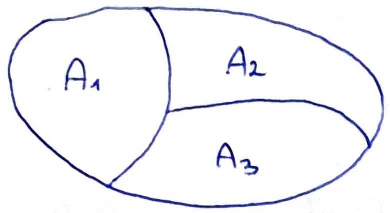
VAL. SZÁM. BEADOTT FELADATOK

I. RUTIN F.S. 19p

1. Ω eseménytér 6 oldalú dobókocka lehetséges kimenetelei. Teljes eseményrendszer, ami 3 eseményből áll? 1



$$\left.\begin{array}{l} A_1 = 1,2 \\ A_2 = 3,4 \\ A_3 = 5,6 \end{array}\right\} \Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

2. 8 oldalú dobókockával dobunk, mekkora a valség, hogy:

a.) egy dobásból min. 6 pontot szerzünk? 2

kedvező eset: 6, 7, 8
összes eset: 8 db
$\frac{3}{8}$

b.) két dobásból összesen kevesebb, mint 5 pontot szerzünk?

kedvező esetek: 1+1, 1+2, 2+1, 1+3, 3+1, 2+2 → 6 db
összes eset: $8 \cdot 8 = 64$
$\frac{6}{64}$

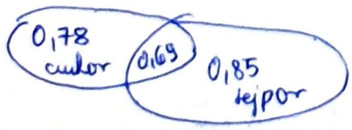
3. $(X \cup B) \cap (X \cup \bar{B}) = \bar{A} \cap [(B \cup C) \cup (B \cap \bar{C})]$ 2 $X = ?$

$$\underbrace{(X \cup B) \cap (X \cup \bar{B})}_{X \cup (\underbrace{B \cap \bar{B}}_{\emptyset})} \qquad \underbrace{(B \cup C) \cup (B \cap \bar{C})}_{B \cap (\underbrace{C \cup \bar{C}}_{\Omega})}$$

$$\underbrace{X \cup \emptyset = X}\ = \bar{A} A (\underbrace{B \cap \Omega}_{B}) \to X = \bar{A} \cap B$$

4. 78%-al ad cukrot, 85%-al ad tejport, tejpor + cukorit 69%-al 3

a.) csak cukor, tej nem?



$A \setminus B$
↓
$P(A \setminus B) = P_A - P_B = 0,09 = 9\%$

b.) legalább vagy cukor vagy tejpor?

$P_A + P_B - P(A \cap B) = 0,78 + 0,85 - 0,69 = 94\%$

c.) csak tejpor?

$P(B \setminus A) = P_B - P_A = 0,85 - 0,69 = 16\%$

d.) egyiket se? $\overline{A \cup B} = 1 - ((P_A + P_B) - P_{A \cap B}) = 6\%$ 1

5. Magyar kártyából húzunk (32 lap, 4 szín), az első két lap ász, mennyi a val. sége, hogy: 2

a.) harmadik is ász?

1 2 3

$$\frac{2}{30} = 0{,}067\%$$

4-2 : 2 db ász maradt még idle

b.) harmadik nem ász, negyedik igen?

1 2 3 4

$$\frac{28}{30} \cdot \frac{2}{29} = \frac{28}{435} = 6{,}5\%$$

$\frac{28}{30}$ $\frac{2}{29}$

6. A, B, C páronként függetlenek, A független $B \cup C$-től, A, B, C teljesen függetlenek? 2

$P(A \cap B) = P_A \cdot P_C$

$P(B \cap C) = P_B \cdot P_C$

$P(C \cap A) = P_C \cdot P_A$

$P(A \cap (B \cup C)) = P_A \cdot P(B \cup C)$

$\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ $\boxed{P(A \cap B \cap C) = P_A \cdot P_B \cdot P_C}$

$P_{A \cap (B \cup C)} = P_A \cdot P_{(B \cup C)}$

$P_{(A \cap B)} \cup P_{(A \cap C)} = P_A \cdot P(B \cup C)$

$P_{(A \cap B)} + P_{(A \cap C)} - P_{(A \cap B)} \cap P_{(A \cap C)} = P_A \cdot P_{(B \cup C)}$

$P_A \cdot P_B + P_A \cdot P_C - P(A \cap B \cap C)\ ) = P_A \cdot (P_B + P_C - (P_B \cdot P_C))$

$-P(A \cap B \cap C) = \cancel{P_A \cdot P_B} + \cancel{P_A P_C} - P_A \cdot P_B \cdot P_C - \cancel{P_A P_B} - \cancel{P_A P_C}$ $/\cdot(-1)$

$P(A \cap B \cap C) = P_A \cdot P_B \cdot P_C$

7. Mongol szalon 5-öt vettek fel, véletlenszerűen kerültek értesítők a borítékba 2

a.) legalább 3 borítékba a megfelelő értesítés került?

kedvező eset: $\binom{5}{3} + \binom{5}{5}$ összes esetl: 5!

vagy csak 3-ba került jó, vagy az összesbe

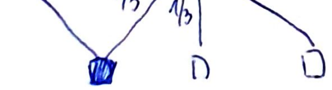
$$\frac{\binom{5}{3} + \binom{5}{5}}{5!} = 0{,}0916 \approx 9{,}2\%$$

b.) legalább 2-be?

$2 \cdot \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{5}$ összeg: 5! $\rightarrow$ $\dfrac{2\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{5}}{5!} = 0{,}258 \approx 26\%$

vagy jó, vagy össze

8. p-vel tudják, 1-p-vel nem tudják, ekkor tippelnek a három közül. Milyen valószínűséggel tudják biztosan a megoldást a jó válaszok közül?



kedvező $\quad p$

összes $\quad p + (1-p)\frac{1}{3}$

$$\frac{p}{p + (1-p)\frac{1}{3}}$$

2

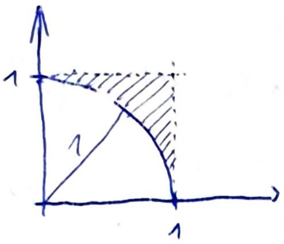
9. Két 6 oldalú kockával dobva az összegük 7, ha tudjuk, hogy a ~~számok~~ összege páratlan?

kedvező: 3+4, 1+6, 5+2, 4+3, 6+1, 2+5 } 6 db

összes: ~~P~~ 36 szám lehet összesen, 18 a páratlan

$$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

10. Egységnégyzeten belül véletlenszerűen választunk pontot, origó és pont távolsága nagyobb mint 1 val. sége?



$P = 1 - \frac{r^2 \cdot \pi}{4}$ → kedvező

összes → $1 \cdot 1$

$$P = \frac{1 - \frac{r^2 \cdot \pi}{4}}{1} = 0{,}2146 \approx 21{,}5\%$$

II. RUTIN F.S. 16p

1. X val. ségi változó eloszlásfüggvénye: $F(x) = 1 - e^{-3x}$

a.) $f(x) = ?$ $\quad f(x) = F'(x) = \underline{3e^{-3x}}$ a s. fv. az eloszlás fv. deriváltja

b.) $P(X > 5) = ?$

$$P(X>5) = \int_5^{\infty} f(x)\,dx = \int_5^{\infty} 3e^{-3x} = 3 \cdot \left[\frac{-e^{-3x}}{3}\right]_5^{\infty} = \underline{3{,}05 \cdot 10^{-7}}$$

c.) $P(1 \le X \le 3) = ?$

$$P(1 \le X \le 3) = \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 3e^{-3x}\,dx = \underline{0{,}049}$$

2. $[\frac{1}{4}; \infty]$ X folytonos valségi változó $f(x) = \frac{1}{4x^2}$, $Y = \sqrt{x}$, Y sűrűségfv.-e?

$y = \sqrt{x}$

$x = y^2 \rightarrow \frac{dx}{dy} = 2y$

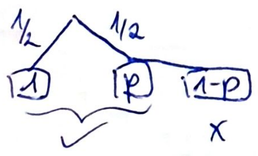
$x^2 = y^4$

$$\boxed{f(y)\,|dy| = f(x)\,|dx|}$$

$$f(y) = f(x)\,\frac{|dx|}{|dy|}$$

$$f(y) = \frac{1}{4x^2} \cdot 2y = \frac{2y}{4x^2} = \frac{2y}{4y^4} = \frac{1}{2y^3}$$

3. Egyik működik, másik p-vel rossz, 1-p-vel jó. Megkapom a kávém, mennyi a valsége, hogy a jó gépet választottuk?



kedvező eset: $\frac{1}{2}$

összes eset: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1-p$

$$\frac{1/2}{1/2 + \frac{1-p}{2}}$$

④ $[-1;1]$ intervallumon $f(x)=\frac{3}{2}x^2$ ②

a.) $P(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2})=?$

$$=\int_{-1/2}^{1/2}\frac{3}{2}x^2\,dx=\frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1/2}^{1/2}=\underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

b.) $P(x>\frac{1}{3})=?$

$$\int_{1/3}^{1}\frac{3}{2}x^2\,dx=\underline{\underline{\frac{13}{27}}}$$

⑤ $[1;\infty]$ intervallumon $f(x)=C\cdot x^{-3}$, mennyi C, hogy $f(x)$ normált legyen? ②

$$1=\int_1^\infty f(x)\,dx=\int_1^\infty C\cdot x^{-3}\,dx=C\cdot\left[\frac{-1}{2x^2}\right]_1^\infty=C\left(\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{2x^2}-\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2x^2}\right)=C\cdot\frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{C=2}}$$

⑥ X diszkrét val. ségi változó, $P(X=k)=\frac{3^k}{k!}e^{-3}$, $P(X>0)=?$ ②

$P_{(X=0)}=\frac{3^0}{0!}e^{-3}=e^{-3}$ az, hogy $X=0$

↓

$P(X>0)=\underline{\underline{1-e^{-3}}}$ ennek komplementerje

⑦ X $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$, $Y=X^2$, $f(y)=?$

$x=\sqrt{y}$

$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{y}}$

$$\boxed{f(y)\,|dy|=f(x)\,|dx|}$$

$$f(y)=f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|$$

$$\underline{\underline{f_1(y)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi y}}e^{\frac{y}{2}}}} \qquad \underline{\underline{f_2(y)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi y}}\left(e^{-\frac{y}{2}}+e^{\frac{y}{2}}\right)}}$$

⑧ $f(x,y)=\begin{cases}x+y & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases}$

a.) $f(x)=?$ integrálás y szerint y határai közt

$$\int_0^1 x+y\,dy=\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^1=\underline{\underline{x+\frac{1}{2}=f(x)}}$$

b.) Y feltételes ~~[illegible]~~ X-re vonatkozóan, ha $X=3/4$? $f(y)$-ja

$$F_Y(y|x=3/4)=\frac{f(x,y)}{g(x)}=\frac{x+y}{x+1/2}=\frac{3/4+y}{3/4+1/2}=\underline{\frac{4}{5}y+\frac{3}{5}}$$

④

III. RUTIN F.S $\boxed{13p}$

1. Tornyot 15-en védik, 10 nyilvesszőnk van, 12 oldalú kockával dobunk, 12-es esetén leszedünk egy védőt.

a.) egy védőt se találunk el?

$\frac{11}{12}$ az esélye, hogy nem találunk $\to \left(\frac{11}{12}\right)^{10}$

b.) leszedett védők számának eloszlása?

$$\boxed{P_{(\varepsilon=k)} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

$\varepsilon = 1, 2, 3 \ldots 10$
$p = 1/12$
$n = 10$

$P(\varepsilon=1) = 0{,}38$
$\vdots$
$P(\varepsilon=5) = 0{,}0065$
$\vdots$
$P(\varepsilon=10) = 1{,}6 \cdot 10^{-11}$
$\vdots$
$P(\varepsilon=12) = 0$

c.) leszedett védők várható értéke?

$\langle \varepsilon \rangle = \sum \varepsilon_i \cdot p_i \to$ binomiális esetén $\boxed{n \cdot p} = 10 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$

2. $[0, z]$ tartományon X s. fv.-e: $f(x) = C \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}}$

a.) C z és λ paraméterekkel kifejezve?

$$1 = \int_0^z C \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = C\left[-\lambda e^{-\frac{x}{\lambda}}\right]_0^z = -C\lambda e^{-\frac{z}{\lambda}} + \lambda$$

$$C = \frac{1}{\lambda(1 - e^{-\frac{z}{\lambda}})}$$

b.) X várható értéke?

$$\int_0^z x \cdot f(x)\, dx = \langle x \rangle$$

$$\int_0^z x \cdot C \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} = C \cdot \underbrace{\left[x \cdot \lambda \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}}\Big|_0^z - \int_0^z 1 \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} dx\right]}_{C\left(\left(z \cdot \lambda \cdot e^{-\frac{z}{\lambda}}\right) + (z \cdot \lambda)\right)} = C\left(\lambda\left(z - e^{-\frac{z}{\lambda}} + z\right) + \left(e^{-\frac{z}{\lambda}} \cdot \lambda + \lambda\right)\right) =$$

$$= C\lambda\left(z + \lambda\left(1 - e^{-\frac{z}{\lambda}}\right)\right) = \frac{1}{\cancel{\lambda}\cancel{(1 - e^{-\frac{z}{\lambda}})}} \cancel{\lambda}\left(z + \cancel{\lambda}\left(\cancel{1 - e^{-\frac{z}{\lambda}}}\right)\right) = z + \lambda$$

3. X és Y független, azonos eloszlású val. ségi változók, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$

a.) $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\phi = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, $P(x, y)$ polárkoordinátájának sűrűségfüggvénye?

$x = R\cos\varphi$
$y = R\sin\varphi$

$$f(x,y) = f(x) \cdot f(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{\frac{-R\cos\varphi}{2} - \frac{R\sin\varphi}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{R^2}{2}} = f(R)$$

$\rho(\phi, R) = \frac{1}{2\pi}\rho(R)$?

$$\rho'(x,y) = \rho(\phi,R)\cdot\left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y}\\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2\pi}\rho(R)\cdot\left|\det\begin{pmatrix}\frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{1}{x(1+\frac{y^2}{x^2})}\\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2\pi}\rho(R)\left|\sqrt{x^2+y^2}\right| =$$

?? $$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{R^2}{2}}\cdot|R| = \underline{\underline{e^{-\frac{R^2}{2}}\cdot R}}$$

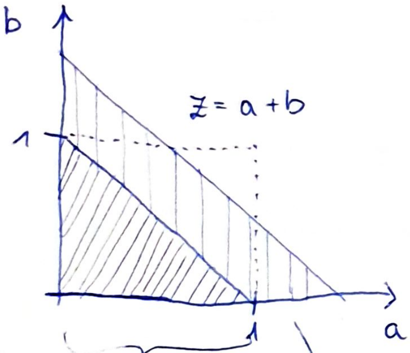
b) függetlenek R és ϕ?

$$\rho(\phi) = \int_0^\infty \rho(\phi,R)\,dR = \int_0^\infty R\cdot\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{R^2}{2}}\,dR = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{R^2}{2}} - \frac{1}{2\pi}$$

$$\rho(R) = \int_0^{2\pi}\rho(\phi,R)\,d\phi = \int_0^{2\pi} R\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{R^2}{2}}\,dR = e^{-\frac{R^2}{2}}\cdot R$$

a kettő szorzata visszaadja az eredeti $\rho(\phi,R)$ fv.-t, vagyis függetlenek

4. $[0,1]$-en értelmezett egyenletes eloszlású val.ségi változó összegének eloszlása?



$$F_{(z)} = \begin{cases}\frac{z^2}{2} & \text{ha } z \le 1\\ \frac{2-z}{2} & \text{ha } z \le 1\\ 1 & \text{ha } z \ge 2\end{cases}$$

eddig könnyű kiszámolni a területet (Δ)

ezen a szakaszon már ki kell venni 2-ből

5. X és Y összegének 4. momentumát

$$\boxed{\langle (X+Y)^4\rangle} = \langle x^4 + 4x^3y + 4xy^3 + 6x^2y^2 + y^4\rangle = \langle x^4\rangle + 4(\langle x^3\rangle\langle y\rangle + \langle x\rangle\langle y^3\rangle) + 6\langle x^2\rangle\langle y^2\rangle + \langle y^4\rangle$$

6. X_1, X_2, X_3 független Poisson-eloszlású diszkrét változók $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$-al.

a.) $Z = X_1 + X_2 + X_3$ generátorfüggvénye?

Poisson eloszlás g.fv.-e: $\boxed{e^{\lambda(z-1)}}$

$$G_Z(z) = G_{X_1} + G_{X_2} + G_{X_3} = e^{\lambda_1(z-1)}e^{\lambda_2(z-1)}e^{\lambda_3(z-1)}$$

b.) $$\cancel{P_{(z)} = \frac{\lambda_1^k + \lambda_2^k + \lambda_3^k}{k!}e^{-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3}}$$

← ez rossz m.o.

IV. RUTIN F.S.

① Átlagosan 8 oldalanként vét 1 hibát, mi a val.-sége, hogy elsőre egy oldalt?

a hibák száma átlagként van megadva, és nincs felső korlátjuk → ez egy Poisson-eloszlás $P(k=x)=\frac{(\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda \cdot k}$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda=\frac{1}{8}\\ k=1\end{array}\right\} \to P(k=1)=\frac{(1/8)^1}{1!}e^{-1/8}=0{,}1103\approx 11{,}03\,\%$$

③ Poisson-eloszlás 3. momentuma?

$$\boxed{G_{(z)\,Poisson}=e^{\lambda(z-1)}}$$

$$\left(z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\left(G'_{(z)}\right)_{z=1}$$

$$z\left[G'_{(z)}+z\cdot G''_{(z)}+z\left(G''_{(z)}+G''_{(z)}+zG'''_{(z)}\right)\right]_{z=1}$$

$$m^3=\left[\left[\frac{\partial}{\partial z}z\right]^3\cdot G_{(z)}\right]_{z=1}=\left[\left(\left(G'_{(z)}+z\cdot G''_{(z)}\right)z\cdot\right)z\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right]_{z=1}=z\left[G'_{(z)}+z\cdot G''_{(z)}+2zG''_{(z)}+z^2G'''_{(z)}\right]_{z=1}=$$

$$=\left[z\cdot G'_{(z)}+3z^2G''_{(z)}+z^3G'''_{(z)}\right]_{z=1}=e^{-\lambda(1-z)}\left[z\cdot\lambda+3z^2\lambda^2+z^3\lambda^3\right]_{z=1}=\lambda+3\lambda^2+\lambda^3$$

④ Fotonszámláló óránként 480 átlagosan. A folyamat stacionárius és független növekményű, mekkora a valsége, hogy két foton között legalább 1 perc a várakozási idő?

Poisson-eloszlás használata

$$\lambda=\frac{480}{60}=8 \qquad \boxed{P(x=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}}$$

$$P(x=0)=\frac{(8\cdot 1)^0}{0!}e^{-8\cdot 1}=e^{-8}\approx 3{,}35\cdot 10^{-4}$$

⑤ 7-ed rendű gamma-eloszlás karakterisztikus függvénye.

$$\boxed{f_7(x)=\frac{\lambda^7 z^6}{6!}e^{-\lambda z}} \to \text{kar. fv.: } \int_0^\infty e^{itz}\cdot\frac{\lambda^7\cdot z^6}{6!}e^{-\lambda z}\,dz=\frac{\lambda^7}{6!}\int_0^\infty z^6e^{z(it-\lambda)}\,dz=\dots$$

parciális integrálások → $\frac{\lambda^7}{\cancel{6!}}\frac{\cancel{6!}}{(\lambda-it)^7}=\left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^7$

⑥ X eloszlása n=3 rendű χ^2-eloszlás. $Y=X^2$ sűrűségfv.-e?

$$\boxed{f(y)|dy|=f(x)|dx|}$$

$$f(y)=f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| \quad \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$x=\sqrt{y}$

$$\boxed{f(x,k)=\frac{x^{k/2-1}e^{-x/2}}{2^{k/2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}} \to f(x,3)=\frac{x^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{3/2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \quad \dots =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{3/2} \frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = f(x)$$

$\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\downarrow$$

$$f(y) = \frac{x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{y^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{\sqrt{y}}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{y^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\sqrt{y}}{2}}}{2\sqrt{2\pi}}$$

8.) A busz most ment el, 5 perc múlva olvassuk a menetrendet; átlagosan 5 percenként járnak. Mekkora a val.sége, hogy még legalább 3 percet kell várnunk?

Poisson-eloszlás $\to \lambda = \frac{1}{5 \text{ perc}}$

$P_{(3)} = 1 - e^{-\frac{1}{5}3}$

$P(\xi > 3) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{5}3}) = e^{-\frac{3}{5}} \approx 0{,}548$

V. RUTIN F.S.

1.) Cauchy-eloszlásnál: $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{c}{c^2 + z^2}$, ennek karakterisztikus fv.-e?

$\phi_{(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\pi} \frac{c}{c^2+x^2} dx \to$ integrál kiszámítása Reziduum-tétellel

$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{c}{c^2+x^2} dx$

$\to$ pólusok $x_{1,2} = \pm ic$

$\downarrow$

reziduumok: $\text{Res}_{x_1} = \lim_{x \to x_1} \frac{e^{itx_1} \cdot c}{c^2 + x_1^2} = \frac{c e^{-t \cdot c}}{c^2 + ic} = \frac{e^{-tc}}{2i}$

$\text{Res}_{x_2} = \lim_{x \to x_2} \frac{e^{itx_2} \cdot c}{c^2 + x_2^2} = \frac{c \cdot e^{tc}}{-2ci} = -\frac{e^{tc}}{2i}$

felfelé zárjuk be

$\phi_{(x)_1} = \sum 2\pi i \cdot \left(\frac{e^{-tc}}{2i}\right) \cdot \frac{1}{\pi} = e^{-tc}$

$\phi_{(x)_2} = \sum 2\pi i \cdot \left(-\frac{e^{tc}}{2i}\right) \frac{1}{\pi} = e^{tc}$

lefelé zárjuk be

$\phi_{(t)} = e^{-|t| \cdot c}$

2.) p=60%-al megbuknak, 40%-al átmennek. 90 fős évfolyam, Bernoulli tétele szerint mekkora val.séggel lesz a becsült és tényleges eredmény közti eltérés kisebb, mint 0,1?

Csebisev-egyenlőtlenség

$\boxed{P\left(\left|\frac{x_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right)} \to P\left(\left|\frac{x_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{p \cdot q}{n\varepsilon^2} \to 1 - P\left(\left|\frac{x_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p \cdot q}{n\varepsilon^2}$

$P\left(\left|\frac{x_{90}}{90} - 0{,}6\right| < 0{,}1\right) \geq 1 - \frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{90 \cdot 0{,}1^2} = 0{,}73$

③ $\underset{amb.}{\rho(x)} \cong \frac{c_2}{x^{2,1?}}$, $\underset{amb.}{\rho(x)} \simeq \frac{c_1}{x^{3.2}}$, nagy X-ekhez tartozó tartományon. Milyen eloszláshoz konvergálnak?

hatványszerűen lecsengő függvények

$\boxed{\rho(x) \sim \frac{1}{|x|^\alpha}}$ → ha $\alpha \le 3$: $\langle x^2 \rangle = \infty$, $\boxed{\text{ha } \alpha > 3 \to \text{normál eloszlás}}$

→ ha $\alpha \le 2$: $\langle x \rangle = \infty$, $\boxed{\text{ha } 3 \ge \alpha \ge 2 \to \text{Lévy-eloszlás}}$

④ Elmegy a busz, rögtön megnézzük a menetrendet; 10 percenként jönnek a buszok.

a.) több mint félórát várunk val.-sége, ha a folyamat Poissonos?

$P(t>30) \to \underbrace{1-e^{\left(-\frac{1}{10}\cdot 30\right)} = 0,95}_{30 \text{ belül jön}}$ → $P(t>30) = 1-\left(1-e^{\left(-\frac{1}{10}\cdot 30\right)}\right) = \underline{5\%}$

b.) mi a bármilyen eloszlás esetén érvényes felső korlát?

Markov-egyenlőtlenség: $\boxed{P(x \ge \xi) \le \frac{\langle x \rangle}{\xi}}$ → várható érték 10 perc

$P(x \ge 30) \le \frac{10}{30} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

Annak az esélye, hogy 30 percnél többet várunk mindig $\le \frac{1}{3}$.

⑤ $\sigma = 1,75$ gramm a szórás

a.) hány mérést kell végeznünk, hogy 99%-os biztossággal és 1 g pontossággal tudjuk, hogy mi az átlagos súly?

$\boxed{\text{Csebisev-egyenlőtlenség: } 1-P(|X_n-\mu|<\varepsilon) = P(|X_n-\mu| \ge \varepsilon) \le \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}}$

$n \ge \frac{1,75^2}{1^2 \cdot 0,01} = 306,25 \to \underline{307 \text{ mérés kell}}$ $\boxed{n \ge \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 P_0}}$

b.) ha feltesszük, hogy a zacskók súlya normális eloszlást követ?

1. $P\left(|\bar{x}-\mu| < \alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0,99$

$0,99 = 2\Phi(\alpha) - 1$

$\alpha = 2,575$

$\varepsilon \ge \alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \to n \ge \left(\frac{\alpha\sigma}{\varepsilon}\right)^2 = \left(\frac{2,58 \cdot 1,75}{1}\right)^2 = 20,38 \to \underline{21 \text{ mérést kell végeznünk}}$