Valószínűségszámítás és statisztika

- complex.elte.hu/valszam
- Fekete Attila: fekete@complex.elte.hu, É 5.56
- vizsga: szóbeli, vizsga kvalifikáció: előadások elején konzultáció: csüt: 15-16

0) ⇒ de Méré lovag feladványa: | 5 perces feladatok ← 50% alatt kiugrófeladat a vizsgára

- 1 kockával 4 dobásból legalább 1 hatos
- 2 —"— 24 —"— legalább 1 hatospár

→ Melyik valószínűbb?

→ Felhasználások:
- szerencsejáték
- gazdaság
- biztosítás
- időjárás
- tömegtermelés
- sorbanállás
- info-kommunikáció
- fizika

1. óra

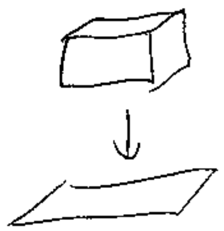
1) heurisztikus bevezetés:

Véletlen esemény: egy fizikai kísérlet lehetséges kimeneteleinek egy halmaza

pl. páros dobás: $A=\{2,4,6\}$

4-nél kisebb: $B=\{1,2,3\}$

pl. szivacs



ha konkrétan ismerem a perem-/kezdőfeltételeket

↓

determinisztikus mozgás (nem véletlenszerű)

DE ha sok mindent nem ismerünk / elhanyagoljuk a részleteket

↳ véletlenszerűség

(kvantumvilágban nem azért van véletlenszerűség, hanem bele van kódolva a rendszerbe)

kockadobás:

- biztos esemény: $I=\{1,2,3,4,5,6\}$
- lehetetlen –"– : $\emptyset=\{\}$

2) Műveletek eseményekkel:

a)
- nem: $\overline{A}$ (pl. nem páros)
- vagy: $A+B$
- és: $A\cdot B$
- „de nem": $B-A=B\cdot\overline{A}$ (pl. 4-nél kisebb, de nem páros)
- kizáró vagy: $A\oplus B$

b) Műveleti azonosságok:

- $AB = BA$ $\quad A+B = B+A$
- $A \cdot A = A$ $\quad A+A = A$

$\vdots$

- disztributivitás: $A(B+C) = AB+AC$

$$A + AB = A \;!!$$

- $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$
- $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

} de Morgan azonosságok

c) reláció események között

- A-ból köv. B: $A \subset B$
- A összetett esemény, ha $\exists B \neq A$ és $C \neq A$, amire $A = B+C$ felbontható kisebb eseményekre
- A elemi esemény, ha nem összetett

d) teljes eseményrendszer:

- A és B egymást kizáró események, ha $A \cdot B = \emptyset$
- $A_1, A_2, \ldots A_n$ teljes eseményrendszer, ha $\forall k, j = 1, 2, \ldots n$-re:
  a) $A_k \neq \emptyset$
  b) $A_j \cdot A_k = \emptyset$, ha $j \neq k$ és
  c) $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 1$

e) eseménytérek:

- véges eseménytérben $\forall$ esemény előáll elemi események összegeként
- véges eseménytérben az (összes) események száma 2^n, ahol n az elemi es. száma

uis.:

pl. $B = \bar{A}_1 + A_2 + \dots + A_n$

2 2 ... 2

pl. kockadobás eseménytér

· 1 kockadobás: $\Omega_1 = \{1, 2, \dots 6\}$

összes esemény: $2^6 = 64$

esetében van összetett esemény is, pl. párosat $(2,4,6)$ dobunk; ~~vagy~~ ...

$A(2)+A(4)+A(6)$

· 1 kockadobás 4-szer: $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 \times \Omega_4$

összes es.: $2^{6^4} \sim 10^{390}$

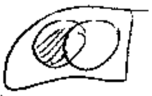
3) Események modellezése halmazokkal:

a) halmazműveletek

$\cup$: unió 

$\cap$: metszet 

E' $\bar{E}$: komplementer 

különbség: $E - F = E \cap F'$ 

szimm. differencia ("kizáró vagy") $E \Delta F = (E-F) \cup (F-E)$

b) az eseményeket modellező halmazosztálynak zártnak kell lennie a fenti halmazműveletekre

↳ halmazgyűrűk

R halmazgyűrű, ha $E, F \in R$ esetén

- $E \cup F \in R$ és
- $E - F \in R$

$\Big\}$ 2 követelmény

$\Downarrow$

$E \triangle F = (E-F) \cup (F-E) \in R$

$E \cap F = (E \cup F) - (E \triangle F) \in R$

$E_1, E_2, \dots E_n \in R$ esetén $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in R$

— " — $\bigcap_{i=1}^{n} E_i \in R$

– generált halmazgyűrű:

- bmely F ~~[illegible]~~ -hez egyértelműen $\exists$ egy F-et tart. legszűkebb halmazgyűrű
- bmely 2 gyűrű metszete is gyűrű

~~(az F által)~~

pl. triviális halmazgyűrű : $R = \{\emptyset, \Omega\}$

teljes — " — : $R = P(\Omega)$

legyen $\Omega = \mathbb{R}$. Ekkor az

$\bigcup_{i=1}^{n} \{x : -\infty < a_i \le x < b_i < +\infty\}$ (balról zárt jobbról nyílt)

alakú halmazok halmaza halmazgyűrű

c) halmazalgebrák

- baj: a halmazgyűrű komplementerre nem zárt

$\Downarrow$

A pontosan akkor halmazalgebra, ha gyűrű ÉS $\Omega \in A$

kitérünk:

- $E \cup F \in R$
- $E' \in R$

$\Rightarrow$ a többi művelet is zárt

= halmazalgebra (Boole-alg.)

- Megszámlálhatóan ∞ egyesítés problémája:

legyen A_k az az esemény, hogy k. dobásra 6-ost kapunk

$A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$ esemény jelentése: véges sok dobással befejeződik a dobás

$\downarrow$ ált. ban nem teljesül

általában ∞ sok eseményről nem tudunk

$\Downarrow$

d) σ-gyűrű:

S halmaz σ-gyűrű, ha:

- $E - F \in S$
- $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in S$

lényeg: a műveletek zártak, és megszámlálhatóan ∞ sok esemény uniójára is

= a véletlen eseményeket σ-algebrák elemeivel modellezzük

4) Mi a valószínűség?

a) Def: „A valószínűség az eseményekhez rendelt szám, amely körül az adott esemény bekövetkezésének relatív gyakorisága ingadozik."

↓

mat. -ag ez nem értelmezhető

baj: ~~ez~~ ez nem olyan, mint a határérték, mert mindig „kijöhetünk" ε környezetből, ha hirtelen pl. „egy adott sorozatot dobálunk kockával

b) klasszikus valószínűség:

- véges elemi es., azonos val.-ű elemi események
- $P(A) = \dfrac{\text{kedvező eset}}{\text{összes eset}}$

c) Maxwell - Boltzmann statisztika: (kül. golyók)

- hányféleképpen lehet N polcra n golyó: N^n → több golyó is mehet 1 polcra
- mi a vsz-e, hogy pontosan k golyó kerül egy polcra?

kedvező: $\binom{n}{k}\underbrace{(N-1)^{n-k}}$

összes: N^n

a többit $(n-k)$ tetszőlegesen tehetjük fel a többi polcra

$\rightarrow \binom{n}{k}\left(\frac{1}{N}\right)^k\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k}$

(binomiális)

d) Bose - Einstein - statisztika:

→ a polcokat meg tudom kül., de a golyókat nem

• hányféle elrendezés van? $\binom{N+n-1}{n}$ ← ismétléses komb.: az n golyót hova tudom lerakni N polc közül, több is kerülhet egy polcra

N polc $\Big|\overset{1}{\underset{1}{\bullet}}\ \underset{2}{\bullet}\Big|^{2}\ \bullet\big|\big|\bullet\ \cdots\ \underset{n}{\bullet}\Big|^{N-1}$ → $\frac{(n+N-1)!}{(N-1)!}$ eset ~~DE~~ DE

n golyó

a vonalakat tudom rakosgatni (polcok)

N polcból n-et ism. nélkül kiv.

$$\frac{(n+N-1)!}{n!\,(N-1)!} = \binom{n+N-1}{n}$$ golyók egymás közti cseréje

(ismétléses komb.)

a többi N-1 polcra kell n-k golyót elhelyezni

$$\frac{\binom{N+n-k-2}{n-k}}{\binom{N+n-1}{n}}$$

· Mi a vsz-e hogy pontosan k golyó kerül egy polcra?

e) Fermi - Dirac - statisztika:

- nem kül. meg a golyókat, de 1 polcra csak 1 golyó kerülhet ← Pauli - elv

összes elrendezés: $\binom{N}{n}$ ← N polcból n-et kiv. ism. nélkül

pontosan k golyó egy polcra $\frac{n}{N}$ $(k=1)$

kedvező eset $\dfrac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \dfrac{n}{N}$

összes eset

a többi $(n-1)$ golyót helyezzük el N-1 polcra

⇓

számít, hogy milyen feltételei vannak a problémának
(pl. megkülönböztethetőek-e a ~~?~~ golyók)

f) relatív gyakoriság
- a relatív gyakoriság nem negatív:
  $\hookrightarrow k_A/n \geq 0$
- $k_1/n = 1$ biztos es. rel. gyak. -a

⇓

g) a val. tulajdonságai:
- $P \geq 0$
- $P(I) = 1$
- ha $P(A \cdot B) = 0$ (független események)
  $\Downarrow P(A+B) = P(A) + P(B)$

  $\not\Uparrow$

- ha $B \subset A$, akkor $P(B) \leq P(A)$

$\rightarrow$ $B \subset A$

$B + C = A$

$B + \overline{B}A = A$ $\overbrace{}^{A-B}$

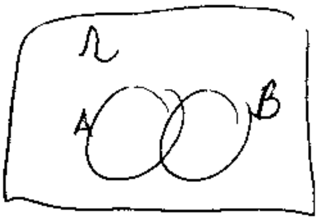
$P(B) + P(\overline{B}A) = P(A)$

$P(B) \leq P(A)$

$\rightarrow$ $\forall$ eseményre $P(A) \leq 1$ $\Rightarrow$ $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

$\rightarrow$ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ $\Longleftarrow$ $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

$\rightarrow$ $\forall A, B$-re $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$



$A+B = A + \cancel{\quad} \bar{A}\cdot B$

$A+B = B + A\bar{B}$

$P(A) = P(\bar{B}A) + P(AB)$
$P(B) = P(\bar{A}B) + P(AB)$ $\oplus$

$P(A+B) = P(A) + P(B\bar{A}) = P(B) + P(\bar{B}A)$

$P(A+B) = P(\bar{B}A) + P(B\bar{A}) + P(AB)$

$P(A) + P(B) = P(A+B) - P(AB)$

$\rightarrow P(A+B) = P(A \Delta B) + P(AB)$

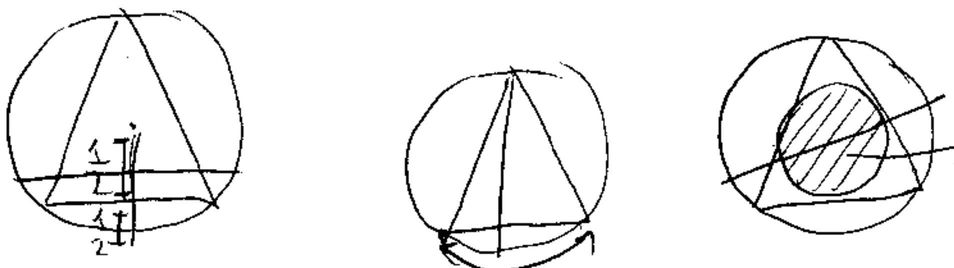
Ha $A_1, A_2, \dots A_n$ tetsz., akkor

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k^{(n)}$$

ahol $$S_k^{(n)} = \sum_{\le i_1 < i_2 < i_3 \dots} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \dots)$$

5) Geometriai valószínűség

a) Bertrand → ? val., hogy egy húr hosszabb lesz, mint a △ oldala



$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$

→ itt lehet a középpontja a húrnak

∀3 lehetséges mo., a hex kiválasztásának definiál~~t~~ható

függ

b) Területek tul.-ai:

- megszámlálható, additív:
  - a μ halmazfv. σ-additív, ha páronként diszjunkt halmazok esetén

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(E_i\right)$$

mérték

- a mérték gyűrűn definiált, kiterjesztett valós értékű, nem negatív, σ-additív halmazfv., melyre $\mu(\emptyset)=0$

↓

a területek is ilyen μ mértékfv.

- a Borel-mérték:

legyen:

→ X a valós számegy.

→ P az a összes $[a,b)$ alakú félig zárt int-ok összessége

→ $\mu([a,b))=b-a$

- Borel-mérték: μ kiterjesztése a P által generált gyűrűre

Borel-mérték:

- ∀ megszámlálható halmaz nullmértékű
- ∃ nem megsz.-ható nullmértékű halmaz
- a Borel-halmaz nem teljes !!

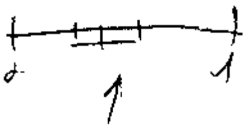
– A Lebesgue-mérték

- külső mérték

$$\mu^*(E) = \inf \{\mu(F) : E \subset F \in S\}$$

$\uparrow$

vannak olyan halmazok, amire nem tudunk hosszt definiálni



van olyan halmaz, amire nem tudjuk értelmezni a hosszt

$\Rightarrow$ intervallumok alapján definiáljuk a területet

$\downarrow$

ez a Lebesgue-mérték

ha $\prod_{i=1}^{\infty} B_i = B$, $B_{i+1} \subset B_i$

a szorzat egy adott halmazhoz tart

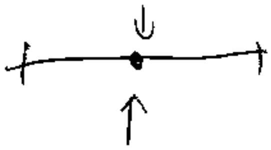
VAGY

$B_i \subset B_{i+1}$

$\sum_{i=1}^{\infty} B_i = B$

akkor $\boxed{\lim_{n\to\infty} \mu(B_i) = \mu(B)}$

pl. ennek a val. 0. Biz.:



1 pont → körbe tudom venni egymásba skat. int.-okkal

ezek összeszűkülnek a pontra (Cantor-ax.)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x_0 , x_0+\frac{1}{n}\right) = \{x_0\}$$

$$\underline{\underline{0}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \underline{\underline{\mu\left(\{x_0\}\right)}}$$

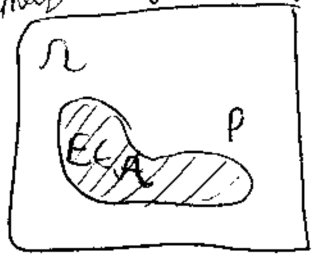
$\Downarrow$

↳ megszámlálható sok pont val.-e is 0.

(pl. ~~egész~~ rac. számok)

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — P: maga a „terület", vagy valószínűség

Ω: alaphalmaz, $\mathcal{A}$: szigma algebra



$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

(additív)

= a területszámítás és a val. abban hasonlít, hogy mindkettő σ-algebrát alkot

+ val.-vel <u>normálni</u> is kell (ebben eltérnek)

$P(\Omega)=1$

2. óra

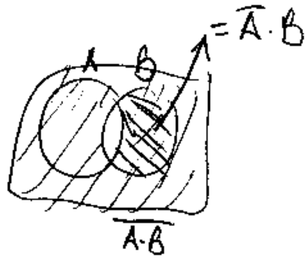
~~Feladat~~ Feladatok:

$\overline{X+A}+\overline{X+\bar{A}}=AB+\bar{B}$ / $\overline{}$

$\overline{\overline{X+A}}+\overline{\overline{X+\bar{A}}}=\overline{AB+\bar{B}}$ de-Morgan

$X+\cancel{A}+X+\cancel{\bar{A}}=\overline{AB}\cdot B$

$X=\bar{A}B$



$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$P(\Omega)=1$ valószínűségi mérték (σ additív)

1) <u>játék</u>:

~~az ajtó felnyitása független a választástól~~

NEM $\frac{1}{2}$ lesz a val.-e utána, hogy kocsit húztunk!

KOCSI	~~BOCI~~	BOCI
BOCI	KOCSI	~~BOCI~~
BOCI	~~BOCI~~	KOCSI

3 lehetőség

! mindig a bocit fedik fel a másik 2 ajtó közül.

ha bocit ~~(ajtót) húzunk~~ fedünk fel

$\frac{1}{3}$ az esélye, hogy kocsit húztunk, hiába fedtük fel a bocit

$\frac{2}{3}$ az esélye, hogy bocit húztunk

Feltételes vsz.:

pl. Ismerősünknek 2 gyereke van

a) Mi a vsz-e, hogy mindkettő ~~lány~~ fiú?

$\Omega_0 = \{FF, FL, LF, LL\}$ $|\Omega_0| = 4$ $P(FF) = 1/4$

b) Mi a vsz-e, hogy mindkettő fiú, ha tudjuk, hogy nincs 2 lány

$\Omega_1 = \{FF, FL, LF\}$ $|\Omega_1| = 3$ $P(FF \mid \overline{LL}) = 1/3$

c) Mi a vsz-e, hogy mindkettő fiú, ha az első fiú?

$\Omega_2 = \{FF, FL\}$ $|\Omega_2| = 2$ $P(FF \mid FF \cup FL) = 1/2$

Feltételes valószínűség:

N kísérlet, A és B események. B esemény n-szer (AB és BB)
AB — " — k-szor

$$h_{A|B} = \frac{k}{n} = \frac{k/N}{n/N} = \frac{h_{AB}}{h_B}$$

1) Def.: feltételes vsz.: A feltéve B, ha $P(B) > 0$

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}}$$

pl. ismerősös (2 gyerek) → b) $\frac{P(FF \cap \overline{LL})}{P(\overline{LL})} = \frac{P(FF)}{P(\overline{LL})} = \frac{1/4}{3/4} = 1/2$

c) $\frac{P(FF \cap (FF \cup FL))}{P(FF \cup FL)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$

2) $\{\Omega, A, P\}$ $P(B)>0$

$$\{\Omega, A, \underbrace{P(\cdot | B)}_{\text{ez is val. mérő!!}}\}$$

1. $P(A|B) \geq 0$

2. $P(\Omega|B) = 1$

3. $\underset{\substack{\uparrow \\ \sigma\text{-additív}}}{P}\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i | B\right) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i|B)$ ✓ → ezek teljesülnek

3) <u>Szorzat szabály:</u>

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B)$$

$$P(A_1 \cdot A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \prod_{i=1}^{n-1} P(A_{i+1} | A_1 A_2 \ldots A_i) =$$

$$= P(\cancel{A_1}) \frac{P(\cancel{A_1 A_2})}{P(\cancel{A_1})} \cdot \frac{P(\cancel{A_1 A_2 A_3})}{P(\cancel{A_1 A_2})} \cdot \ldots \cdot \frac{P(A_1 A_2 \ldots A_n)}{\cancel{}}$$

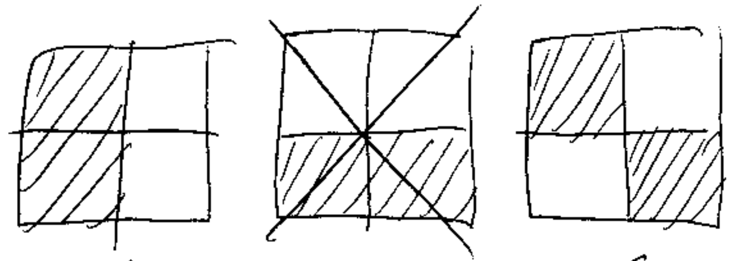
4) <u>Def:</u> Sztochasztikus függetlenség:

$P(A|B) = P(A)$! független események val.-e a val.-ek szorzata

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \rightarrow \boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B)}$$

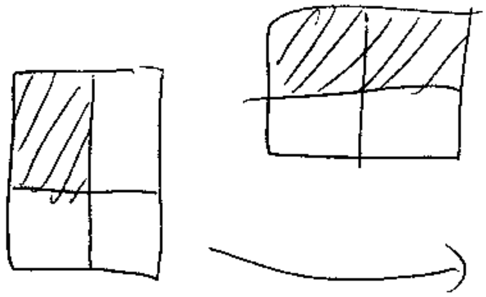
↳ szimmetrikus A, B-ben

b)



A B C

$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$



ABC

$\longrightarrow P(ABC)=1/4 \neq P(A)\,P(B)\cdot P(C)$

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$

$$P(AC)=P(A)\cdot P(C)$$

$$P(BC)=P(B)\,P(C)$$

$\Rightarrow$ a teljes függetlenséghez nem elég a páronkénti függetlenség

Def. Az $\{A_i\}$ események teljesen függetlenek, ha bármely $k=2,3,\dots n$ esetén

$$P\left(\prod_{l=1}^{k} A_{i_l}\right)=\prod_{l=1}^{k} P\left(A_{i_l}\right)$$

ahol $(i_1,i_2,\dots,i_k)$ az $1,2,\dots n$ ismétlés nélküli kiválasztása

(ezekből tetszőleges kiv.-unk k-t)

5) Teljes vsz tétele:

Legyen A tetszőleges, $\{B_i\}$, $i=1\dots n$ teljes eseményrendszer

(teljes es. rendszer:

$$B_i B_j = \emptyset \quad i \neq j \;, \quad \sum_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega \;)$$

tétel

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i)\, P(B_i)}$$

Biz.: $P(A) = P(A\Omega) = \cancel{P\left(A \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)} P\left(A \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} AB_i\right) =$

$AB_i \cap AB_j = 0$, ha $j \neq i$

mert $B_i \cdot B_j = 0$ $= \sum_{i=1}^{\infty} P(AB_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A|B_i)\, P(B_i)$

$\downarrow$

(biz.-ot tudni kell)

6) Tétel Bayes-tétel: A tetszőleges, $\{B_i\}$ teljes eseményrendsz.

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)\, P(B_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)\, P(B_j)}$$

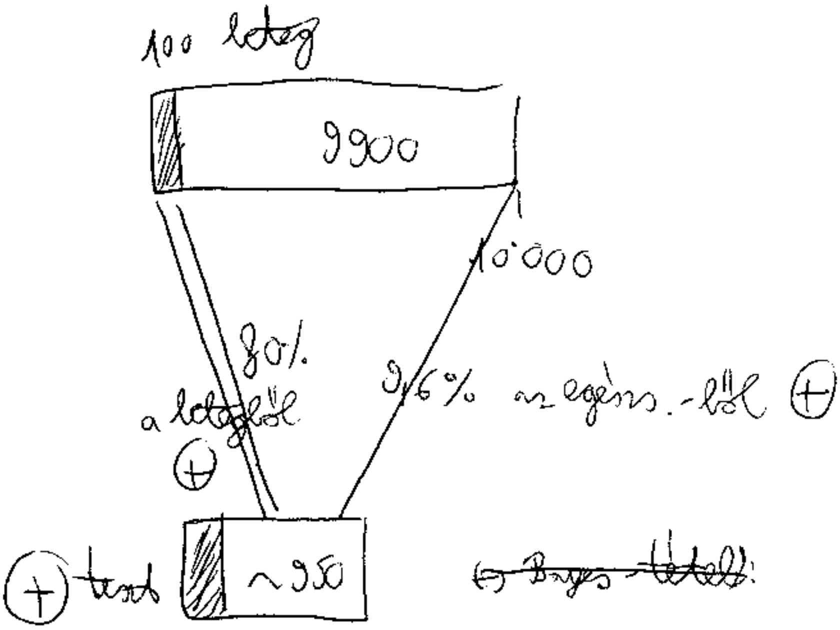
Biz.: $P(B_i|A) = \dfrac{P(B_i A)}{P(A)} = \dfrac{P(A|B_i)\, P(B_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j)\, P(B_j)}$

pl. Vizsgálat : 1% beteg (populáció)

80% pozitív, ha beteg

9,6% —"— , ha egészséges

Ha pozitív a teszt, mi a vsz-e, hogy beteg a vizsgált személy?



~~Bayes-tétel:~~

$\underbrace{80}_{P(B|A)\,P(A)}$

A : vizsgált ember beteg

B: teszt pozitív

$P(A) = 1\%$

$P(B|A) = 80\%$

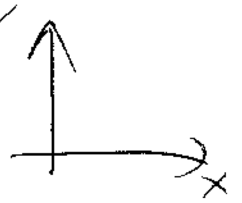
$P(B|\overline{A}) = 9{,}6\%$

Bayes-tétel:
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B|A)\cdot P(A) + P(B|\overline{A})\cdot P(\overline{A})} = 7{,}6\ \%$$

7) Felt. val. mat.-ban:

X, Y $\quad X \times Y$ Descartes-szorzat (x,y) párok,

amikor $x \in X$, $y \in Y$



(egyenes × egyenes = sík)

(Ω, A, P) ha ugyanazt az eseményt végezzük el

$$(\underbrace{\Omega \times \Omega}_{\text{alaphalmaz}}, \underbrace{A \times A}_{\text{események}}, \underbrace{P \times P}_{\text{val.-ek}})$$

ez az események Desc.-szorzata által generált σ-algebra

(az es.-ek Dec.-szorzata önmagában nem σ-algebra)

$$(E, F) \in A \times A$$

$$(P \times P)(E, F) = P(E) \cdot P(F)$$

8) Független kísérletek:

$A_i^{(s)}$ esemény az s-ik kísérlet i.-ik kimenetele

legyen $\forall s$-re

$A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, \ldots A_n^{(s)}$ teljes eseményrsz.

Def] kísérletek sorozata független, ha:

$$P\left(A^{(1)}_{i_1} A^{(2)}_{i_2} \dots A^{(k)}_{i_k}\right) = p^{(1)}_{i_1} \cdot p^{(2)}_{i_2} \cdots p^{(k)}_{i_k}$$

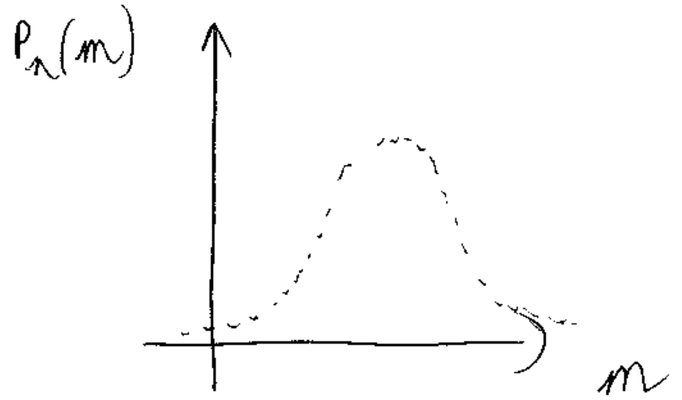
D] Bernoulli-sorozat (pénzfeldobás)

$\cancel{k}\quad k=2 \qquad p_1^{(2)} = p \qquad p_2^{(2)} = q$

Legyen n kísérletünk. Mi a val.sz.-e (vsz-e), hogy az A esemény m-szer fordul elő?

$$P(A_1 \bar{A}_1 \bar{A}_1 A_1 \dots A_1) = p \cdot q \cdot q \cdot p \cdots p = p^m \cdot q^{n-m}$$

$$\boxed{P_n(m) = \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot q^{n-m}}$$ binomiális-eloszlás



$P_n(m) \gtreqless P_n(m+1)$ ha $m \gtreqless np-q$

$n \cdot p - q$

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{n-m}{m+1} \frac{p}{q}$$

De Moivre - Laplace - ~~tétel~~

$$\sqrt{n \cdot p \cdot q} \cdot P_n(m) \Big/ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \to 1$$ ahol $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ (korlátos, ha $n \to \infty$)

ezzel ~~közelíthető~~ a bin. eloszlás $n \to \infty$-re

$p = \text{áll}$

$n \to \infty$

Biz.:

$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ Stirling-formula

↳ köv. óra

$$P\left(a \leq \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$p\left(\underbrace{\left|\frac{\mu}{n} - p\right|}_{\left|\frac{\mu - np}{n}\right|} < \varepsilon\right) \longrightarrow p\left(\left|\frac{\mu - np}{\sqrt{npq}}\right| < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\varepsilon\right)$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon}^{\sqrt{\frac{n}{pq}}\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \to 1$$

annak a val.-e)
hogy ~~...~~ az átlag (valószínűség)
körül mozgunk $\to 1$, ha $n \to \infty$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1}$$

nagy számok ~~törvénye~~ (Bernoulli-féle) törvénye

3. óra

0) feladat javítás:

$$P(AB) = P(A)\,P(B)$$

$$P(\bar{A}\cdot\bar{B}) = P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B) = 1 - \big(P(A) + P(B) - P(AB)\big) =$$

$$= 1 - P(A) - P(B) - P(A)\cdot P(B) =$$

$$= \underbrace{\big(1-P(A)\big)}_{P(\bar{A})}\ \underbrace{\big(1-P(B)\big)}_{P(\bar{B})} = P(\bar{A}\cdot\bar{B})$$

1) Emlékeztető:

- független ~~sorozatok~~ kísérletek sorozata
- Bernoulli-sorozat → binomiális eloszlás

2) Urna modell: golyókat húzunk

a) multinomiális eloszlás: több szín

n húzás visszatevéssel, r féle szín

A_i: az i-ik lehetséges szín $p_i = P(A_i)$

$B_{k_1, k_2, \ldots k_r}$: az i-iket k_i-szer húztuk ki

1adott sorrend:

$$P(\underbrace{A_1 A_1 \ldots A_1}_{k_1}\,\underbrace{A_2 \ldots A_2}_{k_2} \ldots \underbrace{A_r\, A_r\, A_r}_{k_r}) = p_1^{k_1}\, p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$$

$$P(B_{k_1,k_2,\dots,k_r}) = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_r!}\, p_1^{k_1}\dots p_k^{k_r}$$

~~visszatevés~~

b) hipergeometrikus: visszatevés nélkül

$$P(B_k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$\binom{N}{n}$ } összes leh. húzás

c) polihipergeom.: több szín, visszatevés nélkül

d) geometriai eloszlás: visszatevéssel, 2 szín

A: az egyik szín $p = P(A)$, $q = P(\overline{A})$

B_k: az A színt először k-adikra húztuk

$$\underline{\underline{p(B_k) = p\cdot q^{k-1}}}$$

$$P(B_k) = P(\underset{1}{\overline{A}}\cdot\underset{2}{\overline{A}}\cdot\dots\underset{k-1}{\overline{A}}\cdot A)$$

e) negatív binomiális eloszlás húzás visszatevéssel, 2 féle szín

$p = P(A)$, $q = P(\overline{A})$

$B_k^{(r)}$: az A szín r+k-adik húzással fordul elő r-edszer

ezt tudjuk

$$\underline{\underline{P(B_k^{(r)})}} = P\Big(\underbrace{(r-1)\,A,\ k\,\overline{A}}_{k+r-1}\ A\Big) = \underline{\underline{\binom{k+r-1}{r-1} p^r q^k}}$$

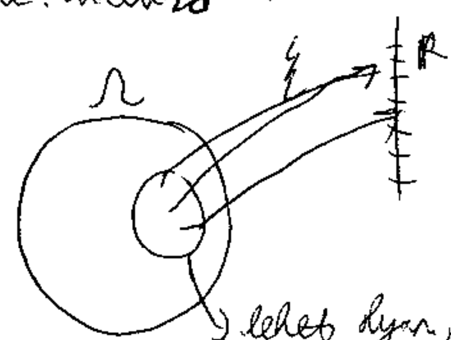
3) Valószínűségi változók

a) • Eddig a kísérlet eredménye tetsz. dolog lehetett, (pl. piros golyó, fekete, nyer – nem nyer..)
de a kísérletek kimenetelei (eredményei) gyakran számok

• a val. változók véletlentől függő mennyiségek

• Legyen (Ω, A, P) val. mező. Lehet-e bármilyen fv. a val. változó ?

Nem



val. változó fv-e is val. változó!

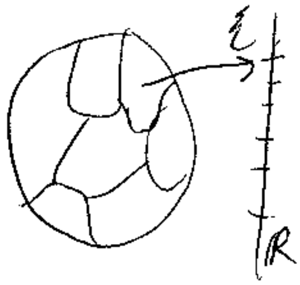
ξ az a fv., ami adott eseményhez egy bizonyos értéket (pl. $A_k \xrightarrow{\xi} x_k$) rendel

lehet olyan, hogy nem mérhető a halmaz: nem tudunk hozzá val.-et rendelni

$\Rightarrow$ a val. változók $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ mérhető fv.-ek

$$\underbrace{P(\xi = x_k)} = P\left(\{ w \in \Omega \,|\, \overset{\text{amire}}{} \xi(w) = x_k \}\right)$$

jelölés → annak a valószínűsége, hogy olyan w köv. be, amire a ξ esetén ~~val. válto~~ értéke x_k)



diszkrét val. változóra:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k$$ → diszjunkt, teljes rendszert alkotnak

- $p_k = P(\xi = x_k)$ neve ξ eloszlása, ha x_k-k diszkrétek

- $F(x) = P(\xi < x)$ ξ eloszlás függvénye

(ez nem diszkrét esetén is működik)

(Nem kell tudnunk pontosan, hogy melyik eseményhez mit rendel, elég az eloszlásfv.)

~~b)~~ független val. változók (ξ, η): 2 félén rendelünk eseményekhez értékeket

$$P(A_k B_l) = P(A_k) P(B_l), \text{ azaz ha}$$

$$P(\xi = x_k, \eta = y_l) = P(\xi = x_k) \cdot P(\eta = y_l) \quad \cancel{(\forall k, l = n)}$$

egy konstans ~~val~~ $\forall$ val. változótól független

ha $\xi_1, \xi_2, \ldots$ függetlenek, akkor $g(\xi_1), g(\xi_2)$ transzformáltjai is

c) ~~Várható érték~~

$P(\xi = x_k)$
$P(\eta = y_l)$

$$P(\xi = x_k, \eta = y_k) = ?$$

ha nem függetlenek, akkor ezt nem tudjuk

4) A várható érték:

pl. kaszinó: milyen játéknál lesz hosszútávon nyereséges az üzlet

a) Legyen ξ diszkrét val. változó:

$p_k = P(\xi = x_k)$

$x_1, x_2, \dots, x_n$

$p_1, p_2, \dots, p_n$

ennek (ξ-nek) várható értéke:

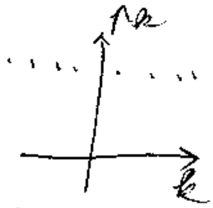
$$\boxed{M(\xi) = \sum_k p_k \cdot x_k}$$

, amennyiben a sor abszolút konvergens

ha nem abszolút konv., és megfelelően cserélem a tagokat, mást kaphatok

$$M(\xi) = \frac{N p_1 x_1 + N p_2 x_2 + \dots + N p_n x_n}{N} = \sum_k x_k p_k$$

(Más jelölések: $E(\xi)$, $E[\xi]$, $\langle \xi \rangle$)



szimmetrikus, de nincs várható értéke

b) ~~Val. -k~~ eloszlások ~-e:

- nincs mindig várható érték, pl.

$$P(\xi = 2^k) = \frac{1}{2^k} \qquad M(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} 2^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\xi = 2^k) = 1$$

• binomiális eloszlás:

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} =$$

$$= n \cdot p \sum_{k=0}^{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} = np \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} p^{k-1} q^{n-k}}_{(\underbrace{p+q}_{1})^{n-1} = 1} =$$

$$= n \cdot p$$

• negatív binom.: $M = \frac{r}{p}$

• hipergeom.: $M(\xi) = n \cdot \frac{M}{N}$

c) <u>tulajdonságai:</u>

• ξ, η $\quad p_k = P(\xi = x_k)$ $\quad q_l = P(\eta = y_l)$

ez mindig igaz, nem csak függetlenség esetén

$$\underline{\underline{M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta)}}$$

linearitás miatt (köv. ld.)

$$M(\xi + \eta) = \sum_{z} z \cdot P(\xi + \eta = z) = \sum_{z} z \cdot P(\xi = x_k, \eta = y_l, x_k + y_l = z) \overset{*}{=}$$

msz.:

$$z \cdot P(\xi = x_k, \eta = y_l) = \sum_{z = x_k + y_l} (x_k + y_l) \cdot P(\xi = x_k, \eta = y_l)$$

$$\circledast \sum_{z} \sum_{z = x_k + y_l} (x_k + y_l)\, P(\xi = x_k, \eta = y_l) = \sum_{z} \sum_{z = x_k + y_l} x_k P(\xi = x_k, \eta = y_l) +$$

$$+ \sum_{z} \sum_{z = x_k + y_l} y_l\, P(\xi = x_k, y_l) = \sum_{x_k} x_k\, P(\xi = x_k) + \sum_{y_l} y_l \cdot P(\eta = y_l) = M(\xi) + M(\eta)$$

–28–

• ha c konst., akkor:

$$M(c\xi)=cM(\xi)$$

• a várható érték lineáris:

$$M\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k\right)=\sum_{k=1}^{n} c_k M(\xi_k)$$ → nem kell, hogy függetlenek legyenek!

ξ: n húzásból mi a ~~valsz~~ vsz-e, hogy k-szor köv. be A?

η: 1 húzásból k-szor

$$\xi=\eta_1+\eta_2+\dots\eta_n \qquad M(\eta_i)=p\cdot 1+(1-p)\cdot 0=p$$

$$M(\xi)=M(\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_n)=\sum_{i=1}^{n}M(\eta_i)=np$$

d) ha ξ és η függetlenek

$$\boxed{M(\xi\cdot\eta)=M(\xi)\,M(\eta)}$$

e) ha $\eta=\xi-M(\xi)$, akkor $M(\eta)=0$ (centrálás)

biz:

$$M(\eta)=M(\xi-M(\xi))=M(\xi)-M(\underbrace{M(\xi)}_{\text{ez egy szám}\to\text{konstans várható értéke önmaga}})=M(\xi)-M(\xi)=0$$

f) feltételes várható érték: (súlyozott összeg) adott ξ változóra

$$M(\xi|A)=\sum_k x_k P(\xi=x_k|A)$$, A_i teljes eseményrendszer,

$$M(\xi)=\sum_k x_k P(\xi=x_k)=\sum_k\sum_i x_k P(\xi=x_k|A_i)\cdot P(A_i)=$$

$$=\sum_i \underline{M(\xi|A_i)}\,\underline{P(A_i)}$$ teljes várható érték tétele

$\eta(\omega)=\{M(\xi|A_i)$, ha $\omega\in A_i\}$

ez is egy fv. (val. változó) → $\forall\, \omega$-hoz egy számot rendel

~~gelő~~

$$M(\xi)=\sum_i M(\xi|A_i)\cdot \underbrace{P(A_i)}_{=\,P(\eta=M(\xi|A_i))}$$

$$M(\xi)=M_\eta(\underbrace{M_\xi(\xi|\eta)}_{})$$

a teljes várható érték olyan, mint egy val. változó!

5) A szórás

a) Def: az szórás a várható érték körüli ingadozás mértéke (négyzetének ~ gyöke)

b) tételek:

- ha $D(\xi)$ $\exists$, akkor $D^2(\xi)=M(\xi^2)-M(\xi)^2$, mivel:

$$D^2(\xi)=M((\xi-M(\xi))^2)=M(\xi^2-2\xi M(\xi)+M(\xi)^2)=$$

$$= M(\xi^2) - 2M(\xi)\,M(\xi) + M(\xi)^2 = M(\xi^2) - M(\xi)^2$$

- $\eta = a\xi + b$

$$D^2(\eta) = D^2\left((\eta - M(\eta))^2\right) = M\left((a\xi + b - (aM(\xi)+b))\right)^2 =$$

$$= M\left(a^2(\xi - M(\xi))^2\right) = a^2 D^2(\xi)$$

$$\Downarrow$$

$$D(\eta) = |a| \cdot D(\xi)$$

$$\Downarrow$$

val. változó + konstans → a szórás nem vált.

- ha $\xi_1, \xi_2, \dots$ függetlenek

$$D^2\left(\sum c_k \xi_k\right) = \sum c_k^2 D^2$$

6) Generátorfv-ek

a) ~~Def~~: $\underbrace{G_\xi(z)}_{\text{a } \xi \text{ val. változó generátorfv-e}} = M(z^\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ hatványsor definiálja

Pl. n-ed rendű binomi. eloszlásra

$$G_\xi(z) = (pz+q)^n = (pz + 1 - p)^n = (1 + p(z-1))^n$$

b) $G(z)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ $\qquad M_s=\sum_{k=0}^{\infty} k^s p_k$

s-edik momentum

- $M_1=G'(1)=$
  $=\sum_{k=0}^{\infty} k\,p_k$

- $G''(1)=\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\cdot p_k = M_2-M_1$

- $D^2(\xi)=M_2-M_1^2=G''(1)+G'(1)-\left[G'(1)\right]^2$

c) a ξ momentumgeneráló fv-e:

$$H_\xi(w)=G_\xi(e^w)=M\left(e^{w\xi}\right)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{M_s}{s!}w^s$$

a centrális momentum-generáló fv:

$$I_\xi(w)=e^{-wM_1}G_\xi(e^w)=M\left(e^{w(\xi-M_1)}\right)=1+\sum_{s=1}\frac{m_s}{s!}w^s$$

d) ξ kumuláns generáló fv.-e:

$$K_\xi(w)=\log I_\xi(w)=\log M\left(e^{w(\xi-M_1)}\right)=\sum_{l=2}^{\infty}\frac{k_l}{l!}w^l$$

- linearitás itt is igaz!
- ha ξ és η függetlenek

$$G_{\xi+\eta}(z)=G_\xi(z)\,G_\eta(z)$$

$$K_{\xi+\eta}(z)=K_\xi(z)+K_\eta(z)$$

$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n \qquad G(z)$

$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\nu \leftarrow$ véletlen tagszámú összeg

$G_\eta(z) = G_\nu(G(z))$ ← ennek a generátorfv-e

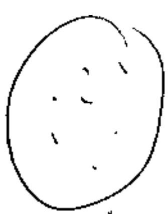
7) Poisson-eloszlás:

a) $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ közelítése $\lim\limits_{n\to\infty} p\,n = \lambda$ konstans

nagyon sok esemény (n), kis valószínűség (p)

„sűrűség"

pl.



mazsolás süti

→ egyre nagyobb süti, de egyre több a mazsola is

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\lambda\right)^{n-k} \prod_{j=1}^{k-1}(\dots)$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

b) generátorfv-el

$$G_n(z) = \left(1 + (z-1)\frac{\lambda}{n}\right)^n \qquad G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} z^k$$

$$\lim_{n\to\infty} G_n(z) = G(z) = e^{\lambda(z-1)}$$

feladatok:

d) $D^2(\xi \mp \eta) = D^2(\xi) \pm D^2(\eta) = \sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2$

$$M((\xi \mp \eta)^2) - [M(\xi \mp \eta)]^2 = M((\xi-\eta)^2) - (m_\xi - m_\eta)^2$$

$$M((\xi-\eta)^2) = (m_\xi - m_\eta)^2 + \sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2$$

vagy

$$M((\xi-\eta)^2) = M(\xi^2 - 2\xi\eta + \eta^2) = M(\xi^2) - 2M(\xi\eta) + M(\eta^2) =$$

$$= \underbrace{M(\xi^2) - M(\xi)^2}_{\sigma_\xi^2} + \underbrace{M(\eta^2) - M(\eta)^2}_{\sigma_\eta^2} + \underbrace{M(\xi)^2 - 2M(\xi)M(\eta) + M(\eta)^2}_{(M_\xi - M_\eta)^2}$$

Poisson-eloszlás:

1) Poisson eloszlás: $n \to \infty$ $p \to 0$ $\lim_{n\to\infty} p \cdot n = \lambda$

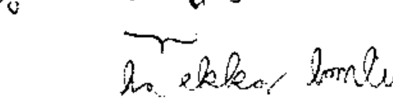
$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

pl. ξ val. változó; atommag mikor bomlik el?

$$A_x = [\xi > x]$$

$F(x) = P(\xi < x) = 1 - P(A_x)$ $\quad G(x) = 1 - F(x) = P(A_x)$

(komplementer eloszlás)



ha akkor bomlik el.

t és t+s között ugyanakkora val.-el bomlik el, mint 0 és s között

↑

független attól, hogy előtte mi történt ⇓

$$\left.\begin{array}{l} P(A_{t+s} \mid A_t) = P(A_s) \\ P(A_{t+s} \mid A_t) \cdot P(A_t) = P(A_{t+s}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} P(A_{t+s}) = P(A_t)\, P(A_s) \\ G(t+s) = G(t) \cdot G(s) \end{array}$$

$$G(t+\Delta t) = G(t) \cdot G(\Delta t)$$

$$\frac{G(t+\Delta t) - G(t)}{\Delta t} = G(t) \cdot \frac{G(\Delta t) - \overset{G(0)}{\overset{\shortparallel}{1}}}{\Delta t}$$

$G(0) = 1$

$\Downarrow$

0-nál nagyobb idő alatt bomlik el.

$$G'(t) = G(t) \cdot G'(0)$$

$$\frac{dG(t)}{G(t)} = \underbrace{G'(0)}_{-\lambda} \cdot dt$$

$$\Downarrow$$

$$G(t) = e^{-\lambda t}$$

vagy

$G(nt) = G(t)^n \qquad n = 1, 2, \dots$

$G(s)^{1/n} = G\left(\frac{s}{n}\right) \qquad nt \equiv s$

$G\left(\frac{n}{m} t\right) = \left(G(t)\right)^{\frac{n}{m}}$

$\downarrow$ $\forall$ egész számra igaz $\Rightarrow$ $\forall$ rac.-ra igaz $\Rightarrow$ $\forall$ való számra igaz

belátható

$G(rt) = G(t)^r$

$$G(r) = (\underbrace{G(1)}_{e^{-\lambda}})^r \longrightarrow G(t) = e^{-\lambda t}$$

$$\left.P(\xi > t) = e^{-\lambda t} \qquad F(x) = 1 - e^{-\lambda t}\right\}$$ exponenciális eloszlás

(ezek már folytonos változók)

N részecske: Mi a vsz, hogy t idő alatt pontosan k bomlik el?

$$P_k(t) = \binom{N}{k} \Big(\underbrace{F(x)}_{1 \text{ elbomlása}}\Big)^k \big(1-F(x)\big)^{N-k} = \binom{N}{k}\left(1-e^{-\lambda t}\right)^k e^{-\lambda t (N-k)} \approx$$

$$\approx \frac{\left[N\left(1-e^{-\lambda t}\right)\right]^k}{k!} e^{-N\left(1-e^{-\lambda t}\right)} \approx \frac{(N \cdot \lambda \cdot t)^k}{k!} e^{-N \lambda t}$$

ha $\lambda t \ll 1$

$\downarrow$

Poisson-eloszlás

$$P(\xi > t) = e^{-\lambda t}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ T:\ \text{felezési} \\ \text{idő}}}{P(\xi > T)} = e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T} \quad \text{bomlási állandó}$$

$\Downarrow$

Poisson-eloszlás ~~...~~:

$t_1 < t_2 < t_3 \quad A_k(t_1, t_2)$ t_1 és t_2 között pontosan k esemény

a) $A_k(t_1, t_2)$ és $A_l(t_2, t_3)$ függetlenek minden k, l-re

b) $A_k(t_1, t_2)$ csak $t_2 - t_1$-től függjön (homogenitás)

c) $t \to 0$-ra $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{1 - \underset{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ esemény}}}{P_0(t)} - P_1(t)}{\underset{\substack{\downarrow \\ 1 \text{ esemény}}}{P_1(t)}} = 0$ (annak a val.-e, hogy 2 vagy több esemény történik nagyon rövid idő alatt $\to 0$)

Ekkor $P_k(t) = \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t}$

pl. telefonhívások száma adott időtartam alatt

hullócsillagok száma — " —

adott térfogatú tart.-ban hány csillag

tortában mazsolák → 1 szeletben? mazsola

⇒ adott ~~sűrűségű~~ [egy] sűrűségű események → mennyi val. lesznek el ettől a kül. események

2) Folytonos val. változók: (nem ~~csak~~ csak diszkrét)

a) $(\Omega, \mathcal{A}, \overset{\text{val.}}{P})$ $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ $A_x = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$

Ω: alaph. $\mathcal{A}$: események halmaza (elemi eseményhez rendel számot)

$$F(x) = P(\xi < x) = P(A_x)$$

tul.-ok:

i) $F(x)$ monoton növő: $x < y \overset{?}{\Rightarrow} F(x) < F(y)$

$$x < y \Rightarrow A_x \subset A_y$$

$$\Downarrow$$

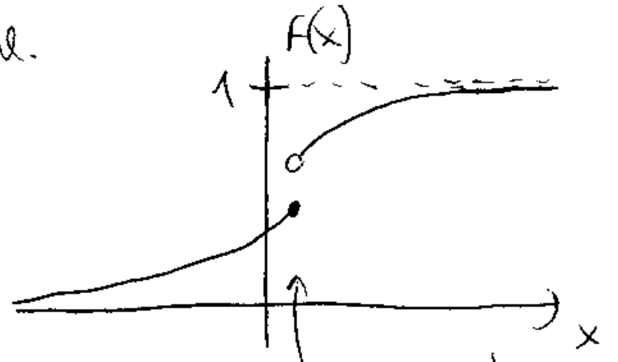
$$F(x) = P(A_x) < P(A_y) = F(y) \checkmark$$

ii) balról folytonos:

$$\lim_{h \to 0^+} F(x-h) = F(x)$$

iii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

pl.

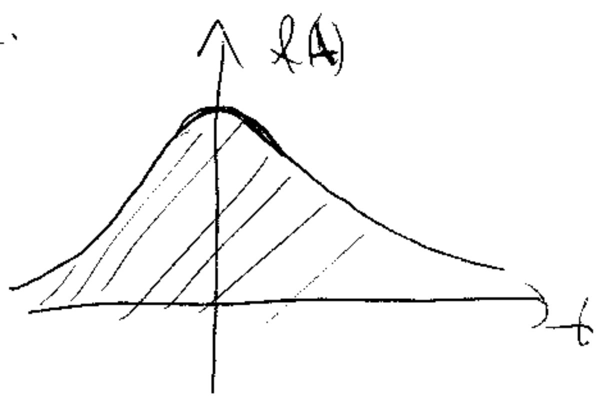


= az eloszlásfv-ből a val. változó ∀ tul.-ra következtethetünk!

b) Sűrűségfv.: Ha $F(x)$ eloszlásfv. abszolút folytonos,

- (majdnem minden pontban létezik deriváltja)
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ → $\exists f(t)$, hogy ez teljesül (sűrűségfv.)
- $F(\infty) = \boxed{1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt}$ normált
- $f(t) \geq 0 \quad \forall t \in R$

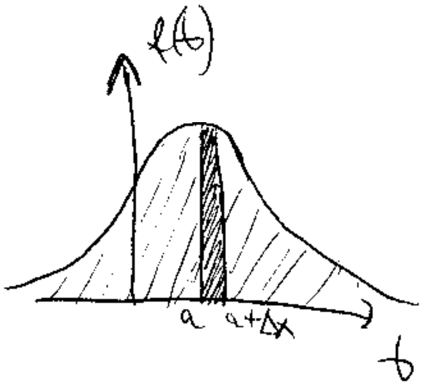
pl.



→ jelentősége:

• $P(a<\xi\le b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)\,dt$

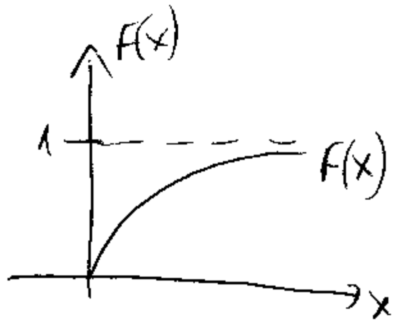
• $P(a<\xi<a+\Delta x)=F(a+\Delta x)-F(a)\approx F'(a)\,\Delta x=f(a)\cdot\Delta x$

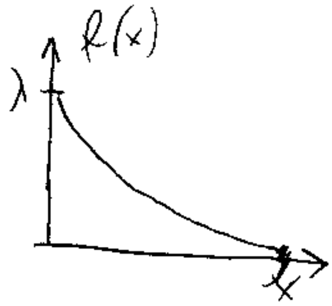


pl. exponenciális eloszlás

$F(x)=1-e^{-\lambda x}$

$f(x)=\lambda\cdot e^{-\lambda x}$ $\quad x>0$





3) További általánosítások val. változókra (több dimenzió)

$\zeta_n=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ $\quad \zeta_n:\Omega\to\mathbb{R}^n$ mérhető

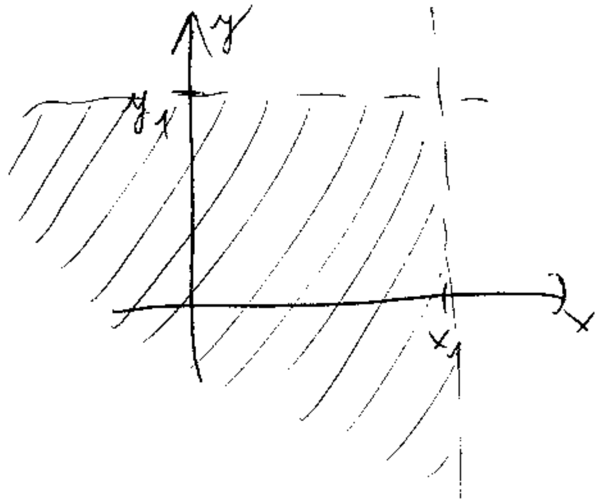
→ eloszlásfv.:

$F_\zeta(x_1,x_2,\dots x_n)=P(\xi_1<x_1,\xi_2<x_2,\dots,\xi_n<x_n)$

pl. $n=2$

$F(x_1,y_1)=P(\xi_1<x_1,\xi_2<y_1)$

↓



tul.-ok:

i) $\forall x_i$-ben monoton nő

ii) $\forall x_i$-ben balról folytonos

iii) $\lim F(x_1, \dots, x_n) = 0$, ha legalább egy $x_i \to -\infty$

iv) $\lim F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ ha $\forall x_i \to +\infty$

v) $\Delta_h^{(k)} F(x_1, x_2, \dots x_n) = F(x_1, \dots x_k + h, \dots x_n) - F(x_1, x_2, \dots x_n)$

$\Delta_h^{(1)} \Delta_h^{(2)} \dots \Delta_h^{(k)} F(x_1 \dots x_n) \geq 0$

~ (sűrűségfv ≥ 0 $\forall$ hol)

→ sűrűségfv.:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int f(x_1, \dots x_n) = 1$$

$$F(x_1, \dots x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1', x_2', \dots x_n') \cdot dx_1' \dots dx_n'$$

$$P(\xi \in B) = \iint_B f(x_1 \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

4) Feltételes eloszlásfv.

B esemény, melyre $P(B) > 0$

$$F(x|B) = P(\xi < x \mid B)$$

$$f(x|B) = F'(x, B)$$

$\Downarrow$

5) függetlenség:

a) Legyen $\xi_1, \dots \xi_n$ val. változó. Ezek függetlenek, ha $\forall\ 2 \le k \le n$-re

$$P(\xi_{i_1} < x_{i_1}, \dots \xi_{i_k} < x_{i_k}) = P(\xi_{i_1} < x_1) \dots P(\xi_{i_k} < x_{i_k})$$

$$F_k(x_{i_1}, \dots x_{i_k}) = \prod_{l=1}^{k} \underbrace{F_1}_{\text{1 vált.}}(x_{i_l})$$ → nem elég ~~az egyesek is~~ páronként szorzatra bomlania

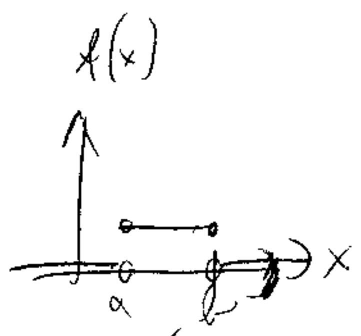
∀ lehetséges összeállításban szorzatra kell bomlania

b) hasonlóan

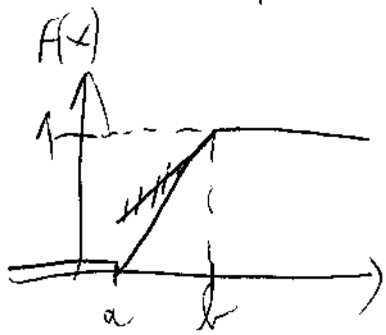
$$\boxed{f(x_1, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)}$$

Pl. ξ egyenletes eloszlású (a,b) intervallumon, ha

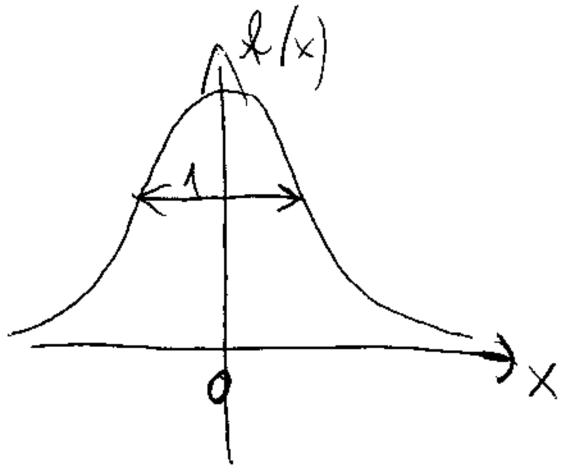
$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b \\ 0, & \text{ha } a > x \text{ vagy } x > b \end{cases}$$



itt nem kell értelmezve lennie.



6) Normális eloszlás:



$$\varphi(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\Phi(x) = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

7) Val. változók transzformálása

Legyen ξ val. változó $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Borel-mérhető)

$\eta = g(\xi)$ is val. változó

$$F_\eta(y) = P(\eta < y) = P(g(\xi) < y) = P(\xi < g^{-1}(y)) =$$

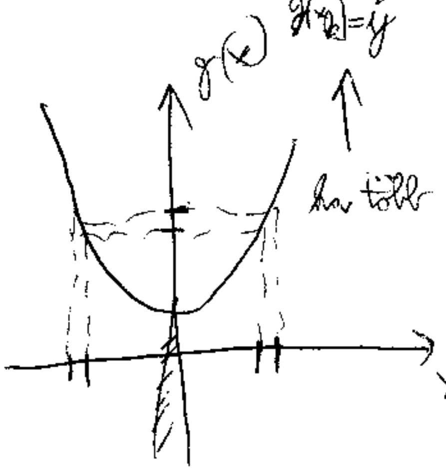
$$= F_\xi(g^{-1}(y))$$

$$P(\eta = y) = \sum_{g(x_k) = y} P(\xi = x_k) \quad \text{diszkrét esetben}$$

$$f_\eta(y) = F_\eta'(y) = \sum_{g(x_k)=y} F_\xi'(g^{-1}(y)) \cdot \frac{1}{|g'(g^{-1}(y))|}$$

kül. mon. miatt

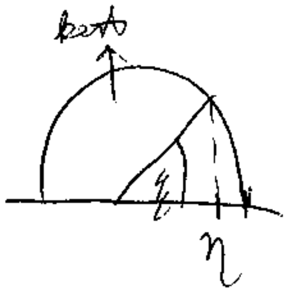
ha több helyen felveszi ugyanazt az értéket



$\eta = g(\xi)$

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y-g(x))\, f_\xi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(g^{-1}(y)-x)}{|f'(f^{-1}(y))|}\, f_\xi(x)\,dx$$

pl.

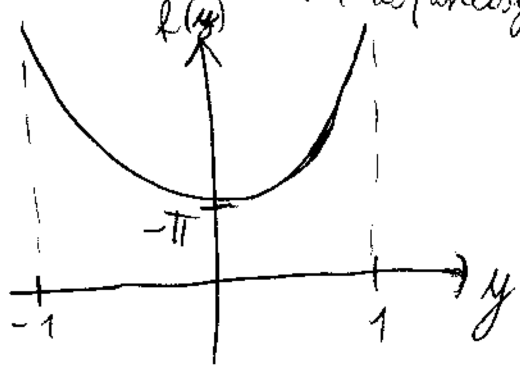


ξ egyenletes $[0,\pi]$ között: $f_\xi(x) = \frac{1}{\pi}$

$g(y) = \cos(y)$ $\quad -1 < y < 1$

$$f_\eta(y) = \frac{1}{|\sin(\arccos(y))|} \cdot f_\xi(\arccos(y)) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos y)}} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{1}{\pi}$$



$y = g(x) \quad x = g^{-1}(y)$

$$\Rightarrow \boxed{f_\eta(y) = \frac{1}{g'(\underbrace{g^{-1}(y)}_{x})} \cdot f_\xi(\overbrace{g^{-1}(y)}^{x})} \Leftarrow$$

$F_\xi(x) = F_\eta(y) \quad / \frac{d}{dy}$

$$\underbrace{\frac{dF_\xi(x)}{dx}}_{f_\xi(g^{-1}(y))} \cdot \frac{dx}{dy} = f_\eta(y)$$

$$\frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))}$$

↓

Integrálásnál a határok változnak!

ha pl. ξ $[a,b]$-n volt értelmezve, η $[g(a), g(b)]$-n!, és $\int_{g(a)}^{g(b)} f_\eta = 1$

5. óra

Feladat

$$P(\eta=k) = A\,\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k=1,2\ldots \qquad A=?$$

megoldás 1.

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} P(\eta=k) = A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = A\left(e^{\lambda}-1\right) \equiv 1$$

$$A = \frac{1}{e^{\lambda}-1}$$

megoldás 2.

ξ, Poisson, $P(\eta=k) = P(\xi=k \mid \xi\neq 0) =$

$$= \frac{\frac{\lambda^k}{k!}\,e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$$

Többváltozós eloszlások

Legyen ξ, η valszín változó

$H(x,y) = P(\xi<x, \eta<y)$ együttes eloszlásfv.

$$F_\xi(x) = P(\xi<x) = P(\xi<x, \underbrace{\eta<\infty}_{\text{biztos esemény}}) = H(x,\infty)$$

$$G_\eta(y) = H(\infty, y).$$

Ez a peremeloszlás.

Ha folytonos a változó, akkor létezik sűrűség fv:

$$H(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} h(u,v)\, du\, dv$$

így

$$F_{\xi}(x) = H(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u,v)\, du\, dv$$

$$f(x) = F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,v)\, dv = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)\, dy$$

megkaptuk az egyik változó sűrűségfv-t az együttes sűrűség fv-ből

$$F(x|y) = P(\xi < x \mid \underbrace{\eta = y}) =$$

ennek valószínűsége mintha 0 lenne, ezért ; def:

$$= \lim_{\Delta y \to 0} P(\xi < x \mid y \le \eta < y + \Delta y) =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{P(\xi < x;\ y \le \eta < y + \Delta y)}{P(y \le \eta < y + \Delta y)} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{H(x, y+\Delta y) - H(x,y)}{G(y+\Delta y) - G(y)} =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y} H(x,y)\right] \Big/ g(y)$$

$$f(x|y) = \frac{\partial}{\partial x} F(x|y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H(x,y) \Big/ g(y) =$$

$$= \frac{h(x,y)}{g(y)}, \quad \text{ha } g(y) \neq 0$$

Tudjuk, hogy

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x|y)\, g(y)\,dy\,;$$ teljes valószínűség tétele.

ebből

$$g(y|x) = \frac{h(x,y)}{f(x)} = \frac{f(x|y)\cdot g(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x|y) g(y) dy},$$

ami a Bayes-tétel folytonos esete.

Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ val. változó, és $\psi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ n változós, mérhető fv, továbbá

$$\eta = \psi(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n)$$

Mi az eloszlás fv? Tfh. létezik sűrűség fv

$$F_\eta(z) = P(\eta < z) = \iint\limits_{\substack{\psi(x_1, x_2, \ldots) < z \\ \text{tartomány}}} h(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$

Ha függetlenek a változóink, akkor:

$$= \iint\limits_{\psi(\ldots) < z} f(x_1) \ldots f(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

példa: ξ_1, ξ_2 val. változók.

$$\eta = \xi_1 + \xi_2$$

ekkor

$$\psi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$F_\eta(z) = \iint\limits_{x+y<z} h(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z-x} h(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z} h(x, y-x)\,dx\,dy$$

így

$$f_\eta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, z-x)\,dx \underset{\substack{\text{függetlenek} \\ \xi_1,\xi_2}}{=} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(z-x)\,dx}_{\text{konvolució}}$$

példa ξ_1, ξ_2 .. két izzó élettartama.

sűrűség fv-k:

$$f_i(x) = \lambda_i e^{-\lambda_i x}, \quad x \geq 0$$

él.

kettő együtt milyen hosszú ideig

$$\eta = \xi_1 + \xi_2$$

a sűrűség fv-ek negatív értékekre 0-t adnak, ezért z a határ:

$$f_\eta(z) = \int_{0}^{+z} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2(z-x)}\,dx$$

Ha $\lambda_1 \neq \lambda_2$, akkor

$$f_\eta(z) = \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \int_{0}^{+z} e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\,dx = \cancel{\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}}$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z}\right)$$

ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, akkor

$$f_\eta(z) = \lambda^2 \, e^{-\lambda z} \int_0^z dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$$

Legyen

$$\psi(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

$$F_2(\eta < z) = \iint_{x \cdot y < z} h(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z/x} h(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z} h\left(x, \frac{y}{x}\right) dx \, \frac{dy}{|x|}$$

$$f(z) = F_\eta'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} h\left(\frac{z}{y}, y\right) \frac{dy}{|y|}$$

(valami el van rontva, gyakon megnézzük)
A két vszínűségi változó között kapcsolat jellemzése a kovariancia.

kovariancia

ξ_1, ξ_2 val. vált.

$$\mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_2) = C(\xi_1, \xi_2) \overset{def}{=} M\Big((\xi_1 - M(\xi_1))(\xi_2 - M(\xi_2))\Big)$$

$$= M(\xi_1 \xi_2) - M(\xi_1) M(\xi_2)$$

Ha ξ_1, ξ_2 független, akkor

$$M(\xi_1 \xi_2) = M(\xi_1) M(\xi_2),$$

tehát

$$\mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$$

Tétel, hogy

$$|Cov(\xi_1, \xi_2)| \leq D(\xi_1) D(\xi_2)$$

Biz., $\lambda \in \mathbb{R}$, η, ξ val. változók

$$M((\eta - \lambda \xi)^2) = M(\eta^2) - 2\lambda M(\xi\eta) + \lambda^2 M(\xi^2) \geq 0$$

ami általánosságban igaz. Ebből, ha λ

$$\lambda = \frac{M(\xi\eta)}{M(\xi^2)},$$

$$M(\eta^2) - 2\frac{M(\xi\eta)^2}{M(\xi^2)} + \frac{M(\xi\eta)^2}{M(\xi^2)} \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$M(\eta^2) M(\xi^2) \geq M(\xi\eta)^2$$

$$|Cov(\xi_1, \xi_2)| = |M(\underbrace{(\xi_1 - M(\xi_1))}_{\xi}(\underbrace{\xi_2 - M(\xi_2))}_{\eta})| \leq$$

$$\leq \sqrt{\underbrace{M(\xi_1 - M(\xi_1))^2}_{D^2(\xi_1)} \underbrace{M((\xi_2 - M((\xi_2))^2)}_{D^2(\xi_2)}} = D(\xi_1) D(\xi_2)$$

ezért célszerű bevezetni a korrelációs együtthatót.

$$R(\xi_1, \xi_2) = \frac{Cov(\xi_1, \xi_2)}{D(\xi_1) D(\xi_2)},$$

ahol látjuk, hogy

$$|R(\xi_1, \xi_2)| \leq 1$$

Lineáris összefüggést méri a kettő között. Nemlineáris összefüggésnél félrevezető az érték.

Tetszőleges $z_1, z_2 \dots z_n$ valós számokra

$$\sum_{ij} c_{ij} z_i z_j \geq 0 \, ;$$

azaz pozitív szemidefinit. Ezekre a speciális mátrixokra:

Igaz, hogy pozitív definit $\underline{\underline{C}} \Leftrightarrow \det \underline{\underline{C}} > 0 \Leftrightarrow$ $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ változók lineárisan függetlenek,

(~~de lehet, hogy ... ekvivalensek~~)

Több dimenzióban 1 számmal jellemezhető a korreláltság, szóródási együttható:

$$\sqrt{\det \underline{\underline{R}}}$$

Megmutatható, hogy

$$\det \underline{\underline{C}} \leq \sigma_1^2 \sigma_2^2 \dots \sigma_n^2 \, ,$$

és

$$\det \underline{\underline{C}} = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \dots \sigma_n^2 \det \underline{\underline{R}} \, ,$$

azaz

$$0 \leq \sqrt{\det R} \leq 1$$

Ha 0, akkor lineárisan nem függetlenek, 1-nél teljesen korrelálatlanok.

Pl. $n = 2$:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\det R} = \sqrt{1 - r^2} \, ,$$

$\det R$ fordítva méri a függőséget mint r.

Tfh, $\xi_2 = a\xi_1 + b$

Ekkor

$$Cov(\xi_1, \xi_2) = M(\xi_1, \xi_2) - M(\xi_1)M(\xi_2) =$$

$$= M(\xi_1(a\xi_1 + b)) - M(\xi_1)(a\, M(\xi_1) + b) =$$

$$= a\, M(\xi_1^2) + b\, M(\xi_1) - a\, M(\xi_1)^2 - b\, M(\xi_1) =$$

$$= a\, D^2(\xi_1)$$

$$D^2(\xi_2) = a^2 D^2(\xi_1) \Rightarrow D(\xi_2) = |a|\, D(\xi_1)$$

amiből

$$R = \frac{a\, D^2(\xi_1)}{|a|\, D(\xi_1) D(\xi_1)} = \pm 1$$

Ha 0, akkor nem korrelálatlan, és ha független, akkor korrelálatlan, fordítva nem biztos.

Leggen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ val. vált, és

$$C_{ij} = Cov(\xi_i, \xi_j)$$

$$r_{ij} = R(\xi_i, \xi_j)$$

ekkor

$$C_{ij} = C_{ji}$$

$$r_{ij} = r_{ji}$$

$$C_{ij} = \sigma_i \sigma_j r_{ij}$$

$$C_{ii} = \sigma_i^2$$

$$r_{ii} = 1$$

Leggen $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{S}}\, \underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{S}}$, ahol $\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{pmatrix}$

Többdimenziós normális eloszlás $(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_m)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}\,\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m}\; e^{-\sum_{i=1}^{m} \frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2}},$$

ha függetlenek.

Nem független esetben

$$f(x_1, x_2 \dots x_m) = \frac{A}{(2\pi)^{m/2}}\; e^{-\frac{1}{2}\sum_{ij} b_{ij}(x_i - m_i)(x_j - m_j)}$$

állítás, hogy

$$A = \sqrt{\det B}$$

bizonyítása: Legyen

$$x_i - m_i = \sum_j \Theta_{ij}\, y_j \quad , \quad \underline{\underline{\Theta}} \text{ ortogonális transzformáció } (\det \underline{\underline{\Theta}} = 1)$$

ekkor

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2 \dots x_m)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_m = 1,$$

mert

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\det B}}{(2\pi)^{m/2}}\, e^{-\frac{1}{2} y^T \underline{\underline{\Theta}}^T \underline{\underline{B}}\, \underline{\underline{\Theta}}\, y}\; \underbrace{|\det \underline{\underline{\Theta}}|}_{1} \cdot dy_1 dy_2 \dots dy_m$$

Ha $\underline{\underline{\Theta}}^{+} \underline{\underline{B}}\, \underline{\underline{\Theta}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m)$, akkor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m}}{(2\pi)^{m/2}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_i \lambda_i y_i^2}\, dy_1 dy_2 \dots dy_m$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\lambda_i}{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\lambda_i y_i^2}\, dy_i}_{1} = \prod_{i=1}^{m} 1 = 1$$

Mi B jelentése?

$$M(\xi_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_i\, f(x_1, \dots x_m)\, dx_1 \dots dx_m = m_i ,$$

$$\mathrm{Cov}(\xi_k, \xi_\ell) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_k - m_k)(x_\ell - m_\ell) f(x_1 \dots x_m)\, dx_1 \dots dx_m =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_k - m_k)(x_\ell - m_\ell) \frac{\sqrt{\det B}}{(2\pi)^{m/2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{ij} b_{ij} (x_i - m_i)(x_j - m_j)}\, dx \dots$$

$$= (-2) \frac{\sqrt{\det B}}{(2\pi)^{m/2}} \frac{\partial}{\partial b_{k\ell}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \sum_{ij} b_{ij} (x_i - m_i)(x_j - m_j)}\, dx}_{\frac{(2\pi)^{m/2}}{\sqrt{\det B}}} =$$

$$= (-2) \sqrt{\det B} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{(\det B)^{3/2}} \frac{\partial}{\partial b_{k\ell}} \det B =$$

$$= \frac{1}{\det B} \frac{\partial}{\partial b_{k\ell}} \sum_{i=1}^{m} \cancel{\det} (-1)^{i+k} b_{ki} \det B^{(ki)} =$$ ← aldetermináns

$$= (-1)^{k+\ell} \frac{\det B^{(k\ell)}}{\det B} = \left(B^{-1}\right)_{k\ell}$$

tehát

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{B}}^{-1}, \qquad \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}^{-1}$$

~~továbbá~~ $$\det B = \frac{1}{\det B^{-1}} = \frac{1}{\det C}$$

$$b_{ij} = \left(C^{-1}\right)_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det C^{ij}}{\det C}$$

Tehát a többdimenziós eloszlás:

$$\frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\frac{1}{\sqrt{\det C}}\, e^{-\frac{1}{2\det C}\sum_{ij}(-1)^{i+j}\det C^{(ij)}(x_i-m_i)(x_j-m_j)}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\det R}}\cdot\frac{1}{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_m}\, e^{-\frac{1}{2\det R}\sum_{ij}(-1)^{i+j}\det R^{(ij)}\frac{(x_i-m_i)}{\sigma_i}\frac{(x_j-m_j)}{\sigma_j}}$$

Speciális esetben, ha $n=2$, akkor

$$R=\begin{pmatrix}1 & r\\ r & 1\end{pmatrix},$$

az eloszlás

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}-2r\frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)}$$

6. óra

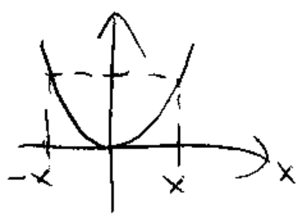
0) példa:

$\eta=\xi^2$, ξ ~~stand~~. norm. eloszlású, $f_\eta=?$

$(m=0,\ \sigma=1)$

Mo.:

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \psi(x)=x^2$$



$$\psi^{-1}(y)=\pm\sqrt{y}$$

$$\psi'(x)=2x$$

$$f_\eta(y)=\sum_{\psi(x)=y}\frac{1}{|\psi'(\psi^{-1}(y))|}f_\xi(\psi^{-1}(y))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2\sqrt{y}}e^{-\frac{y}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2\sqrt{y}}e^{-\frac{y}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\cdot e^{-\frac{y}{2}}$$

több érték is van!

$x=\psi^{-1}(y)$

1) <u>Hibaszámítás</u> $\to$ $D(\eta)$ a hiba

$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ normális eloszlású val. változók

~~$g(x_1, x_2, \ldots x_n)$ mérhető függvény~~

~~$(\eta = g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n))$~~

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i$$

$$D^2(\eta) = M\left(\left(\eta - M(\eta)\right)^2\right) = M\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i - \sum_{i=1}^{n} a_i M(\xi_i)\right)^2\right) =$$

$$= M\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\xi_i - M(\xi_i)\right)\right)^2\right) = M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\xi_i - M(\xi_i)\right)\right) \cdot\right.$$

$$\left. \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \left(\xi_j - M(\xi_j)\right)\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 M\left(\left(\xi_i - M(\xi_i)\right)^2\right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i \cdot a_j \cdot$$

$$\cdot M\left[\left(\xi_i - M(\xi_i)\right)\left(\xi_j - M(\xi_j)\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D^2(\xi_i) + \sum_{i \neq j} a_i a_j \operatorname{Cov}(\xi_i, \xi_j)$$

Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ függetlenek, akkor:

$$D^2(\eta) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D^2(\xi_i)$$

$$\eta = g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \approx \underbrace{g(0, 0, \dots, 0)}_{\text{konst.}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{x_i=0,\ \xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n \neq i}} \xi_i + \dots$$

ha $\xi_1, \xi_2, \dots$ kicsik

$$D^2(\eta) \simeq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)^2 D^2(\xi_i) \quad \leftarrow D^2(\eta) = \sum_i a_i^2 D^2(\xi_i)$$

$$D(\eta) \simeq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)^2 D^2(\xi_i)} \quad \text{hibaterjedés}$$

a) pl. $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

$$D(\eta) = \underbrace{\sqrt{D^2(\xi_1) + D^2(\xi_2)}}_{\text{stat. becslés}} < \underbrace{D(\xi_1) + D(\xi_2)}_{\text{ált. ezt használjuk}}$$

b) pl. $\varphi(x_1, x_2) = x_1 x_2$

$$D(\eta) = \sqrt{\xi_2^2 D^2(\xi_1) + \xi_1^2 D^2(\xi_2)}$$

$$\frac{D(\eta)}{\eta} = \underbrace{\sqrt{\frac{D^2(\xi_1)}{\xi_1^2} + \frac{D^2(\xi_2)}{\xi_2^2}}}_{\text{stat. hibaterjedés}} < \underbrace{\frac{D(\xi_1)}{\xi_1}}_{\text{relatív hiba}} + \frac{D(\xi_2)}{\xi_2}$$

2) Komplex változók:

ξ_1, ξ_2 való val. változók

$\eta = \xi_1 + i\xi_2$ komplex értékű val. változó

(sima 2D-s változóként kezeljük)

$$M(\eta) = M(\xi_1) + i\, M(\xi_2)$$

$\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n$ ha ezek függetlenek, akkor

$$M\left(\prod_{i=1}^{n} \eta_i\right) = \prod_{i=1}^{n} M(\eta_i)$$ ← komplexekre is igaz

3) Karakterisztikus fv.:

a) Def.: ξ tetsz. val. vált. ← komplex

$$\varphi(t) = M\left(e^{it\xi}\right) \longrightarrow$$ a sűrűségfv. Fourier-transzformáltja

$$|\varphi(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(x)\,dx\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|e^{ixt}|}_{1} f(x)\,dx = 1$$

- $\boxed{|\varphi(t)| \leq 1}$
- $\boxed{\varphi(0) = 1} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

} ezt a 2 feltételt ellenőrizni kell akkor, hogy kimondhassuk miről, hogy kar. fv.

b) Legyen $\eta = a\xi + b$

kost.

$$\boxed{\varphi_\eta(t) = M\left(e^{it(a\xi+b)}\right) = M\left(e^{ibt} \cdot e^{iat\xi}\right) = e^{ibt}\,\varphi_\xi(at)}$$

c) Tétel:

$$\boxed{\varphi(-t) = \varphi^*(t)}$$

biz.: $\varphi(-t) = M\left(e^{-it\xi}\right) = M\left(\left(e^{it\xi}\right)^*\right) = M^*\left(e^{it\xi}\right) = \varphi^*(t)$

$\Downarrow$

d) Ha ξ szimmetrikus az origóra ($\xi = -\xi$), akkor

$\varphi_\xi(t)$ valós és páros fv.

biz.: $\varphi_{-\xi}(t) \overset{\text{páros}}{=} \varphi_\xi(t)$

$\quad\;\; \| \qquad\qquad \| \Rightarrow$ valós

$\varphi_\xi(-t) = \varphi_\xi^*(t)$

e) Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ teljesen független val. változók

$$\boxed{\varphi_{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{\xi_i}(t)}$$

$\|$

$$M\left(e^{it(\xi_1+\xi_2+\xi_3+\dots\xi_n)}\right) = M\left(\prod_{i=1}^{n} e^{it\xi_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} M\left(e^{it\xi_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{\xi_i}(t)$$

f) Tétel:

t szerinti derivált

$$\boxed{M(\xi^k) = M_k = \varphi^{(k)}(0) \cdot \frac{1}{i^k}}$$

k. momentum

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot 1 \cdot f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx \qquad \varphi^{(k)}(t=0) = i^k \cdot M_k$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(x)\,dx \to \varphi^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k \cdot e^{ixt} f(x)\,dx$$

g) Pl.: Normális eloszlás kar. fv.-e

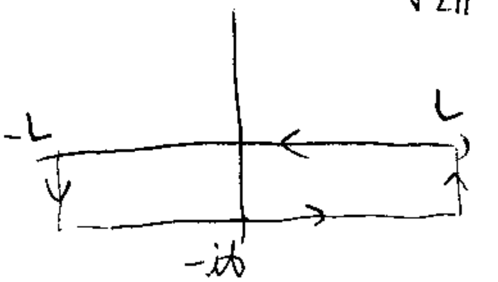
- ξ standard norm.

$$\underline{\underline{\varphi(t)}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dx =$$

$z := x - it$

$dz = dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \underbrace{\int_L e^{-\frac{z^2}{2}} dz}_{\sqrt{2\pi}} = \underline{\underline{e^{-\frac{t^2}{2}}}}$$



ha $L \to \infty$ $\int_{\uparrow}, \int_{\downarrow} \to 0$ lesz

$\Downarrow$

$$\int_{-it \rightarrow} = -\int_{\leftarrow 0}$$

- η normális

$\eta = \sigma \xi + m$ (σ: szórás, m: várh. érték)

$$\boxed{\varphi_\eta(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}}$$

- η_1, η_2 független norm. el. val. vált.

szórás$^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ ✓

$\downarrow$

$$\varphi_{\eta_1+\eta_2}(t) = e^{im_1 t - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} e^{im_2 t - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} = e^{i(m_1+m_2)t - \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}}$$

$\uparrow$

$\Rightarrow$ az összeg is normális eloszlású

várható érték: $m_1 + m_2$ ✓

h) Pl.: Exponenciális eloszlás:

$$f_\xi(x)=\lambda\cdot e^{-\lambda x},\ x\geq 0$$

$$\underline{\underline{\varphi(t)}}=\int_0^\infty e^{ixt}\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda-it)x}\,dx=\frac{\lambda}{\lambda-it}\left[-e^{-(\lambda-it)}\right]_0^\infty=$$

$$=\underline{\underline{\frac{\lambda}{\lambda-it}}}$$

(n db függ. len vált. $\to \varphi_{\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_n}(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^n$

i) Egyenletes eloszlás $(-A, A)$ között

$$\varphi(t)=\int_{-A}^{A}\underbrace{\frac{1}{2A}}_{f(x)}e^{ixt}\,dx=\frac{\sin At}{2A}$$

Érdemes sokszor kiszámolni változók kar. fv.-ét, és az együttes eloszlás kar. fv-ét ebből megkapni, majd visszaszámolni az eredeti eloszlást (inverz Fourier)

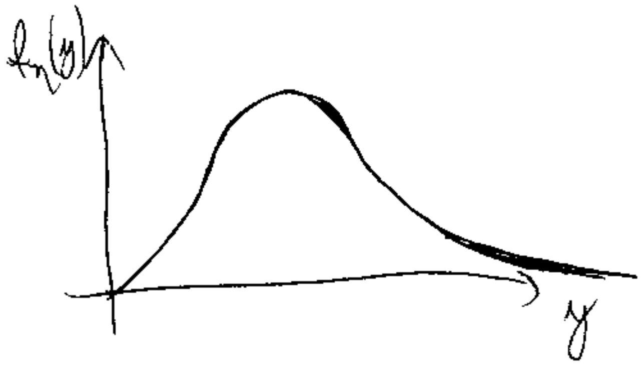
4) Normális eloszlásból származtatott eloszlások:

a) Lognormális, ha $\log(\eta)$ normális

$$\Psi(x)=e^x \quad \eta=e^\xi$$

$$\Psi^{-1}(y)=\log y$$

$$f_\eta(y)=\frac{1}{|\Psi'(\Psi^{-1}(y))|}f_\xi\left(\Psi^{-1}(y)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\,y}\cdot e^{-\frac{(\log y-m)^2}{2\sigma^2}}$$



$y > 0$

χ^2-eloszlás:

b) $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ standard normális eloszl., függetlenek,

$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$ n szabadsági fokú χ^2-eloszlás

pl. gáz kinetikus energiája: χ^2, $n=3$ sz. fokkal, mert v_x, v_y, v_z függetlenek, st. normális eloszl.-úak

$$\chi_1^2 = \xi_1^2 \qquad f_{\chi_1^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} \qquad y > 0$$

l. óra eleje

$$f_{\chi_2^2}(x) = \int_0^x f_{\chi_1^2}(y) f_{\chi_1^2}(x-y)\, dy$$

ezt bonyolult lenne kiszámolni

kar. fv. !!!:

$$\varphi_{\chi_1^2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2} dx = \qquad \begin{array}{l} x = u^2 \\ dx = 2u\,du \end{array}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2} - it\right) u^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\cancel{u}} 2\cancel{u}\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{2} - it\right) u^2} du$$

u-ban szimm.

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2} - it\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi}\cdot 2\left(\frac{1}{2}-it\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1-2it}}$$

$$\underline{\underline{\varphi_{\chi_n^2}(t)}} = \varphi^n_{\chi_1^2}(t) = \frac{1}{\underline{\underline{(1-2it)}}^{n/2}}$$

↓ vissza kell még transzf.-ni, hogy megkapjuk a sűrűségfv.-t.

$$f_{\chi_1^2}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$f_{\chi_n^2}(x) \sim x^{\beta} e^{-\frac{x}{2}}$$

↓ Ilyen alakban keressük a sűr. fv.-t

$$I(\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{\beta} e^{ixt-\frac{x}{2}}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{\beta} e^{-\left(\frac{1}{2}-it\right)x}\, dx =$$

$$u = \left(\frac{1}{2}-it\right)x$$

$$du = \left(\frac{1}{2}-it\right)dx$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-it\right)^{\beta+1}} \underbrace{\int_0^{+\infty} u^{\beta} e^{-u}\, du}_{\Gamma(\beta+1)} =$$

mj.:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u}\, du$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\left(\frac{1}{2}-it\right)^{\beta+1}} = \varphi_{\chi_n^2}(t) \rightarrow \beta+1 = \frac{n}{2}$$

$$f_{\chi_n^2}(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{n/2}}\, x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

χ²-eloszlás várható értéke és szórása:

$$D^2(\xi_1) = M(\xi_1^2) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{M(\chi_n^2) = n} \qquad \varphi_{\chi_n^2}(t) = \frac{1}{(1-2it)^{n/2}}$$

$$\cancel{\varphi''_{\chi_n}(t)}$$

$$M(\chi_n^4) = \frac{1}{i^2}\,\varphi''_{\chi_n^2}(0) = -1\cdot 2i\cdot\left(-\frac{n}{2}\right)\cdot 2i\left(-\frac{n}{2}-1\right) = n(n+2) = n^2+2n$$

$M((\chi_n^2)^2)$

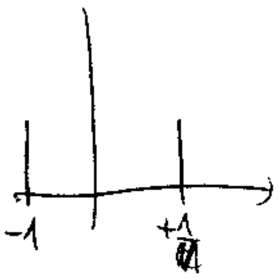
$$\boxed{D^2(\chi_n^2) = 2n}$$

7. óra

0) ξ val. vált. $P(\xi=+1) = P(\xi=-1) = \frac{1}{2}$

$$\varphi_\xi(t) = ?$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\delta(x-1) + \frac{1}{2}\delta(x+1)$$



$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ixt}\, dx =$$

$$= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos t$$

$$G(z) = \sum_k z^k P(\xi = k) = \frac{z + z^{-1}}{2} \quad \text{(generátorfv.)}$$

$$\varphi_\xi(t) = G(e^{it})$$

$$\varphi_{\xi}(t) = \sum_{k} e^{itk} P(\xi = k) \rightarrow$$ diszkrét esetre is (~~igaz~~) érvényes a kar. fv.

1) ZH feladatok javítása

1. csoport : I   2. csoport : II

I/1.) def: $A \circ B = \overline{A}B + A\overline{B}$

$$\underline{\underline{(A+\overline{B}) \circ (\overline{A}+B)}} \underset{\text{def. ből}}{=} \overline{A+\overline{B}}\,(\overline{A}+B) + (A+\overline{B})\cdot\overline{(\overline{A}+B)} \overset{\text{de Morgan}}{=}$$

$$= \overline{A}\cdot\overline{\overline{B}}\,(\overline{A}+B) + (A+\overline{B})(\overline{\overline{A}}\,\overline{B}) \overset{\text{distr., asszoc., kommut.}}{=} \overline{A}B\overline{A} + \overline{A}BB + AA\overline{B} + \overline{B}A\overline{B} =$$

$$= \underbrace{\overline{A}B + \overline{A}B}_{\overline{A}B} + \underbrace{A\overline{B} + A\overline{B}}_{A\overline{B}} = \underline{\underline{A \circ B}}$$

II/1) $A \diamond B = AB + \overline{A}\,\overline{B}$

- $A \diamond B \overset{?}{=} B \diamond A$ (kommutatív)

$$\underline{\underline{AB + \overline{A}\,\overline{B} \overset{?}{=} BA + \overline{B}\,\overline{A} = AB + \overline{A}\,\overline{B}}} \checkmark$$

- $(A \diamond B) \diamond C \overset{?}{=} A \diamond (B \diamond C)$

b.o.: $(AB + \overline{A}\,\overline{B}) \diamond C = \cancel{}(AB + \overline{A}\,\overline{B})\cdot C + \overline{(AB + \overline{A}\,\overline{B})}\cdot\overline{C} =$

$$= ABC + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{AB}\cdot\overline{\overline{A}\,\overline{B}}\cdot\overline{C} = ABC + \overline{A}\,\overline{B}C + (\overline{A}+\overline{B})(A+B)\overline{C} =$$

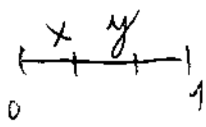
$$= ABC + \overset{\overline{A}\cdot\overline{B}}{\cancel{}}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{B}A\overline{C} = A\,(BC + \overline{B}\,\overline{C}) + \overline{A}\,(\overline{B}C + B\overline{C}) =$$

$$\overline{B}C + B\overline{C} \;\|\; \overline{BC + \overline{B}\,\overline{C}} = \overline{BC}\cdot\overline{\overline{B}\,\overline{C}} = (\overline{B}+\overline{C})\cdot(B+C)$$

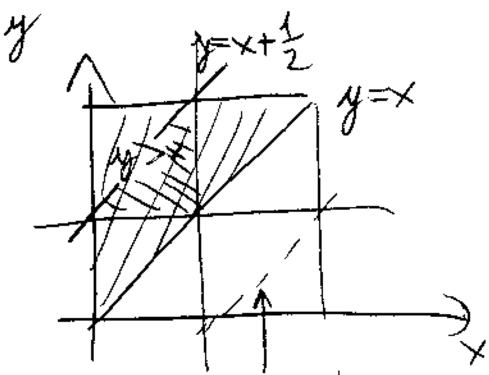
$$= A(BC+\overline{B}\overline{C}) + \overline{A}\,\overline{(BC+\overline{B}\overline{C})} = A \square (B \square C) \quad \checkmark$$

$\shortparallel$ j.o

I/2)



$\boxed{x<y}$



- $x < \frac{1}{2}$
- $1-y < 1/2 \rightarrow 1/2 < y$
- $y - x < 1/2 \rightarrow y < 1/2 + x$

ha nem tesszük fel, hogy $x<y$

$$\underline{\underline{P(A)}} = \frac{1/8}{1/2} = \underline{\underline{1/4}}$$

↑ alaphalmaz!

I/3) A: kiki
B: sírnak

$$P(A) = P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$$

$$P(B|A) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{25}{10000} = \frac{1}{400}$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{\underbrace{P(B|A)\cdot P(A)}_{P(BA)} + \underbrace{P(B|\overline{A})P(\overline{A})}_{P(B\overline{A})}} = \frac{20}{21} \approx \underline{\underline{95\%}}$$

I/4) $P(\xi_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

↓ k fiú a ker. előtt

η_i: a kezelés utáni férgek száma

ha k db féreg volt kezelés előtt

$$P(\eta_i=l \mid \xi_i=k)=\binom{k}{l}(1-p)^l p^{k-l} \qquad k\ge l$$

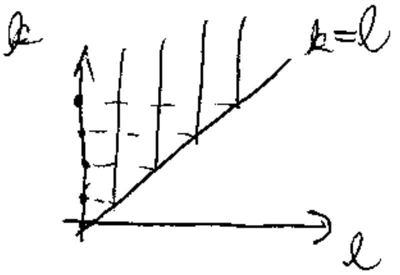
$$P(\eta_i=l)=\sum_{k=l}^{\infty}\underbrace{P(\eta_i=l\mid\xi_i=k)}_{\text{binom.}}\;\underbrace{P(\xi_i=k)}_{\text{Poisson}}$$

ha $k<l$, akkor 0

ezt így nagyon hosszú lenne kiszámolni

ötlet: generátorfv. !!!

$$G_{\eta_i}(z)=\sum_{l=0}^{\infty} P(\eta_i=l)z^l=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty} P(\eta_i=l\mid\xi_i=k)P(\xi_i=k)z^l=$$



→ meg lehet cserélni a Σ-t

$$=\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}}_{\text{ez ugyanazt adja, mint az előző}}\binom{k}{l}\cdot(1-p)^l\cdot p^{k-l}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}\cdot z^l=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(1-p)^l z^l\cdot p^{k-l}}_{(z(1-p)+p)^k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda(z(1-p)+p))^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{\lambda(z(1-p)+p-1)}=e^{\lambda(1-p)(z-1)}$$

Poisson-eloszlás! $\lambda(1-p)$ várható értékkel összes gyüm. ben

$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_m$ ez is Poisson, $\lambda m(1-p)$ várható értékkel

$$G_\eta(z) = \left[G_{\eta_i}(z)\right]^m = e^{\boxed{\lambda m (1-p)}(z-1)}$$

$$E[\eta] = \lambda m(1-p)$$

$$D[\eta] = \sqrt{\lambda m (1-p)}$$

$$P(\eta_i = 0) = G_{\eta_i}(0) = \boxed{e^{-\lambda(1-p)}}$$ kezelés után nem férges 1 ~~alma~~ gyümölcs, ha m gyümölcsünk van

$$P(\nu_m = k) = \binom{m}{k} e^{-\lambda(1-p)k}\left(1-e^{-\lambda(1-p)}\right)^{m-k}$$

m gyümölcsből ν_m nem férges)

$$E[\nu_m] = m e^{-\lambda(1-p)} \qquad \leftarrow E = n \cdot p$$

$$D[\nu_m] = \sqrt{m e^{-\lambda(1-p)} \cdot \left(1-e^{-\lambda(1-p)}\right)} \qquad D = \sqrt{npq}, \; q = 1-p$$

I/5) $$f_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \dots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = 1 \qquad \alpha = \frac{1}{2\sigma^2} \qquad \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$f_{X_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \qquad \leftarrow \text{szimm. } x, y\text{-ban}$$

$$E[x_1]=0=E[x_2]$$

$$D[x_1]=1=D[x_2]$$

korrelációs eh.:

$$R(x_1,x_2)=\frac{E[x_1,x_2]-\overset{0}{E[x_1]}\,\overset{0}{E[x_2]}}{\underset{1}{D[x_1]}\,\underset{1}{D[x_2]}}=E[x_1,x_2]$$

$$\underline{\underline{E[x_1,x_2]}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\;h(x,y)\,dx\,dy=\underline{\underline{0}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x\,e^{-\alpha x^2}dx=0$$

II/2: $P(\nu=n)=\frac{c}{n!}$

urnában ν kül. golyó

$P(\nu=n)$ fordítottan arányos a golyók ismétlés nélküli húzásának lehetséges számával $(\to n!)$

· normálás

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c}{n!}=c\cdot e^1=1 \qquad c=e^{-1}$$

$$G(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c}{n!}z^n=c\,e^z=e^{z-1}$$

$$M(\nu)=G'(1)=e^{z-1}\Big|_{z=1}=1$$

II/3:

A: Mikulás a jó fiókot húzta (amiben az útlevél van)

B: –||– megtalálja az útlevelét

$$P(A)=\frac{1}{n} \leftarrow n \text{ fiók van} \qquad P(B|A)=p \rightarrow P(\bar{B}|A)=1-p$$

$$P(\bar{A})=1-\frac{1}{n} \qquad P(B|\bar{A})=0 \rightarrow P(\bar{B}|\bar{A})=1$$

$$\underline{P(\bar{A}|\bar{B})}=\frac{P(\bar{B}|\bar{A})\,P(\bar{A})}{P(\bar{B}|A)P(A)+P(\bar{B}|\bar{A})P(\bar{A})}=\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)}{(1-p)\cdot\frac{1}{n}+1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)}=$$

Mi a val., hogy először nem jó fiókot húzta, ha nem találta meg ott

$$=\frac{n-1}{\cancel{1}-p+n-\cancel{1}}=\underline{\underline{\frac{n-1}{n-p}}}$$

(értelmezés: minél nagyobb val.-el találja (p) meg a jó fiókban az útlevelét, annál kisebb a val.-e, hogy nem találja meg a jó fiókban → annál nagyobb a val.-e, hogy ha nem találja meg, nincs is ott)

II/4) 2^n cédula 1 dobozban, $\binom{n}{k}$ cédulára k szám van felírva $(k=0,1,\dots n)$. Kiveszünk vissz. nélkül m-et, jelölje az ezeken lévő számok összegét ξ. → $E(\xi)=?$

$\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m$

$\xi=\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_m$

$$E[\xi]=E\left[\sum_{i=1}^{m}\xi_i\right]=\sum_{i=1}^{m}E(\xi_i)=m\cdot E(\xi_1)$$

$$E(\xi_1)=\sum_{k=1}^{n}kP(\xi_i=k)=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=$$

$$= \frac{n}{2^n}\sum_{k=1} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} = \frac{n}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{2^n}\cdot 2^{n-1} = \frac{n}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{E[\xi_2] = \frac{n\cdot m}{2}}}$$

5) $h(x_1, x_2) = C(x_1^2 + x_1 x_2)$ $\quad 0 \le x_1, x_2 \le 1$ $\quad$ C normálófaktor

$$\int_0^1\int_0^1 h(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = 1 = C\left[\int_0^1 x_1^2\,dx_1 \int_0^1 dx_2 + \int_0^1 x_1\,dx_1 \int_0^1 x_2\,dx_2\right] =$$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

$$= C\cdot\left\{\left(\frac{x_1^3}{3}\right)_0^1 \left(x_2\right)_0^1 + \left(\frac{x_1^2}{2}\right)_0^1 \left[\frac{x_2^2}{2}\right]_0^1\right\} = \left\{\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right\} C = \frac{7}{12}\cdot C = 1$$

$$\underline{\underline{C = \frac{12}{7}}}$$

$$f_{x_i}(x) = \int_0^1 h(x_1,x_2)\,dx_2 = C\left(x_1^2\cdot\left[x_2\right]_0^1 + x_1\left[\frac{x_2^2}{2}\right]_0^1\right) =$$

$$= \frac{12}{7}\left(x_1^2 + \frac{x_1}{2}\right)$$

korr. elő.:

$M(x_1) = \frac{5}{7}$ $\qquad$ $M(x_1 x_2) = \frac{17}{42}$ $\qquad$ $D^2(x_1) = \frac{23}{490}$

$M(x_2) = \frac{4}{7}$ $\qquad$ $D^2(x_2) = \frac{23}{2904}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{R(x_1,x_2)}} = -\frac{1}{23}\sqrt{\frac{5}{3}} \approx \underline{\underline{-5{,}5\cdot 10^{-2}}}$$

8. óra

0) Beadandó javítása: függetlenek!, azonos eloszlás

- ξ_k val. változók kar. fv-e: $\varphi_{\xi_k}(t)=\varphi(t)$ $\forall k$-ra $(k=1,2,\dots,n)$
- $\xi=\frac{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n}{n}$

$$\varphi_{\xi}(t)=M\left(e^{i\xi t}\right)=M\left(e^{i\frac{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n}{n}t}\right)=M\left(e^{i\xi_1\frac{t}{n}}\right)\cdot M\left(e^{i\xi_2\frac{t}{n}}\right)\dots$$

$$\dots M\left(e^{i\xi_n\frac{t}{n}}\right)=\left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

1) Normálisból származtatott eloszlások (folyt.)

Student-eloszlás:

Legyenek $\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n$ és η független st. norm. eloszl. változók, és

$$\tau:=\frac{\sqrt{n}\cdot\eta}{\underbrace{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\dots\xi_n^2}}_{\chi}}$$

$$f_\eta(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$g_\chi(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{n}{2}-1}}x^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x\geq 0$$

(l. előző előtti előadás)

$$f_\tau(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\delta\left(t-\frac{\sqrt{n}\,y}{x}\right)f_\eta(y)\,g_\chi(x)\,dx\,dy=$$

$x\geq 0$ miatt

$$=\int_0^\infty\frac{x}{\sqrt{n}}f\left(\frac{tx}{\sqrt{n}}\right)\cdot g(x)\,dx=\circledast$$

$$\left(\delta(f(x)) = \sum_{x_k} \delta\left(f'(x_k)\cdot(x-x_k)\right) = \sum_{x_k} \frac{\delta(x-x_k)}{|f'(x_k)|} \right.$$

$$\left. f(x_k)=0 \quad (x_k\text{-k zérushelyek}) \right)$$

$\Downarrow$

$$(*) = \int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2x^2}{2n}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}-1}} x^{n-1} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

új vált.: $u = \left(\frac{t^2}{n}+1\right)\frac{x^2}{2}$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}-1}} x^n e^{-\left(\frac{t^2}{n}+1\right)\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$x = \sqrt{\frac{2u}{\frac{t^2}{n}+1}}$$

$$dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{u\left(\frac{t^2}{n}+1\right)}}\, du$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\cancel{2^{\frac{n}{2}-1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cancel{2}\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{(\cancel{2}u)^{n/2}}{\left(\frac{t^2}{n}+1\right)^{n/2}} e^{-u} \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}\sqrt{u}\sqrt{\frac{t^2}{n}+1}} du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{t^2}{n}+1\right)^{\frac{n+1}{2}}} \underbrace{\int_0^\infty u^{\frac{n-1}{2}} \cdot e^{-u} du}_{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot n}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{t^2}{n}+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$ Student-eloszlás, n szab. fokú (t-eloszlás)

Hol használható?

pl. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ véletlen változók st. norm. eloszlásúak.

$$\overline{\xi} = \frac{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n}{n} \qquad \boxed{t = \frac{\sqrt{n}\,\overline{\xi}}{s}} \rightarrow$$ beláthato, hogy $n-1$ szab. fokú ~~Stu~~ Student-eloszlás

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2$$

ξ és ζ nem függetlenek!

$n=1$ esetén spec.-an:

$s_1(t)=\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{t^2+1}$ <u>Cauchy-eloszlás</u> $\to$ nincs várható értéke

$\varphi(t)=e^{-|t|}$ kar. fv. $\to$ nincs deriváltja $t=0$ helyen

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|t|\cdot s(t)\,dt \sim \int_{\infty}^{+\infty}\frac{|t|}{t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t}\,dt \sim \log t \quad \text{(divergál)}$$

2) <u>Véletlen változók sorozatának konvergenciája</u>

a) pl. lufi  Miért jellemezhetjük a nyomást 1 számmal?

Pénzfeldobás: azt mondtuk, a várható érték <u>nem konvergál</u> $\frac{1}{2}$-hez, mert elvileg bármikor bejöhet pl. egy 100-as csak fej sorozat. DE ennek kicsi a val.-e.

$\boxed{\text{Def}}$ Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ val. változók és $\lambda>0$ tetszőleges. ξ a sorozat <u>sztochasztikusan konvergál</u> 0-hoz, ha

$$\lim_{n\to\infty} P(|\xi_n|>\lambda)=0$$

$\Updownarrow$

Tetszőleges $\lambda>0$, $\delta>0$-hoz $\exists\, N\in\mathbb{N}$, hogy ha $n>N$, akkor $P(|\xi_N|>\lambda)<\delta$

(Annak a val.-e, hogy a sorozat elmegy λ -tól, egyre kisebb.)

~~$\xi_1, \xi_2, \dots$ sor~~
~~$\lim_{n\to\infty} P$~~

Def $\xi_1, \xi_2, \dots$ <u>sztochasztikusan konvergál</u> μ-hez, ha:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P\left(|\xi_n - \mu| > \lambda\right) = 0}, \text{ ahol } \lambda > 0$$

b) <u>Markov-egyenlőtlenség</u>

ξ tetsz. $\oplus$ (pozitív) val. változó, aminek $\exists$ $M(\xi)$ várható értéke, akkor $P(\xi > \lambda) < \frac{M(\xi)}{\lambda}$

$$\underline{\underline{M(\xi)}} = \int_0^\infty x f(x)\,dx \geq \int_\lambda^\infty x f(x)\,dx \geq \int_\lambda^\infty \lambda \cdot f(x)\,dx = \underline{\underline{\lambda P(\xi > \lambda)}}$$

(mert x és $f(x)$ is $\oplus$)

c) <u>Csebisev-tétel:</u>

Legyen ξ tetsz. val. változó, aminek $\exists$ $M(\xi)$, $D(\xi)$. Ekkor:

$$P(|\xi - M(\xi)| > \lambda) < \frac{D^2(\xi)}{\lambda^2} \qquad \lambda > 0 \text{ tetsz.}$$

Biz.: Csebisev-egyenlőtlenség

$\eta = (\xi - M(\xi))^2 \to$ pozitív $\to$ Markov-egy.:

$$\underline{\underline{P(|\xi - M(\xi)| > \lambda)}} = P\left((\xi - M(\xi))^2 > \lambda^2\right) = P(\eta > \lambda^2) \leq \frac{M(\eta)}{\lambda^2} = \underline{\underline{\frac{D^2(\xi)}{\lambda^2}}}$$

$\Rightarrow$ Ha $f(x)$ monoton növő folytonos fv. $x>0$-ra, és $f(x)>0$

$$P\left(|\xi-M(\xi)|>\lambda\right)<\frac{M\left(f(|\xi-M(\xi)|)\right)}{f(\lambda)}$$

$$\parallel$$

$$P\left(f(|\xi-M(\xi)|)>f(\lambda)\right)$$

$\Rightarrow$ $f(x)=e^{\lambda(x-M(\xi))}$ $\quad M(\lambda):=M\left(e^{\lambda(\xi-M(\xi))}\right)$

$$P\left(e^{\lambda(\xi-M(\xi))}>M(\lambda)e^{t}\right)<e^{-t}$$

$$P\left(\xi>M(\xi)+\frac{t+\log M(\lambda)}{\lambda}\right)<e^{-t}$$

d) Bernoulli-tétel:

Legyen ξ_n egy A esemény bekövetkezésének relatív gyakorisága, $p=P(A)$. Ekkor ξ_n sztochasztikusan konvergál p-hez.

jelölés: $\lim_{n\to\infty} st\, \xi_n = p$ $\quad \xi_n \Rightarrow p$

$\nu_n = n\xi_n$ Binomiális eloszlást követ $\quad M(\nu_n)=n\cdot p$

(hányszor köv. be az A esemény) $\quad D(\nu_n)=\sqrt{n\cdot p\cdot q}$

$$\cancel{P\left(|\xi_n-p|>\lambda\right)=}$$

$$\cancel{P\left(|\nu_n-\underbrace{n\cdot p}_{M(\nu_n)}|>\lambda\right)<}$$

Kiegészítés: Csebisev-tétel:

$$P\left(|\xi - M(\xi)| > \lambda\right) < \frac{D^2(\xi)}{\lambda^2}$$

$$P\left(|\xi - M(\xi)| > \lambda D(\xi)\right) < \frac{1}{\lambda^2} \qquad (**)$$

Most:

$$P\left(|\nu_n - np| > \lambda\sqrt{npq}\right) = P\left(|\zeta_n - p| > \underbrace{\lambda\sqrt{\frac{pq}{n}}}_{\varepsilon}\right) < \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\varepsilon := \lambda\sqrt{\frac{pq}{n}}$$

$$P\left(|\zeta_n - p| > \varepsilon\right) < \frac{pq}{\varepsilon^2 \cdot n}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\zeta_n - p| > \varepsilon\right) = 0$$

<u>A relatív gyakoriság sztochasztikusan tart a valószínűséghez !!!</u>

(Matematikailag nem ez alapján definiáltuk a valószínűséget, de a megfelelő lépésekkel eljutottunk oda, hogy a mat.-lag def. valósz. visszaadja a „tapasztalati" valósz.-et.)

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$$

ξ_k a k-ik kísérletben az A esemény <u>indikátora</u>

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{ha } A \text{ bekövetkezett} \\ 0, & \text{ha } A \text{ nem köv. be} \end{cases}$$

e) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n \dots$ független, azonos eloszlású val. változók, amire létezik $M = M(\xi_k)$, $D = D(\xi_k)$.

$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}$ jelöléssel.

$\lim_{n \to \infty} \zeta_n = M$ **nagy számok törvénye** (biz. (**) alapján)

! Nem csak a gyakoriság tart (szt.-an) a val.-hez, hanem általában az átlag ~~tart~~ (szt.-an) a várható értékhez.

$\Rightarrow P(|\zeta_n - M| > \lambda) < \frac{D^2(\xi)}{n \lambda^2}$

$M(\zeta_n) = M$

$D(\zeta_n) = \frac{D(\xi)}{\sqrt{n}}$

f) ~~To~~vábbi áll.-ok:

- Általában: $\xi_1, \xi_2, \dots$ azonos eloszlású, független val. változók és $\exists\, M = M(\xi_k)$, akkor

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots \xi_n}{n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \zeta_n = M \quad \text{(Nem kell szórás.)}$$

- Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ független val. változók, amikre $M_k = M(\xi_k)$, $D_k = D(\xi_k)$. Ha:

$$M = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} M_k < +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} D^2(\xi_k)} = 0$$

akkor $\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{sztoch.-an tart}} M$

- Mikor nem igaz a nagy számok törvénye?

ξ_k $k=1,2,\ldots$ Cauchy eloszlásúak

$$\eta_n=\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n}=\text{konst.}\ \varphi_{\eta_n}=\left[\varphi_{\xi_n}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n=e^{-\left|\frac{t}{n}\right|\cdot n}=e^{-|t|}$$

ρ konst. val. változó:

$$\varphi_\rho(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-c)\,e^{ixt}\,dx=e^{ict}$$

$f(x-m)$ → ilyenkor nem tudunk jobb becslést adni m-re 1 mérésből, mint többől, ha Cauchy-eloszlásunk van.

γ) Majdnem biztos konvergencia (1 valószínűséggel való konv.):

- $\boxed{\text{Def}}$ Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ val. változók

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\xi_n=0\right)=1 \qquad \omega\in\Omega \text{ események}$$

- $\boxed{\text{Tétel}}$ Majdnem biztos konvergenciából következik a stoch. konvergencia (de fordítva nem!).
- Különbség a stoch. és majdnem biztos konverg. között:

$\xi_1, \xi_2, \ldots$, tetszőleges $\varepsilon>0$, $\delta>0$

→ ~~s~~ stoch. konv. $\exists\, N \in \mathbb{N}$ hogy $n > N$ esetén

$|\xi_n - P| < \varepsilon$ valószínűsége nagyobb, mint $1-\delta$

(1 közelében van)

→ 1-vsz.-el való konv.

$$\underbrace{|\xi_{n+k} - P|}_{\substack{\text{nem csak} \\ \text{egyenként,} \\ \text{hanem az összes utána lévő} \\ \text{is tart } P\text{-hez}}} < \varepsilon \quad k = 1, 2, \dots \text{ esetén ennek a vsz-e}$$

nagyobb $1-\delta$-nál

h) <u>Nagy számok erős törvénye</u>

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független azonos eloszlású val. változók, létezik $M = M(\xi_k)$, és $D = D(\xi_k)$ szórás. Ekkor

$\zeta = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots \xi_n}{n}$ <u>1 valószínűséggel</u> konvergál M-hez

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \zeta = M\right) = 1$$

- gyengítések:

→ nem kell, hogy D is $\exists$-en

→ $M_k = M(\xi_k)$, $D_k = D(\xi_k)$, de ezek k-nként eltérőek,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k^2}{k^2} < +\infty, \quad \zeta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - M_k). \text{ Ekkor } P\left(\lim_{n\to\infty} \zeta_n = 0\right) = 1 .$$

óra

0) ~~Pé~~Példa jav.

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ fgtlen val. vált.-k, amikre $E(\xi_n) \neq 0$.
Csebisev-egyenlőtlenség segítségével mutassuk meg, hogy ha
$\lim_{n\to\infty} \frac{D(\xi_n)}{E(\xi_n)} = 0$, akkor $\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{E(\xi_n)} = 1$.

$\varepsilon > 0$ tetsz.:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\xi_n}{E(\xi_n)} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0 \qquad E\left(\frac{\xi_n}{E(\xi_n)}\right) = \frac{1}{E(\xi_n)} E(\xi_n) = 1$$

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{E(\xi_n)} - 1\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{D^2\left(\frac{\xi_n}{E(\xi_n)}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{D^2(\xi_n)}{\varepsilon^2 E(\xi_n)^2} \to 0 \quad n\to\infty$$

1) $$\overline{\xi}_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$$

(átlag)

$$M(\overline{\xi}_n) = M(\xi_k) = M$$

$$D^2(\overline{\xi}_n) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_n\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D^2(\xi_k) = \frac{D^2(\xi_k)}{n}$$

Nem konstanshoz való konvergencia

~~[illegible]~~

1) $D^2(\xi_1 + \xi_2 + \ldots \xi_n) = n^2 D^2(\xi_k)$

$$\varrho_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - n M(\xi_k)}{n D(\xi_k)} \qquad M(\varrho_n) = 0$$

$$D(\varrho_n) = 1$$

$\uparrow$

standardizáció

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ azonos eloszlású val. változók

$M = M(\xi_k)$, $D = D(\xi_k)$

$\rho_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ → összegét vesszük

$$\boxed{\rho_n^* = \frac{\rho_n - M}{\sqrt{n}\,D}}$$ → ~~standardizáció~~

2) Ha A esemény, $p = P(A)$

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{ha } A \text{ bekövetk.} \\ 0, & \text{ha } \overline{A} \text{ köv. be} \end{cases}$$ (A indikátora)

↳ binomiális eloszlást követ

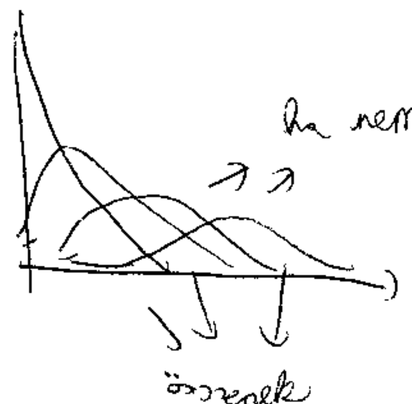
~~(ezt binomiálisra már láttuk)~~

Moivre-Laplace-tétel szerint a binomiálisra

$$\lim_{n \to \infty} P(\rho_n^* < x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

de ez nem csak binomiálisra igaz!

- pl. exponenciális eloszlás



ha nem standardizáljuk, szórás és várható érték nő

- hasonlóan egyenletes eloszlásra

Bizonyítsuk általánosan karakt. fv-ekkel:

$$\varphi(t) = M\left(e^{i(\xi_k - M)t}\right)$$

$$\varphi_n(t) = M\left(e^{i\rho_n^* t}\right) = M\left(e^{i\frac{\rho_n - M}{\sqrt{n}D}t}\right) = \cancel{e^{-\frac{iM}{D}t}} \cdot M\left(e^{i\frac{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n}{\sqrt{n}D}t}\right) =$$

$$= \cancel{e^{-i\frac{M}{\sqrt{n}D}t}} \left[\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}D}\right)\right]^n = \cancel{e^{-i\frac{M}{\sqrt{n}D}t}} =$$

$$= \left[1 + iM(\xi_k - M)\frac{t}{\sqrt{n}D} + \frac{i^2}{2}\frac{D^2(\xi_k)t^2}{nD^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n =$$

$$= \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \to \underbrace{e^{-\frac{t^2}{2}}}_{\text{st. norm. eloszlás kar. fv.}}$$

a kar. fv-ek ~~tartanak~~ a —"— -hez

⇓

az eloszlások is —"— —"— eloszláshoz

↓

Központi határeloszlás ~~tétel~~

3) $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, \dots$ teljesen független val. változók,

$M_k = M(\xi_k)$

$D_k = D(\xi_k)$

$H_k = M(|\xi_k - M_k|^3)$ harmadik momentum

$$S_n = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_n^2}$$

$$K_n = \sqrt[3]{H_1^3 + H_2^3 + \dots + H_n^3}$$

Ha $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{K_n}{S_n} = 0}$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi_n^* < x) = \Phi(x) \rightarrow \text{stand. norm.}$$

nem kell ugyanolyannak lennie a változóknak, csak ennek és a függetlenségnek kell teljesülnie!

$$K_n(\beta) = \left(\sum_{k=1}^{n} M(|\xi_k - M|^{\beta}) \right)^{1/\beta}, \text{ ha } \beta > 2 \text{-re}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_n(\beta)}{S_n} = 0 \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(\xi_n^* < x) = \Phi(x)$$

Pl.: azonos eloszlások

$$S_n = \sqrt{n}\, D \qquad \frac{K_n}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/2}\, D}{n^{1/3}\, H} = \frac{D}{H} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/6}} = 0$$

$$K_n = \sqrt[3]{n}\, H$$

Ez elégséges, de nem szükséges feltétel.

4) Lindeberg-feltétel: legyen $\varepsilon > 0$, ha

$$\lim_{n\to N} \frac{1}{S_n^2} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\int_{|x|>\varepsilon S_n} x^2 f_k(x)\,dx}_{M\left(\xi_k^2 \,\middle|\, |\xi_k| > \varepsilon S_n\right) \cdot P\left(|\xi_k| > \varepsilon S_n\right)} = 0$$

(egyenletesen kicsi $\forall$ tag)

akkor a Lindeberg-feltételből következik a központi határeloszlás ~~tétel~~, tehát:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k - M_k}{D(\xi_k)} < x\right) = \Phi(x) \quad \text{és}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\max_{1\le k\le n} |\xi_k - M_k| > \varepsilon S_n\right) = 0$$

$\boxed{\text{Pl}}$ Előírt pontosságú mintaszám várható értékének becslésére:

Adott $\varepsilon > 0$ és $p_0 > 0$

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n} - M\right| > \varepsilon\right) \le p_0$$ Keressük a legkisebb n-et, amire ez igaz!

- becslés Csebisevvel:

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n} - M\right| > \varepsilon\right) \le \frac{D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right)}{\varepsilon^2} = \frac{D^2}{n\varepsilon^2}$$

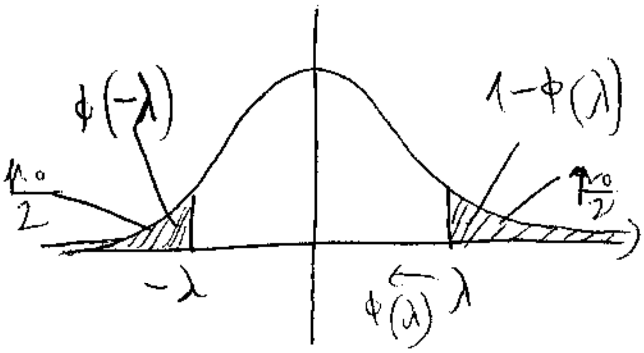
$$\frac{D^2}{n\varepsilon^2} \le p_0 \to \boxed{n \ge \frac{D^2}{p_0 \varepsilon^2}}$$

becslés kp. határel. tétel

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n}{n} - M\right| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - M)}{\sqrt{n}\, D}\right| > \overbrace{\frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{D}}^{\lambda}\right) \le p_0$$

$$P\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - M)}{\sqrt{n}\, D}\right| \ge \lambda\right) \approx 2\Phi(\lambda) - 1 \ge 1 - p_0$$

$$\Phi(\lambda) = 1 - \frac{p_0}{2}$$



$$\frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{D} \ge \lambda \to \boxed{n \ge \frac{\lambda D^2}{\varepsilon^2}}$$

p_0	$\frac{1}{p_0}$	λ
5%	20	1,3859
2,5%	40	1,5849
1%	100	1,8213
0,5%	200	1,9849
0,1%	1000	2,328

↑ nem mind1, melyik becslést alkalmazzuk

. óra

0) Legyenek $\xi_1, \dots \xi_i \dots$ val. változók Cauchy-eloszlásúak.

Igaz-e rájuk a KHT?

⇒ Nem, mert nincs szórása és várható értéke.

1) $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n \dots$ független val. változók azonos eloszlásúak.

$\zeta = \xi_1 + \xi_2 + \dots \xi_n \qquad n \to \infty$

$\zeta_\lambda \quad \lambda > 0$ valós → ~~folytonos~~ számú változónk van

↓

Mi van ilyenkor?

Legyen:

1. $\zeta_0 = 0$
2. $\lambda_2 > \lambda_1$ esetén $\zeta_{\lambda_2} - \zeta_{\lambda_1}$ eloszlása csak $\lambda_2 - \lambda_1$-től függjön
3. $\lambda_1 < \lambda_2 \dots < \lambda_n$, akkor $\zeta_{\lambda_2} - \zeta_{\lambda_1}, \zeta_{\lambda_3} - \zeta_{\lambda_2}, \dots \zeta_{\lambda_n} - \zeta_{\lambda_{n-1}}$ függetlenek

Ekkor tetszőleges $n > 0$ egész számra:

$\eta_k := \zeta_{\frac{k}{n}\lambda} - \zeta_{\frac{k-1}{n}\lambda}$ ⇒ η_k-k függetlenek

Ekkor $\zeta_\lambda = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n$

Def) Korlátlanul osztható eloszlás:

ξ_λ korlátlanul osztható, ha tetszőleges n egész számra

léteznek $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ független azonos eloszlású változók,

hogy $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots \xi_n$

Szemléletesen:

Ha $\varphi(t)$ egy korlátlanul osztható eloszlás kar. fv.-e,

akkor $\varphi_n(t) = \sqrt[n]{\varphi(t)}$ szintén kar. fv. tetsz. n-re!

(mivel ξ összeg alakban írható $\to$ φ szorzat alakban írható)

Pl: a) Normális eloszlás

$$\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$\varphi_n(t) = \sqrt[n]{\varphi(t)} = e^{i\left(\frac{m}{n}\right)t - \frac{\sigma^2 t^2}{2n}}$$

b) Poisson-eloszlás: ξ tetszől. $h > 0$

$$P(\xi = h \cdot k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ihk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^{iht} - 1)}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\varphi_n(t) = e^{\left(\frac{\lambda}{n}\right)(e^{iht} - 1)}$$

$\downarrow$

$\frac{\lambda}{n}$ paraméterű Poisson-eloszlás

(trükkösen csináltunk folytonos változóból diszkrétből) ~~(...)~~

de ez nem jelenti, hogy ξ kol. osztható)

(Az összes többi eloszlás ezek konvolúciójaként fog előállni)

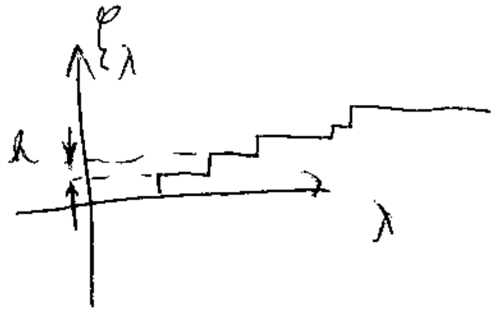
(kol. oszth. + folyt.

$\downarrow$

— " — $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots \xi_n + \ldots$ $\searrow$ ξ_1 is lehet folyt. önmagában

a) ξ_λ  Brown-mozgás modellje (λ az idő)

ξ_λ majdnem mindig folytonos

b) ξ_λ  ilyen ugrásokból is összekeverhetjük a ~~folytonos~~ val. változót korlátlanul oszth.

Tétel | Tetszőleges véges sok korlátlanul osztható ~~véges~~ ξ_k val. változó összege is korlátlanul osztható.

T | Korlátlanul osztható eloszlás kar. f-e sehol sem 0. Legyen $(\lambda, \lambda+d\lambda)$ intervallumon egy ugrás val.-e $c \cdot d\lambda$ az ugrás nagysága $F(u) = P(\sigma < u)$

$$\log \varphi_\lambda(t) = \lambda\Big[\underbrace{i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}_{\text{norm. eo.}} + c\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{itu} - 1\right) dF(u)\Big] \dots$$

Probléma 1:

→ Kis ugrások sűrűsége divergálhat.

⇒ Legyen $M(u)$ negatív ugrások sűrűsége $\sigma < u < 0$

$N(u)$ pozitív — " — $0 < u < \sigma$

$$\log \varphi_\lambda(t) = \lambda\Big[i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + c\int_{-\infty}^{0}(e^{iut}-1)\,dM(u) + c\int_{0}^{\infty}(e^{iut}-1)\cdot dN(u)\Big]$$

- Probléma 2.
  - → kis ugrások várható értéke végtelen $\int_{-\infty}^{0} |u|\, dM(u) = +\infty$

$$\int_{0}^{\infty} u\, dN(u) = +\infty$$

$$\Rightarrow \log \varphi_\lambda(t) = \lambda\Big[i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + c\int_{-\infty}^{0}(e^{iut}-1-iut)\,dM(u) + c\int_{0}^{\infty}(e^{iut}-1-iut)\,dN(u)\Big]$$

- Probléma 3.
  - → ξ_λ-nak nincs szórása

$$\Rightarrow \log \varphi_\lambda(t) = \lambda\Big(i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + c\int_{-\infty}^{0}\Big(e^{iut}-1-\frac{iut}{1+u^2}\Big)dM(u) + c\int_{0}^{\infty}\Big(e^{-iut}-1-\frac{iut}{1+u^2}\Big)\,dN(u)$$

Levy-formula: γ valós, $\sigma > 0$, $M(u)$, $N(u)$ monoton növő fv-ek $M(-\infty) = 0$ $N(+\infty) = 0$

$$dG(u) := \frac{u^2}{1+u^2}\,dM(u) \quad u<0$$

$$dG(u) := \frac{u^2}{1+u^2}\,dN(u) \quad u>0$$

T] $\log \varphi_\lambda(t) = \lambda\Big[i\gamma t + c\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(e^{iut}-1-\frac{iut}{1+u^2}\Big)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u)\Big]$

Levy-Hincsin-formula

$G(u)$ monoton növő, korlátos és $G(+0)-G(-0)=\sigma$

$$\left[\left(e^{iut}-1-\frac{iut}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\right]_{u=0} = \left(\left(1+iut-\frac{u^2t^2}{2}+O\left(u^2\right)-1-\frac{iut}{1+u^2}\right)\right.$$

folytonosság miatt ennek ~~miatt~~ is kell milyen értéket felvennie

$$\left.\cdot\frac{1+u^2}{u^2}\right]_{u=0} =$$

$$= \left[\frac{\cancel{iut}+i\cancel{u^3}t-\cancel{iut}}{1+u^2}-\frac{\cancel{u^2}t^2}{2}+O\left(u^2\right)\right]\cdot\frac{1+u^2}{\cancel{u^2}}\Bigg|_{u=0} =$$

$$= \left\{\left[\frac{iut}{1+u^2}-\frac{t^2}{2}+O\left(u^2\right)\right]\left(1+u^2\right)\right\}\Bigg|_{u=0} = -\frac{t^2}{2}$$

Ha $\exists$ a szórás:

$$\log\varphi(t) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{iut}-1-iut\right)\frac{1}{u^2}\,dK(u) \quad \text{, ahol}$$

$$K(u) = \int_{-\infty}^{u}\left(1+z^2\right)\,dG(z) \qquad K(u) \text{ monoton növő, korlátos}$$

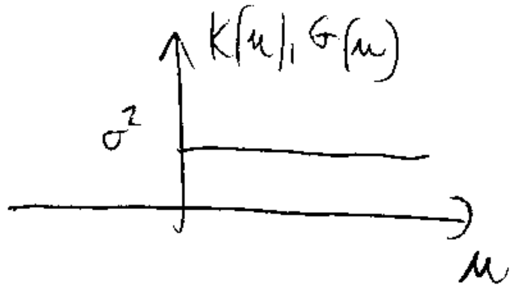
és $K(-\infty)=0$, $K(+\infty)=\sigma^2$

= $G(u), K(u), M(u), N(u)$ fv-ek ~~teljes~~ jellemzik a korlátlanul osztható eloszlásokat.

Pl. · Normális eloszlás: $K(u) = G(u) = \begin{cases} 0, & \text{ha } u \leq 0 \\ \sigma^2, & \text{ha } u > 0 \end{cases}$

$\downarrow$

ezzel kapjuk vissza a normális eloszlást



· Poisson-eloszlás: $\gamma = \frac{\lambda}{2}$ $G(u) = \begin{cases} 0, & \text{ha } u \leq 0 \\ \frac{\lambda}{2}, & \text{ha } u > 0 \end{cases}$

vagy $\gamma = \lambda$ $K(u) = \begin{cases} 0, & \text{ha } u \leq 1 \\ \lambda, & \text{ha } u > 1 \end{cases}$

$\zeta = \xi_1 + \xi_2$ ζ normális eloszlású, ξ_1, ξ_2 azonos eloszlású, független.

$\rightarrow$ $K(u)$-nak csak 0-ban lehet ugrása

$\downarrow$

a tagok, amik előállítják, biztosan normális eloszlásúak!

2) ~~Általános~~ határérték-~~tételek~~:

Legyen $\zeta_n = \xi_{n_1} + \xi_{n_2} + \dots + \xi_{n k_n}$

Mikor fog A_n megfelelő választása esetén $\zeta_n - A_n$ egy határeloszláshoz tartani?

ξ_{11}

$\xi_{21}\ \xi_{22}\ \dots\ \xi_{2k_2}$

$\vdots$

$\xi_{n1}\ \xi_{n2}\ \dots\ \xi_{nk_n}$

Az egyes tagoknak $n \to \infty$ esetén elhanyagolhatónak kell lennie.

<u>Def</u> ξ_{nk} változók elhanyagolhatóan kicsik, ha

$$\sup_{1 \le k \le k_n} P(|\xi_{nk}| > \varepsilon) \to 0 \quad n \to \infty \text{ esetén } ~~tetszőleges~~$$

$\forall \varepsilon > 0$-ra.

<u>T</u> Ahhoz, hogy független, elhanyagolhatóan kicsiny ξ_{nk} val. változók $\zeta_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nk_n} - A_n$ összegek eloszlása megfelelően választott A_n esetén egy eloszlásfv-hez konvergáljanak, szükséges és elegendő, hogy legyenek olyan $\overline{\xi}_{nk}$ korlátlanul osztható eloszlások, amelyek ugyanazon eloszláshoz konvergálnak, és

$$\log \varphi_{nk}(t) = -iA_n t + \sum_{n=1}^{k_n} \left\{ it\alpha_{nk} + \int (e^{iut}-1)\, dF_{nk}(x+\alpha_{nk}) \right\}$$

$$\alpha_{nk} = \int_{|x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x) \qquad \varepsilon > 0 \text{ tetszőleges}$$

(Vagyis a $\zeta_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots \xi_{nk_n} - A_n$ összegek csak korlátlanul osztható eloszláshoz tarthatnak)

Normált összegek:

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{B_n} - A_n$$

akkor $\xi_{nk} = \dfrac{\xi_k}{B_n}$

D) Stabilis eloszlások: $F(x)$ egy stabilis eloszlás, ha tetszőleges $a_1 > 0, b_1, a_2 > 0, b_2$ esetén létezik $a > 0, b$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{konvol.}}}{F(a_1 x + b_1) * F(a_2 x + b_2)} = F(ax+b)$$

ξ_1, ξ_2 és ξ_3 eloszlása $F(x)$ → $a_1\xi_1 + b_1 + a_2\xi_2 + b_2 \overset{\text{eloszlásban}}{=} a\xi_3 + b$

(létezik ugyan eloszlású változó, ami az előző kettő változó ~~összeg~~ lineárkomb.-ja)

T] Minden stabilis eloszlás korlátlanul osztható

T] $\zeta_n = \frac{\xi_1+\xi_2+\dots\xi_n}{B_n} - A_n$ normált összegek pontosan akkor konvergálnak egy $F(x)$ eloszláshoz, ha $F(x)$ stabilis.

T] Stabilis eloszlás karakterisztikus fv-e.

$$\log \varphi(t) = i\gamma t - c\,|t|^{\alpha}\cdot\left\{1 + i\beta\cdot\frac{t}{|t|}\,w(\alpha,t)\right\}, \text{ ahol}$$

γ valós, $0<\alpha\le 2$, $-1\le\beta\le 1$, $w(\alpha,t)=\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\cdot\alpha, & \text{ha } \alpha\ne 1 \\ \frac{2}{\pi}\log|t|, & \text{ha } \alpha=1\end{cases}$

$c>0$

α: karakt. kitevő

β: szimmetriát jelent

$\beta=0$ szimm.; $\beta=-1$ $\oplus$ irányba van tolva; $\beta=+1$ $\ominus$ irányba van tolva

Pl] $\alpha=2$ esetén: $\log\varphi(t) = i\gamma t - ct^2$ Normális eloszlás

$\alpha=1$, $\beta=0$ esetén: $\log\varphi(t) = i\gamma t - c|t|$

$$f(x) = \frac{1}{c\pi}\,\frac{1}{1+\left(\frac{x-\gamma}{c}\right)^2}$$

(sűr. fv.)

~~(transzformált)~~ Cauchy-eloszlású változó

$\alpha=1/2$, $\beta=-1$ esetén $\log\varphi(t) = i\gamma t - \sqrt{-2ict}$ Lévy-eloszlás

$$f(x) = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{c}{2(x-\gamma)}} \cdot (x-\gamma)^{-3/2}$$ Levy-eloszlás

↓

ennek sincs várható értéke

11. óra

1) Stabilis eloszlások:

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{B_n} - A_n$$ (normált összeg)

(pl. normális-eloszlás
Cauchy —"—
Levy —"—)

ζ_n stabilis eloszlású, mert $\xi_1, \xi_2 \ldots$ eloszlása ehhez tart

ha ξ_1 ~~adott~~, $\xi_2, \ldots$ ~~adott~~ normális/Cauchy eloszlású, akkor a határeloszlás (amihez ζ_n eloszlása tart) is olyan eloszlású lesz

2) Normális eloszláshoz tart:

a)
$$\frac{\lambda^2 \int_{|x|>\lambda} dF(x)}{\int_{|x|<\lambda} x^2 dF(x)} \to 0, \text{ ha } \lambda \to \infty$$

kar. kitevő $\alpha = 2$ normális eloszlásra

ehhez nem kell, hogy a szórás létezzen

• $0 < \alpha < 2$

$\frac{F(-x)}{1-F(x)} \to \frac{c_1}{c_2}$ ha $x \to 0$, c_1, c_2 konstans

Minden $k>0$ $\frac{1-F(x)+F(-x)}{1-F(kx)+F(kx)} \to k^\alpha$ $x \to \infty$

(Nagyjából az eloszlásfv. határgyfv. szélén cseng le mindkét irányban)

b) a normális eloszlás speciális, mert sokfajta eloszlás határeloszlása lesz

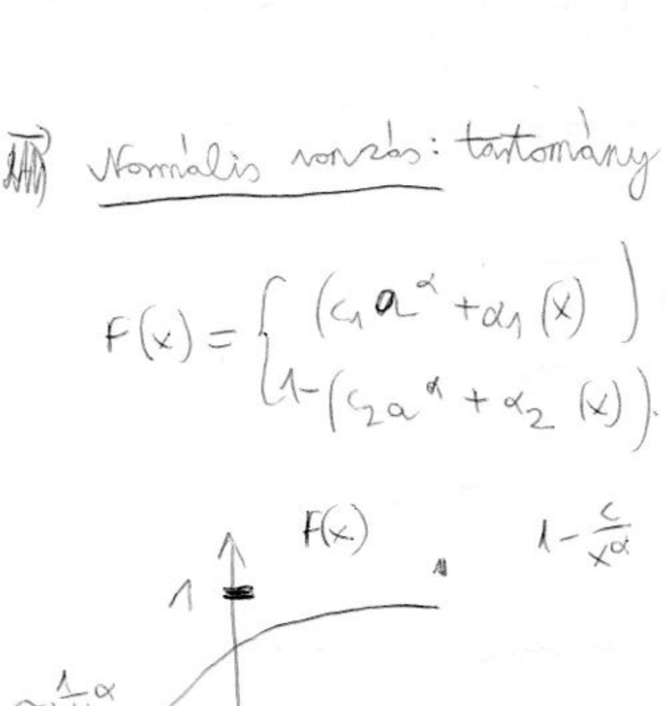
$\zeta_n = \frac{\xi_1+\xi_2+\dots\xi_n}{B_n} - A_n$ $B_n = a\sqrt{n}$ // $\alpha = 2$

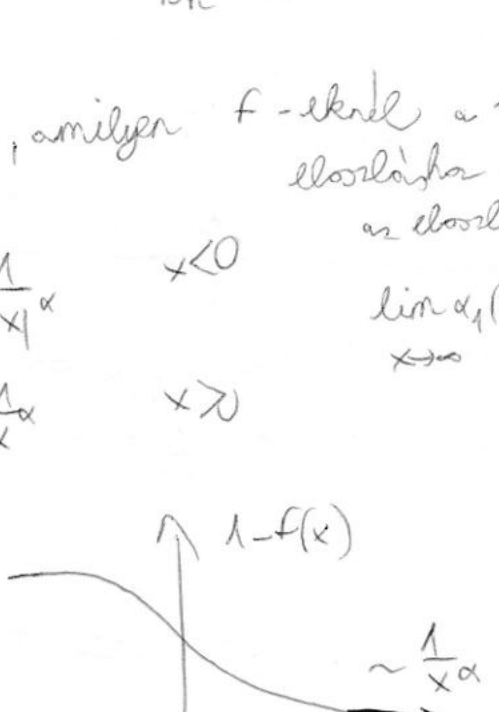
$B_n = a n$

III) Normális vonzás: tartomány , amilyen F-eknél a normális eloszláshoz ~~tartanak~~ az eloszlások

$$F(x) = \begin{cases} (c_1 a^\alpha + \alpha_1(x)) \cdot \frac{1}{|x|^\alpha} & x<0 \\ 1-(c_2 a^\alpha + \alpha_2(x)) \cdot \frac{1}{x^\alpha} & x>0 \end{cases}$$

$\lim_{x\to\infty} \alpha_1(x) = \lim_{x\to\infty} \alpha_2(x) = 0$





Statisztikai módszerek, a statisztika elemei

1) statisztika: az adatokból (mintákból) akarunk a valószínűségekre és az eloszlás tulajdonságaira következtetni

Konfidencia szint: mindig csak bizonyos valószínűséggel tudunk vmit kijelenteni

de minél nagyobb a bizonyosság, annál kevésbé értékes az állítás

(pl. Duna vízszintje - nagy valószínűséggel tudjuk állítani, hogy 0,5 m – 15 m között lesz, de ebből nem tudtunk meg semmit)

2) • a minta eloszlása: empirikus eloszlásfüggvény (véletlentől függ)

• áll: a mintaszám növelésével ($n \to \infty$) az eloszlásfv. 1 valószínűséggel konvergál az eredeti eloszláshoz

→ empirikus várható é.: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$ (átlag) emp. szórásnégyzet

→ empirikus k. mom.: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$

→ $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ várható érték tart az elméleti várh. értékhez

(x_i-k függetlenek visszatevéses mintavételezés esetén)

$$\langle s^2\rangle = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} \langle x_i\rangle^2 - \langle \qquad \langle \overline{x}^2\rangle\right.$$

$$\langle s^2\rangle = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$ a ~~szórás~~ minta szórásának várható értéke nem az elméleti szórás~~t~~ adja vissza~~t~~ !

$$\langle s^{*2}\rangle = \frac{n}{n-1}\langle s^2\rangle = \sigma^2$$

$$\boxed{s^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$$ korrigált empirikus szórásnégyzet

– Normális eloszlású sokaság: $x_i \in N(m,\sigma)$

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \in N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \underset{\infty}{\overset{n}{\to}} 0 \text{ emiatt} \Rightarrow \lim \overline{x} = m$$

bevezetve a

$x_i = m + \sigma z_i \qquad z_i \in N(0,1)$ jelölést

$y =$

$$p(y) = \int\dots\int dz_1 \, dz_n \, \delta\left(y - \left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\sum_{i=1}^{n} z_i^2 + \dots$$

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(y)\, e^{ity}\, dy =$$

$$\underline{\underline{A}} = \left(\frac{1}{2} - it\right)\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots 1 \end{pmatrix} + \frac{it}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & & \\ 1 & & \ddots \end{pmatrix} \qquad \det \underline{\underline{A}} = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

sajátvektorok, sajátértékek: ...

(n−1) db lin. független sajátvektor $\lambda = \left(\frac{1}{2} - it\right)$ sajátért.-el (olyan)

\+ $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = \frac{1}{2} - it + it = \frac{1}{2}$ sajátértékkel

$\Downarrow$

$$\varphi(t) = \frac{1}{(1 - i2t)^{\frac{n-1}{2}}} \rightarrow \chi^2\text{-eloszlás } n-1 \text{ szab. fokkal} \; !$$

$\uparrow$

az empirikus S^2 eloszlása

3) stat. becslés:

ismert a stat. sokaság eloszlása, de egy az eloszlás paraméterének konkrét értékét kell meghat.

$x_1, x_2, \ldots x_n$ mintaelemek → ezekből kell a-ra becslést adni

$\hat{a} = \hat{a}(x_1, x_2, \ldots x_n)$

- torzítatlan becslés, ha

$$\langle \hat{a} \rangle = a$$

pl. minta átlaga | torzítatlanul becsli | várható értéket
korrigált szórás | | szórást

- asszimptotikusan torzítatlan becslés: $n \to \infty$-re

$$\langle \hat{a} \rangle \to a$$

(de az emp. szórás^2 nem becsli torz.-ul a σ^2-t)

pl. $\langle S^2 \rangle = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \to \sigma^2$

• **hatásos becslés**: ha $\hat{a}_1$ és $\hat{a}_2$ torzítatlan becslés, és

$$\sigma^2(\hat{a}_1) < \sigma^2(\hat{a}_2)$$

akkor $\hat{a}_1$ hatásosabb becslés, mint $\hat{a}_2$

→ Ha $\hat{a}_0$ olyan, hogy $\sigma^2(a_0)$ minimális az összes torz. becslés között, akkor $\hat{a}_0$ hatásos becslés

pl. átlag ~~hatásos~~ becslés a várható értékre

• becslés sorozata: $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots \hat{a}_n \ldots$ $\lim_{n\to\infty} \langle \hat{a}_n \rangle = a$

• konzisztens becslés, ha $a_n \to a$

• elégséges becslés: legyen $y = \hat{a}(x_1, \ldots x_n)$. Ekkor $x_1, x_2, \ldots x_n$ feltételes eloszlása ne tartalmazza a-t

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n \mid \underbrace{\hat{a}(x_1, \ldots x_n) = y})$$

a becslő fv-em már nem tartalmazza a-t → nem ~~tudunk~~ jobb becslést adni a-ra

• **maximum-likelihood módszer**:

hogyan találjuk meg a becslő fv.-ünket?

$p(x; a)$-ban a-t becsüljük $x_1, x_2, \ldots x_n$ n elemű minta alapján

$$L(x_1, x_2, \ldots x_n; a) = p(x_1; a)\, p(x_2; a) \ldots p(x_n; a)$$

annak a valósz., hogy éppen $x_1 x_2 \ldots x_n$ köv. be adott a par. mellett

~~max~~ keressük azt az a-t, ami mellett az $x_1, x_2, \dots x_n$ sorozat megfigyelése a legvalószínűbb!

$$\max_a L(\underline{x}; a) = \quad \frac{\partial L}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial a^2} < 0$$

$\frac{\partial L}{\partial a} = 0$ helyett $\frac{\partial \ln L}{\partial a} = 0$ helyen is kereshetjük a max.-t

mintha nem a-nak lenne eloszlása, hanem $x_1, x_2, \dots x_n$-nek, és azt az a-t keressük amire ez maximális

pl. binomiális eloszlás p paraméterének becslése → dia

– nem biztos, hogy torzítatlan becslést kapunk
de konzisztens becslésünk lesz biztosan

= pontbecslés

- intervallum becslés

$$P(\hat{a}_1 \leq a \leq \hat{a}_2) = 1 - p$$

ezek vmi becslő fv.-ből származnak

p minél kisebb, $[\hat{a}_1, \hat{a}_2]$ interv. hossza annál nagyobb

↳ megadja azt az int.-ot, ahová a param. nagy val.-el esik

- konfidencia intervallum

legyen $x_1, x_2, \dots x_n$ normális elosz. σ szórással, keressük a várható érték varható konf. interv.-ot (p adott)

$$u = \frac{\bar{x} - m}{\sigma \sqrt{n}} \in N(0,1) \quad (m = \langle x \rangle)$$

$$P(|u| \leq u_p) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{u_p} e^{-x^2/2} dx = 1 - p$$

pl. $p = 0{,}05$ esetén $u_p = 1{,}95$ ↘ krit. érték

///: $1-p$

$$\bar{x} - u_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + u_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

mekkora mintaszám szükséges, hogy a p-hez tartozó konfid. intervallum félszélessége d legyen?

$$u_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq d \Rightarrow \boxed{n \geq u_p^2 \frac{\sigma^2}{d^2}}$$

konf. intervallum $\langle x \rangle$-re ismeretlen σ esetén

$$t = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \langle x \rangle}{s^*} = \sqrt{n-1} \frac{\bar{x} - \langle x \rangle}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Big/ \frac{\sqrt{n-1}}{\sigma} s^*$$

száml.: $N(0,1)$ normális-eloszlású
nevező: $n-1$ szab. fokú χ^2 eloszlás
$\Rightarrow$ t $n-1$ szab. fokú Student-(t-) eloszlás

$$P(|t| \leq t_p) = S_{n-1}(t_p) = 1 - p$$

↑ a Student-eloszlást ismerjük ⇓ t_p: krit. érték

$$\bar{x} \pm t_p \frac{s^*}{\sqrt{n}}$$

pl. ha 1200 az átlagos élettartam egy égőkből álló mintának
$1057 < m < 1343$
99%-al

4) Statisztikai próbák

(normális eloszl. sokaság esetén)

- u-próba: σ adott

  - hipotézis (nullhipotézis): a sokaság várható értéke m_0

$$u = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x} - m_0}{\sigma} \in N(0,1)$$

$$P(|u| > u_p) = p$$

ha p kicsi, akkor $|u| \le u_p$ majdnem biztos

  - elsőfajú hiba
    p valószínűséggel elutasítjuk a hipotézist, holott igaz
    ha $|u| > u_p$
  - másodfajú hiba
    elfogadjuk a hip.-t, holott hamis $(1-p)$

- t-próba: σ, $\langle x \rangle$ ismeretlen

  - hipotézis: a sokaság várható értéke m_0

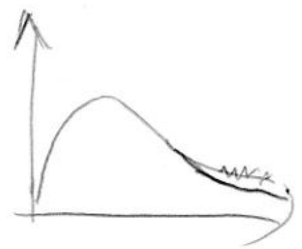
$$t = \sqrt{n}\,\frac{\bar{x} - m_0}{s^*}$$

$$P(|t| > t_p) = p$$ Student-eloszlásból krit. érték

- χ^2-próba:
  egész eloszlásfv. tesztelésére alkalmas

pl. dobók valósz. elm. gyak.

0	p_0	ν_0
1	p_1	ν_1
2	p_2	ν_2
⋮	⋮	⋮
r	p_r	ν_r



$\sum_{i=0}^{r} p_i = 1 \qquad \sum_{i=0}^{r} \nu_i = n$

$\sum_{i=0}^{r} (\nu_i - n p_i)^2$ → áll: χ^2 eloszlású lesz

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{r} \frac{(\nu_i - n p_i)^2}{n p_i}$$ (r szab. fokú)

dobókban binomiális eloszlás

$z_i = \frac{\nu_i - n p_i}{\sqrt{n p_i}}$ ha $1 - p_i \to 1$

$n \to \infty$ esetén normális val. változók

⋮

$p = 1 - K_r(\chi_p^2) = P(\chi^2 > \chi_p^2)$

↑ krit. érték