p}$ vektor elemeinek összege $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$.

A Markov folyamat iterálása során az állapotvektort beszorozzuk a rendszert jellemző $\boldsymbol{M}$ mátrixxal:

$$\boldsymbol{p}_{n+1} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{p}_n$$

Itt $\boldsymbol{p}_n$ az n-ik iterált vektort jelöli, nem a vektor elemeit!

Ezt az egyenletet át lehet írni úgy, hogy a kezdőállapotból kapjuk meg az n-ik iterált állapotot:

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{M}^n \boldsymbol{p}_0$$

A folyamat stacionárius állapota az, amihez $n \to \infty$ esetén tart a rendszer:

$$\boldsymbol{p}_\infty = \lim_{n \to \infty} \boldsymbol{M}^n \boldsymbol{p}_0$$

Avagy az előző formába átírva:

$$\boldsymbol{p}_\infty = \lim_{n \to \infty} \boldsymbol{M}\boldsymbol{p}_n$$

Tehát azt a $\boldsymbol{p}_\infty$ vektort keressük, amire teljesül a következő:

$$\boldsymbol{p}_\infty = \boldsymbol{M}\boldsymbol{p}_\infty$$

Vegyük példának a következő folyamatot:

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ekkor $\boldsymbol{p}_\infty = \boldsymbol{p}$ definíciója:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix}$$

Amit ha kibontunk egyenletekre:

$$\begin{aligned} p_2 &= 4p_1 \\ 4p_1 + 2p_3 &= 4p_2 \\ 3p_2 + 3_{p4} &= 4p_3 \\ 2p_3 + 4p_5 &= 4p_4 \\ p_4 &= 4p_5 \end{aligned}$$

Ezt az egyenletrendszert algebrai módon meg lehet oldani:

$$p_2 = 4p_1 \rightarrow \ 4p_1 + 2p_3 = 4p_2 \rightarrow p_2 + 2p_3 = 4p_2 \rightarrow p_3 = \frac{3}{2}p_2$$

$$p_4 = 4p_5 \rightarrow \ 2p_3 + 4p_5 = 4p_4 \rightarrow 2p_3 + p_4 = 4p_4 \rightarrow p_3 = \frac{3}{2}p_4$$

$$\rightarrow p_2 = p_4 \rightarrow p_1 = p_5$$

Így:

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ 4p_1 \\ 6p_1 \\ 4p_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

De minden állapotvektorra igaz, hogy $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$, tehát:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = p_1 + 4p_1 + 6p_1 + 4p_1 + p_1 = 16p_1 = 1$$

Ebből látszik:

$$p_1 = \frac{1}{16}$$

Vagyis:

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0625 \\ 0.2500 \\ 0.3750 \\ 0.2500 \\ 0.0625 \end{pmatrix}$$

Tehát ha ezt a rendszert elég sokáig futtatjuk, akkor az iterációk 37.5%-át a 3. állapotában fogja tölteni.