

# Gyakorló feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy ha  $A, B, C$  események páronként függetlenek, és  $A$  független  $B+C$ -től, akkor  $A, B, C$  teljesen függetlenek!
2. Mongol szakon az egyetemi felvételik során öt jelöltet vettek fel idén. A nagy kavarodásban azonban idén véletlenszerűen kerültek az értesítések a borítékokba. Mi a valószínűsége, hogy
  - (a) legalább három,
  - (b) legalább két borítékba a megfelelő értesítés került?
3. Egy  $a$  oldalhosszúságú szabályos háromszög belsejében egyenletes eloszlással véletlenszerűen kiválasztunk egy pontot. Mi ennek a pontnak és a hozzá legközelebbi oldal távolságának eloszlásfüggvénye?
4. Kettő asztaliteniszt játszanak, mindkét játékosra nézve  $1/2$  annak a valószínűsége, hogy egy pontot szerezzen, és az egyes pontok nyérései egymástól függetlenek. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a játék valamelyik fél  $23:21$  arányú nyereségével ér véget? Es annak, hogy  $24:22$  lesz az eredmény?
5. Egy urnában van 6 piros és 4 fehér golyó. Ezek közül véletlenszerűen kiválasztunk 3-at és elhelyezzük egy másik urnába. Innen egymás után visszatevéssel húzunk 5-ször. Mennyi annak a valószínűsége, hogy
  - a) az 5 húzás közül 2 esetben húzunk pirosat?
  - b) a második urnában 2 piros van, feltéve, hogy 5-ször húztunk pirosat?
6. Egy írásbeli vizsgán az egyik tesztkérdésnél három válasz közül kell a helyeset kiválasztani. A vizsgázók  $p$  valószínűséggel tudják,  $1-p$  valószínűséggel nem tudják a helyes megoldást, ilyenkor találmra választanak a három lehetőség közül. Milyen valószínűséggel találunk olyat a helyesen válaszolók között, aki ténylegesen tudta a helyes megoldást?
7. A házuk előtt található két telefon közül az egyik jól működik, a másik viszont 20% valószínűséggel elnyeli a pénzürmét, de nem tudjuk melyik.

Lemegyünk az egyikhez telefonálni, és azt tapasztaljuk, hogy  $n$  bedobott pénzérméből egyet sem nyelt el. Mi a valószínűsége, hogy sikerült a jó telefont választanunk?

8. Mennyi a valószínűsége, hogy a bridzslapokat találomra szétosztva
  - a) minden játékos egyszínű lapot kap?
  - b) valamelyik játékos egyszínű lapot kap?
  - c) egy meghatározott játékos lapeloszlása 6,4,2,1?
  - d) mind a négy ász egy meghatározott játékoshoz kerül?
  - e) egy meghatározott játékosnál két ász és két király van?
9. Céllövést hajtunk végre téglalap alakú céltáblára, ahol  $-2 \leq z \leq +2$ ;  $-1 \leq y \leq +1$ . A kísérlet megfigyelt eredménye a találat  $(z,y)$  koordinátái. (A lövés feltételei olyanok, hogy a táblát biztosan eltaláljuk.) Meghatározandók az alábbi események valószínűségei:
  - a) az abszcissza nem kisebb az ordinátánál
  - b) a koordináták szorzata nem negatív
  - c) a koordináták abszolút értékének összege egynél nagyobb
10. Egy pálcát ketté törünk, majd a nagyobbik darabot megint ketté törjük. Mi a valószínűsége, hogy az így kapott három pálcából háromszöget lehet csinálni?
11. Egyes vidékeken az a babona járja, hogy ha egy lány 6 fűszálat fog a markába úgy, hogy mindkét végén kilógjanak a szálak, majd egy társa mindkét oldalon páronként összecsomózza a fűszálakat, s ha egy zárt lánc keletkezik, következő évben férjhez megy. Mi a valószínűsége az eseménynek, ha a babona igazat mond? Általánosítsuk az eredményt  $2n$  fűszálra!
12.  $n+1$ -szer dobunk pénzérmével. Mi a valószínűsége annak, hogy minden dobásnak van ugyanolyan szomszédja (azaz vagy az előtte, vagy az utána következő dobás ugyanolyan mint a vizsgált dobás)?
13. Legyen  $\xi$  és  $\eta$  két, azonos eloszlású, független valószínűségi változó, közös sűrűségfüggvényük:  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ . Bizonyítsuk be, hogy a  $(\xi, \eta)$  véletlen helyzetű síkbeli pont  $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ ,  $\phi = \arctan \frac{\eta}{\xi}$  polárkoordinátái függetlenek és határozzuk meg ezek sűrűségfüggvényeit!

14. A  $[0, 1]$  intervallumban véletlenszerűen választunk egy számot. Mennyi a valószínűsége, hogy a szám harmadik tizedesjegye 5 ?
15. Egy nem ideális autóguminál a defekt bekövetkezésének valószínűsége a  $(t, t + \tau)$  intervallumban, feltéve, hogy eddig nem volt defekt, arányos a gumi korával és az intervallum hosszával,  $(\alpha \cdot t \cdot \tau)$ , ha  $\tau$  elég kicsi. Határozzuk meg a defekt pillanatának sűrűség- és eloszlásfüggvényét!
16. Hányféleképpen lehet kettes találatot elérni a lottón?
17. Egy urna  $m_1 + m_2$  golyót tartalmaz,  $m_1$  fehéret és  $m_2$  feketét. Véletlenszerűen kihúzzunk (visszatevés nélkül)  $m \leq \min(m_1, m_2)$  golyót. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét
1.  $A = \{ \text{a kihúzott golyók mind fehérek} \}$
  2.  $B = \{ \text{a kihúzott golyók között pontosan } k \text{ fehér van, } k \leq m \}$
  3.  $C = \{ \text{a kihúzott golyók között legalább egy fehér van} \}$
  4.  $D = \{ \text{nem kevesebb mint } k \leq m \text{ fehéret húzzunk} \}$
18. Egy forgáskúp belsejében egyenletes eloszlással felvesszünk egy pontot. Milyen lesz a vetület helyzetének eloszlás- és sűrűségfüggvénye az alaplapon, ha
- a) a kúp magasságvonalával párhuzamosan vetítünk?
  - b) a kúp csúcsából vetítünk?
19. Egységnyi szakaszon vegyünk fel három pontot véletlenszerűen! Milyen lesz a középső pont koordinátájának eloszlásfüggvénye, sűrűségfüggvénye, ill. mi a valószínűsége, hogy a pont a  $[0.25, 0.75]$  intervallumba esik? Milyen lesz a legnagyobb és a legkisebb pont eloszlás- és sűrűségfüggvénye a fenti példában, illetve ha általánosabban  $n$  pontot vettünk fel az egységnyi szakaszon?
20. Legyen  $\xi$  és  $\eta$  együttes sűrűségfüggvénye a következő:  $h(x, y) = x + y$ , ha  $1 \geq x \geq 0, 1 \geq y \geq 0$ , és  $h(x, y) = 0$  egyébként. Határozzuk meg  $\xi + \eta$  sűrűségfüggvényét!
21. Mennyi annak a valószínűsége, hogy két kockával dobva, a hatodik dobás után lesz először a számjegyek összege 12 ?

22. Van négy urnánk. Az elsőben csupa fehér, a másodikban csupa piros, a maradék kettőben pedig piros és fehér golyók vegyesen úgy, hogy a pirosak részaránya  $p$ . Találomra kiválasztunk egy urnát, és három golyót húzunk belőle visszatevéssel. Azt tapasztaljuk, hogy mind a három piros. Mi a valószínűsége, hogy a csupa pirosat tartalmazó urnából húztunk?
23. Házat építünk, de az alap-ásásnál átvágtunk egy vezetékét. Minden egyes napon  $1/5$  a valószínűsége annak, hogy a rendes ügymenet keretében a szolgáltató a felelősségbiztosításunk terhére kijavítja a kábelt, függetlenül attól, hogy mennyi ideje várakozunk már. Minden nap várakozás 50 ezer forint kárt okoz nekünk. A szolgáltató alvállalkozója felajánlja, hogy 200 ezer forintért azonnal elhárítja a hibát, folytathatjuk az építkezést. Mikor a legkisebb a várható költségünk: ha
- a) megvárjuk, amíg a szolgáltató magától kijön?
  - b) azonnal kifizetjük az alvállalkozót?
  - c) két napig várunk, és ha addig nem kerül sor a javításra, akkor megrendeljük az alvállalkozótól?
24. Egy dupla utcai telefonfülke előtt várakozunk. Mindkét fülke foglalt. Az egyikben egy férfi telefonál, a másikban pedig egy nő. A várakozási idő mindkettőre egy-egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó, a férfi esetén  $\lambda$  a nő esetében  $\mu$  paraméterrel (ahol  $\lambda > \mu$ ). A két várakozási idő egymástól független. Várhatóan mennyi ideig kell várakoznunk, ha
- a) addig várunk míg megüresedik egy fülke?
  - b) meg akarjuk várni míg mindketten befejezik a beszélgetést?
25. Egy gépirónó átlagosan 8 oldalanként vét egy hibát. Mi a valószínűsége, hogy egy oldalt elszúr?
26. Vegyünk fel a  $[0, 1]$  intervallumon egy pontot a következő eloszlásfüggvénnyel:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

A pont és az 1 között vegyünk fel egy másik pontot egyenletes eloszlással. Határozzuk meg az így kapott három szakasz közül a két szélső korrelációs együtthatóját!

27.  $N$  polcra véletlenszerűen felteszünk  $k$  darab könyvet. Mi a valószínűsége, hogy egy polcon épp  $m$  darab könyv van, ha tudjuk, hogy a vizsgált polc nem üres?
28. Egy városban  $n$  ház van. Legyen azon házak száma, amelyekben  $x_j$  ember lakik  $n_j$ . Ekkor egy házban átlagosan  $m = \sum n_j x_j / n$  ember lakik. Visszatevés nélküli mintavétellel kiválasztunk  $r$  házat, és megszámloljuk, hány ember lakik a házban  $(X_1, X_2, \dots, X_r)$ . Mennyi az így megszámlolt emberek számának  $(Y = X_1 + X_2 + \dots + X_r)$  várható értéke, és szórása?
29. A Holdon, mivel nincs légkör, az ott élő *Nonexistimus lunaris* baktériumok mutációs rátája, azaz annak a valószínűsége, hogy hibásan másolódik le egy nukleotid az öröklődés során igen nagy,  $\mu = 10^{-4}$ . Mint tudjuk, minden *N. lunaris* pontosan 32 utódot hoz létre osztódással (közben ő maga megsemmisül). Eközben hat a mutáció. A hibásan lemásolt DNS láncokat (amelyek mindig  $L$  nukleotidból állnak) hordozó lények nem bírják a viszontagságos körülményeket, elpusztulnak. Határozzuk meg a túlélő utódok számának eloszlását és várhatóértékét! Ha az egy egyedre jutó életképes utódok számának várható értéke 1-nél kisebb, hosszútávon a faj kihalna. Hány nukleotid hosszúságú lehet maximum az *N. lunaris* DNS-e, hogy ne haljon ki a faj?
30.  $N$  embernél vérvizsgálatot végeznek. Tegyük fel, hogy  $N$  igen nagy szám. Ha minden ember véréét külön vizsgálnák,  $N$  vizsgálatra lenne szükség. Másik megoldás, hogy  $k$  ember vérmintáját összegyűjtik és együtt analizálják. Ha a vizsgálat eredménye negatív, akkor egy vizsgálat elég  $k$  embernek. Ha pozitív, akkor a  $k$  embert egyenként is meg kell vizsgálni, így  $(k + 1)$  vizsgálat szükséges. Tegyük fel, hogy a vizsgálat eredménye bárkire ugyanakkora  $p$  valószínűséggel pozitív, valamint az egyes emberek sztochasztikusan függetlenek.
  - a) Mennyi a valószínűsége, hogy  $k$  ember véréből összegyűjtött minta pozitív?

- b) Mennyi az elvégezendő vizsgálatok számának várható értéke?  
 c) Írjunk fel olyan egyenletet amellyel megtalálhatjuk azt a  $k$  értéket, ami minimalizálja a fenti várható értéket!

31. Egy pénzdarabot 600-szor feldobtunk és 285 esetben volt fej az eredmény. Vizsgáljuk meg a  $\xi^2$  próba segítségével, van-e ellentmondás a  $p = \frac{1}{2}$  hipotézis és adataink között!
32. Egy nagy autóparkolóba időegység alatt  $\lambda$  valószínűséggel érkezik újabb kocsi, és a bent lévő autók mindegyike  $\mu$  valószínűséggel távozik el onnan. Mindkét valószínűség független attól, hogy éppen hány kocsi tartózkodik a parkolóban. Írjuk fel azt az egyenletrendszert, ami meghatározza annak a  $p_n(t)$  valószínűségét, hogy  $t$  idő múlva pontosan  $n$  darab kocsi lesz a parkolóban. Írjuk fel a  $G(t, z) = \sum_n p_n(t) z^n$  generátorfüggvény egyenletét, és ennek segítségével határozzuk meg a  $p_n^*$  stacionárius eloszlást!
33. Legyen  $\xi$  egyenletes eloszlású a  $(0, a)$  intervallumban, ahol  $a$  ismeretlen paraméter. Mutassuk meg, hogy az  $a$  paraméter maximum likelihood becslése  $\max(x_1, x_2, \dots, x_n)$  és határozzuk meg a torzítás értékét, tehát e becslés várható értékének és az  $a$ -nak a különbségét!
34. Legyen  $\xi$  és  $\eta$  együttes sűrűségfüggvénye a következő:

$$h(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg  $\xi$  és  $\eta$  korrelációs együtthatóját.

35. Egy „verekedős” játékautomata  $l$  féle ellenfél közül sorsol nekünk partnert minden menet elején. Várhatóan hány menetet kell „túlélni”, míg sorra kerül kedvenc ellenfelünk, ha egy ellenfél csak akkor kerül újra sorra, ha már mindenkivel megverekedtünk? És ha függetlenül sorsol a gép mentenként, azaz előfordulhat, hogy egy ellenféllel egymás után többször is meg kell küzdeni?
36. Az ágyú csövét a vízszinteshez képest 45 fokos szögbe állítjuk be. Az ágyúgolyó a torkolatot átlagosan  $50m/s$  sebességgel hagyja el, de  $10m/s$

-os szórással. Közelítsük a sebesség eloszlását egy Gauss-eloszlással, melynek sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (a = 50m/s, \sigma = 10m/s).$$

Mi a golyó becsapódási helyének várható értéke és szórása?

37. Vegyünk fel a  $[0, 1]$  intervallumon egy pontot a következő eloszlásfüggvénnyel:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

A pont és az 1 között vegyünk fel egy másik pontot egyenletes eloszlással. Határozzuk meg az így kapott három szakasz közül a két szélső korrelációs együtthatóját!

38. Bizonyítsuk be, hogy a várható érték az a szám, melytől való négyzetes eltérés várható értéke minimális. Bizonyítsuk be, hogy a medián meg az a szám, melytől való abszolút eltérés várható értéke minimális. (A medián definíciója:  $m$  az a szám, hogy  $F(m) = 1/2$ , ahol  $F$  az eloszlásfüggvény)
39. Egységnyi szakaszon vegyünk fel egyenletes eloszlással egy pontot. A nulla és az így kapott pont között ismét vegyünk fel egy pontot egyenletes eloszlással. Határozzuk meg az így kapott három szakasz közül a két szélső korrelációs együtthatóját!
40. A „pétervári probléma”: a következő szerencsejátékot ajánlják nekünk:  $N$  forintot fizetünk minden játszmaért. Egy játszma a következőképp zajlik: egy penzérmét dobálnak fel, ha elsőre írás, akkor vesztettünk, ha elsőre fej, másodikra írás, akkor nyerünk 1 forintot, ha csak a harmadik lesz először írás, akkor 2 forintot, és így tovább, ha  $n$ -szer volt fej, akkor  $2^n$  forintot kapunk vissza. Kérdés, mekkora  $N$  forintig érdemes belemenni ebbe a játékba?

41. Mi a valószínűsége, hogy az alábbi egyenlet gyökei valóssak, ha  $b$  és  $c$  egyenletes eloszlású véletlen változók a  $[-a, a]$  intervallumon?

$$ax^2 + bx + c = 0$$

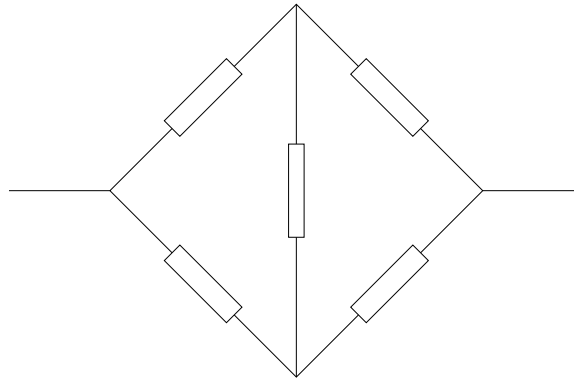
42. Egy gyárban egy gép sok alkatrészből áll, amik véletlenszerűen meghibásodhatnak. Adott idő alatt a meghibásodott alkatrészek  $k$  száma Poisson-eloszlást követ,  $\lambda$  paraméterrel. A gép javításához szükséges idő az alábbi módon függ a hibás alkatrészek számától:

$$T = \tau(1 - e^{-\alpha k}),$$

ahol  $\tau$  és  $\alpha$  adott konstansok. Mennyi a javítási idő várható értéke és szórása?

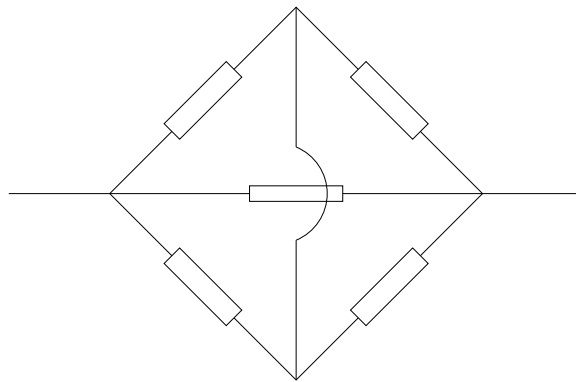
43.  $N$  levelesládába véletlenszerűen szétosztunk  $k$  darab levelet. Mi a valószínűsége, hogy egy kiválasztott levelesládában épp  $m$  levél van, ha tudjuk, hogy a vizsgált láda nem üres?
44. Van négy urnánk. Az elsőben csupa fehér, a másodikban csupa piros, a maradék kettőben pedig piros és fehér golyók vegyesen úgy, hogy a pirosak részaránya  $p$ . Találomra kiválasztunk egy urnát, és három golyót húzunk belőle visszatevéssel. Azt tapasztaljuk, hogy mind a három piros. Mi a valószínűsége, hogy a csupa pirosat tartalmazó urnából húztunk?
45. Egy egyenesen bolyongó részecske mozgása során  $p_j$  valószínűséggel ugrik jobbra és  $p_b$ -vel balra a részecske. Mi a valószínűsége, hogy  $n$  lépés után  $k$  lépéssel távolodik jobbra?
46. Az alábbi áramkörben levő ellenállások egymástól függetlenül  $p$  valószínűséggel hibásodnak meg. Mi a valószínűsége, hogy áram folyhat a kivezetett pontok között, ha a meghibásodás szakadást eredményez? Mennyi ez  $p = 1/2$  esetén? Mi a valószínűsége, hogy a rendszer rövidzárlatos, ha a meghibásodást az ellenállás zárlata okozza? (lásd a 1 és 2 ábrákat!)





a)

1. ábra.



b)

2. ábra.

47. Egy embernek, aki ki akarja nyitni lakása ajtaját,  $n$  kulcsa van. A kulcsokat véletlenszerűen és függetlenül próbálja ki (ennek okára csak sejtéseink vannak). Mennyi a kísérletek számának várható értéke, ha
- a kipróbált és rossznak bizonyult kulcsokat nem rakja külön, tehát újra sorra kerülhetnek;
  - ha külön rakja őket?
48. (a) Adjuk meg annak valószínűségét, hogy  $k$  ( $4 \leq k \leq 89$ ) a második legnagyobb kihúzott lottószám!
- (b) Melyik számra maximális ez a valószínűség?
49. A Szultán azzal jutalmazza meg Szimbádot, hogy kiválaszthat egy lányt

az  $N$  tagú háreméből. A Szultán azonban nem szívesen válik meg legszebb háremhölgyétől, ezért azt a feltételt szabja, hogy Szimbád csak egyesével nézheti meg a háremhölgyeket, és akit egyszer már nem választott, azt később már nem kérheti.

Szimbád úgy dönt, hogy megnézi az első  $M$  háremhölgyet, majd ezután azt a lányt választja, amelyik szebb bármelyik korábban látottnál.

- (a) Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy Szimbád a legszebb lányt választja!
- (b) Adjunk becslést arra, hogy milyen  $M$ -nél van a keresett valószínűség maximuma, ha  $N \gg 1$ !

50. Egy választáson  $M$  férfi és  $N - M$  nő indul. Egy vitaműsorba behívnak  $n$  jelöltet. Tegyük fel, hogy mindenki ugyanakkora eséllyel kerül a műsorba. Jelölje  $\xi$  a meghívott nők számát.

- (a) Adjuk meg a  $P(\xi = k)$  valószínűséget!
- (b) Mi  $\xi$  legvalószínűbb értéke?

51. Egy kockával addig dobunk, míg 6-ost nem dobunk. Mennyi lesz a dobásszám várható értéke és szórása, ha az utolsó dobást is beszámítjuk?

52. Mi a valószínűsége, hogy két kockával dobva az összeg 7, ha tudjuk, hogy páratlan számot dobtunk?

53.  $n$  db sípálya találkozik a völgy alján, a felvonók egy helyről indulnak. Ha azt a taktikát követjük, hogy mindig a legrövidebb sorba állunk be, akkor várhatóan hányadik menetben fogunk a legnehezebb pályán síelni, feltéve, hogy teljesen véletleszerű az, hogy épp melyik sor a legrövidebb? És ha azt is fejbe vesszük, hogy egy pályán addig nem csúszunk le újra, amíg az összes többin nem mentünk egyet?

54. Móricka szerződést köt a Szerencsejáték Rt.-vel: Kenózik. A Kenó soroláson 80 számból húznak 20-at, Móricka pedig 10 számot játszik meg. A Szerencsejáték Rt. egymilliószorosát fizeti a feltett tétnek, ha mind a tíz megjátszott szám a kihúzott húsz között van. Mekkora Móricka

nyerési esélye az egymilliószoros főnyereményre?

55. Pistike a 6-os villamoson szeretne utazni a Moszkva térről a Móricz Zsigmond körtérig, de nincs se jegye, sem bérlete. Úgy dönt, hogy lóg. Annak a valószínűsége, hogy az  $i$ -ik megállóban felszáll egy ellenőr  $p_i$ . Mi a valószínűsége, hogy Pistikét leszállítják?
56. Pistike és Móricka játsza a wimbledoni teniszdöntőt és az ötödik játszmában 5–5-re állnak. Tegyük fel, hogy minden további gémet 50–50% valószínűséggel nyeri Pistike illetve Móricka. Akkor van vége a meccsnek, ha valamelyikük ezek után egymás után két gémet nyer.
- (a) Adjuk meg a további gémekeket leíró valószínűségi mezőt!
  - (b) Mi a valószínűsége, hogy hat, vagy kevesebb gémet játszanak még?
  - (c) Mi a valószínűsége, hogy páros számú gémet játszanak még?
57. Egy rekeszben  $m_1 + m_2$  sörösüveg van,  $m_1$  teli és  $m_2$  üres. Véletlenszerűen kihúzzunk (visszatevés nélkül)  $m \leq \min(m_1, m_2)$  üveget. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét
- (a)  $A = \{ \text{minden a kihúzott üveg tele van} \}$
  - (b)  $B = \{ \text{a kihúzott üvegek között pontosan } k \text{ teli van, } k \leq m \}$
  - (c)  $C = \{ \text{a kihúzott üvegek között legalább egy teli van} \}$
  - (d)  $D = \{ \text{nem kevesebb mint } k \leq m \text{ telit húzzunk} \}$
58. Egyes vidékeken a következő babona járja: ha egy fizikus hallgató 6 medveszőrszálát fog a markába úgy, hogy mindkét végén kilógnak a szálak, majd egy társa mindkét oldalon páronként összecsomózza a szőrszálakat, s ha egy zárt lánc keletkezik, akkor következő félévben nem kell pótzh.-t írnia.
- (a) Mi a valószínűsége az eseménynek, ha a babona igazat mond?
  - (b) Általánosítsuk az eredményt  $2n$  szőrszálra!

59. Pistike és négy cimborája kedvenc sörözőjében ücsörög. Mivel törzsvendégek, mindegyiküknek saját korsója van. Ezt az új pincér is tudja jól, de azt már sajnos elfelejtette, hogy melyikük milyen sört szeret. Csak arra emlékszik, hogy a kocsmában kapható ötféle sörből mindegyikük mást szokott inni. Zavarában ezért véletlenszerűen csapol az ötféle sörből az egyes korsókba, mindegyikbe mást. Mi a valószínűsége, hogy
- (a) legalább három,
  - (b) legalább két,
  - (c) pontosan négy korsóba az a sör kerül, amit a tulajdonosa szeret?
60. A valószínűségszámítás gyakorlati jegyet szeretnénk beírni az indexünkbe. A gyakorlatvezető  $p$  valószínűséggel tartózkodik az egyetemen (a hírsztelésekkel ellentétben  $p$  nem feltétlenül kicsi). Ha bent van az egyetemen, akkor 4 terem valamelyikében van egyenlő valószínűséggel. 3 teremben már megnéztük és nem találtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy a negyedikben megtaláljuk?
61. Az Enterprise űrhajó az  $N$  naprendszerből álló galaxist járja. Kirk kapitány az eddig meglátogatott  $n$  naprendszerből  $k$ -ban találkozott *E. coli* baktériummal, vagy fejlettebb életformával. Mi a valószínűsége, hogy a galaxis  $s$  számú naprendszerében található *E. coli* vagy fejlettebb életforma? (Feltesszük, hogy a galaxisban a különböző számú lakott naprendszerek azonos valószínűséggel fordulnak elő.)
62. Kirk kapitány és az Enterprise űrhajó legénysége csillagok szerkezetét is vizsgálja. Egy  $R$  sugarú – természetesen gömb alakú – csillagban véletlenszerűen elhelyeznek  $N$  darab kisméretű szondát.
- (a) Mi a valószínűsége annak, hogy a csillag középpontjához legközelebb eső szonda távolsága a középponttól nagyobb  $r$ -nél?

- (b) Mihez konvergál ez a valószínűség, ha  $R \rightarrow \infty$  és  $N \rightarrow \infty$ , továbbá létezik a  $\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ N \rightarrow \infty}} \frac{Nr^3}{R^3} = c > 0$  határérték?
63. Pistike és Móricka véletlenszerűen felír fejenként egy-egy 1-nél kisebb pozitív valós számot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy
- összegük kisebb 1-nél, és szorzatuk kisebb  $\frac{2}{9}$ -nél?
  - összegük nagyobb, négyzetösszegük kisebb 1-nél, valamint bármelyik  $q$ -szorosa ( $q \in ]1, +\infty]$  paraméter) nagyobb, mint a másik szám?
64. Miután Mórizka az előző héten mégsem nyert a Kenón, most úgy döntött, hogy biztosra megy: felkereste kedvenc bukmékerét, aki megsúgta neki a hétvégi Lovi három *biztos* győztes lovát. A magyar lóversenyszabályok azonban különlegesek, mivel nem lehet előre tudni, hogy hány-szoros nyereményt ér el a játékos. A bukméker csupán annyit tudott mondani, hogy 0 és 100% között egyenlő valószínűséggel bármekkora lehet a nyeremény (a feltett tétén felüli rész). (Tegyük fel, hogy a nyeremény valós szám.) Mórizka elvitte nagymamáját, Mari nénit is a lóversenyre. Az első lóra 1 forintot tett Mari néni, a másodikra 1 forintot Mórizka.
- Mi a valószínűsége hogy együtt 1 forintnál többet nyertek?
  - Mórizka ezek után feltette az összes pénzét (1 forintot plusz a nyereményét) a harmadik lóra. Mi a valószínűsége, hogy összesen  $\frac{2}{9}$  forintnál többet nyert?
  - Mi a valószínűsége, hogy 64a és 64b egyszerre teljesül?
65. Jancsi és Juliska megbeszélnek, hogy meglátogatják a Gonosz Boszorka mézeskalácsházát. Sajnos elfelejtették megbeszélni, hogy a ház négy sarka közül melyiknél találkoznak. A mézeskalácsház olyan hatalmas, hogy nem lehet ellátni a többi sarokra. Mind a ketten pontosan megérkeznek, és ha a másik nincs ott, akkor 1 perc alatt átsétálnak a szomszédos sarkok valamelyikére 50–50% valószínűséggel. Ha nem találkoznak a következő sarkon vagy útközben, megint véletlenszerűen választanak

egy sarkot, és elsétálnak oda. Tegyük fel, hogy eredetileg mindketten egyenlő valószínűséggel érkeznek bármelyik sarokra, és egymástól függetlenül változtatják helyzetüket, amíg találkoznak.

- (a) Jelölje  $p_n$  annak a valószínűségét, hogy az első  $n$  percen belül találkoznak. Határozzuk meg  $p_n$  értékét!
- (b) Jelölje  $r_n$  annak a valószínűségét, hogy a találkozás az  $n$ -edik percben jön létre. Határozzuk meg az  $r_n$  valószínűséget!
- (c) Bizonyítsuk be, hogy 1 annak a valószínűsége, hogy véges időn belül találkoznak!

66. Miután Móricka az első héten mégsem nyert a Kenón, most úgy döntött, hogy biztosra megy: felkereste kedvenc bukmékerét, aki megsúgta neki a hétvégi Lovi három *biztos* győztes lovát. A magyar lóversenyszabályok azonban különlegesek, mivel nem lehet előre tudni, hogy hány-szoros nyeresémet ér el a játékos. A bukméker csupán annyit tudott mondani, hogy 0 és 100% között egyenlő valószínűséggel bármekkora lehet a nyereség (a feltett tét felüli rész. Tegyük fel, hogy a nyereség valós szám.)

Móricka elvitte nagymamáját, Mari néni is a lóversenyre. Az első lóra 1 forintot tett Mari néni, a másodikra 1 forintot Móricka. Móricka ezek után feltette az összes pénzét (1 forintot plusz a nyereségét) a harmadik lóra. Mi annak az együttes valószínűsége, hogy az első két futam után Móricka és Mari néni együtt 1 forintnál, és a harmadik futam után Móricka összesen 50 filléernél többet nyert?

67. Jelöljük  $A$ -val azt a véletlen eseményt, hogy Jancsi elvégzi a fizikus szakot,  $B$ -vel pedig, hogy Juliska bölcsészdiplomát szerez. Mivel Jancsi és Juliska jóban vannak, ezért ezek az események nem feltétlenül független események. Bizonyítsuk be, hogy

$$|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4} \quad ()$$

68. Juan Antonio Samaranch és Jaques Rogge a dopping ellenes harc hatékonyabbá tételén tanakodnak.  $N$  versenyző mindegyikét meg akarják

vizsgálni, de költség- és időtakarékoságból a következő mellett döntenek:  $k$  versenyző vérmintáját összeöntik, majd az összekevert mintán egyszerre elvégzik a doppingtesztet. Tegyük fel, hogy a teszt minden versenyzőre  $p$  valószínűséggel pozitív. Ha az eredmény az együttes mintán negatív, akkor elegendő volt  $k$  emberre egyetlen tesztet elvégezni; ha viszont pozitív, akkor ezek után külön meg kell vizsgálni minden mintát.

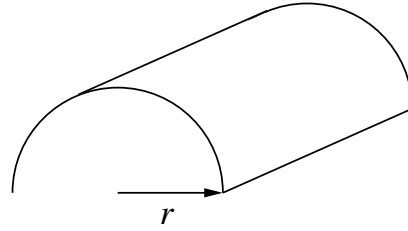
- (a) Segítsük kiszámolni, hogy mennyi lesz a vizsgálatok számának  $M_k$  várható értéke, ha  $k$  osztója  $N$ -nek?
- (b) A takarékoság jegyében adjuk meg azt is, hogy  $k$  mely értékénél lesz  $M_k$  minimális?

69. Az új Nemzetiben új ruhatárost alkalmaztak, akivel elfelejtették közölni, hogy nemcsak a vendégeknek kell ruhatárjegyet adni, hanem a kabátoknak is. Pistike az Ember tragédiája utáni katarzisban megérkezik a ruhatárhoz, ahol még  $N$  kabát várja gazdáját. A ruhatáros eddigre már rájött, hogy a kiosztott ruhatárjegyek számára semmiféle információt nem hordoznak, ezért véletlenszerűen hozza ki a kabátokat. Ha egy kabát kihozatala  $T$  ideig tart, várhatóan mennyi ideig vár Pistike a kabátjára, feltéve, hogy a ruhatáros

- (a) megjegyzi, hogy melyik kabátot mutatta már meg Pistikének?
- (b) annak biztos tudatában, hogy másnap kirúgják annyira leitta magát, hogy azt sem tudja, az melyik kabátot hozta ki az imént?

70. Egy pontszerű sugárforrásból a síkban minden irányban egyenletes eloszlással részecskék indulnak ki. Mi lesz a becsapódó részecskék eloszlása a forrástól  $d$  távolságban elhelyezett egyenesen?

71. Móricka és Pistike a szakadó eső előtt egy félhenger alakú buszmegállóba menekül. Miután megállapították, hogy az eső teljesen egyenletesen esik függőleges irányból, azon kezdenek el gondolkodni, hogy vajon milyen eloszlás szerint nedvesedik a buszmegálló fala. Tényleg, vajon, milyen eloszlással?



72. Fánkokat készítünk, a tésztába egyenletesen mazsolákat szórunk bele, és jól összegyúrjuk. Hány mazsolát számoljunk egy fánkra legalább, ha azt szeretnénk, hogy átlagosan 100 fánkból legfeljebb csak egyben ne legyen mazsola?
73. A koordinátarendszer  $x$  tengelyén a  $[-1, 1]$  intervallumon egyenletes valószínűséggel felvesszünk egy pontot. Mi ennek a pontnak és a  $(0, 1)$  koordinátájú pont távolságának a sűrűségfüggvénye?
74. Egység sugarú, kör alakú céltáblára lövünk. A találat valószínűsége a céltáblán egyenletes eloszlású. A céltáblát koncentrikus körökkel három egyenlő részre osztjuk. Mekkora legyenek a körök sugarai, hogy minden részbe egyenlő valószínűséggel essen találat?
75. A  $[0, 1]$  intervallumon vegyünk fel egyenletes eloszlással egy pontot. A nulla és a pont között ismét vegyünk fel egy másik pontot szintén egyenletes eloszlással. Mi lesz az így kapott három szakasz közül a bal szélső hosszának eloszlásfüggvénye, sűrűségfüggvénye, várható értéke?
76. Egy bankjegyautomatánál a meghibásodás bekövetkezésének valószínűsége a  $(t, t + \Delta t)$  időintervallumban  $\lambda t^2 \Delta t$ , feltéve, hogy  $t$ -ig jól működött. Határozzuk meg a meghibásodás pillanatának eloszlásfüggvényét!
77. Egy négyzet területén és belsejében kiválasztunk véletlenszerűen egy-egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy a közöttük levő távolság kisebb a négyzet oldalhosszánál?
78. A  $[0, a]$  intervallumon egyenletes eloszlással választunk  $n$  számot.
- (a) Adjuk meg a  $\xi_{\max} = \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvényét!



(b) Mutassuk meg, hogy az

$$\hat{a}_n = \frac{n}{n+1} \xi_{\max}$$

statisztika torzítatlan becslése az  $a$  paraméternek!

79. Móricka egyik rémálmában a  $(\xi, \eta)$  kétdimenziós vektorváltozó sűrűségfüggvényét látja lelki szemei előtt:

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{4x^2+1-2y+y^2}{8}} \quad (-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty).$$

Végül arra ébred, hogy álmában kiszámolta a  $\xi + \eta$  várható értékét és szórását. Mit kapott eredményül?

80. Az egyetem  $n$  hallgatója egyenletes eloszlással választ egy számot a  $[0; 1]$  intervallumon. Mi a legnagyobb választott szám eloszlása, sűrűségfüggvénye, várható értéke és szórása?

81. Pistike egy  $N$  emeletes ház legfelső szintjén lakik. Jelölje  $A_i$  azt az eseményt, hogy a lift elakad az  $i$ -edik emeleten,  $P(A_i) = p_i$  ennek a valószínűségét. Az  $A_i$  események egymást nyilvánvalóan kizárják. Tegyük fel azt is, hogy minden használatkor  $A_i$ -k egymástól függetlenül következhetnek be. Mennyi a valószínűsége, hogy  $n$  számú használat során előbb akad el Pistike az 1. emeleten, mint bárhol másutt.

82. Mint tudjuk, a gömbtükörnek nincs határozott gyújtópontja. Vizsgáljuk az esetet síkban! Vegyük az egységkör egyharmadát, és egy, a szimmertiatengelyével párhuzamos, homogén fénynyalábbal világítsuk meg a belső ívét! Határozzuk meg a körív belső felületéről visszavert fény eloszlásának sűrűségfüggvényét a szimmertiatengely mentén!

83. Pistike egy szabálytalan pénzérmét dobál: a fej valószínűsége legyen  $p$ . Jelölje  $\xi$  az első csupa fej vagy csupa írás sorozat hosszát,  $\eta$  pedig az

első fej-sorozatot követő írás-sorozat, vagy az első írás-sorozatot követő fej-sorozat hosszát. Pistike a generátor-függvények segítségével fejben kiszámolja a  $\xi$  és az  $\eta$  várható értékét és szórását, és meglepő eredményre jut. Min lepődött meg Pistike?

84. Az egyetemen a vizsgaidőszakban egy adott  $\Delta t$  hosszúságú időtartam alatt megjelent hallgatók száma Poisson-eloszlású valószínűségi változó  $\lambda$  paraméterrel. Egy hallgató  $p$  valószínűséggel vizsgázik éppen. Mennyi a valószínűsége, hogy adott  $\Delta t$  időintervallumban éppen  $k$  hallgató vizsgázik az egyetemen?

85. Egy sötét pincében  $n$  darab sörösrekesz, minden rekeszben  $n$  számú sörösüveg van. Az  $i$ -edik rekeszben  $i$  teli üveg található. Egy házibuli alkalmával lemegyünk a pincébe sörért, és az egyik, véletlenszerűen kiválasztott rekeszből véletlenszerűen kiemelünk egy sörösüveget. Ez szerencsénkre éppen tele van. Mi a valószínűsége, hogy ha a kiválasztott rekeszt felvisszük a buliba, akkor rajtunk kívül még legalább  $k < n$  cimboránknak jut egy-egy üveg sör?

86. Az egyetemisták között a szeszfogyasztók arányát vizsgáljuk. Hány hallgatót kell megkérdeznünk ahhoz, hogy a felmérés alapján kapott arány a valódi aránytól 95% valószínűséggel legfeljebb 0.01-del térjen el?

87. Pistike egy valószínűségszámítás zárthelyin a következő integrált írta fel megoldásként:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-2)^2}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{4}} dx.$$

Mi lehetett a feladat, és mit kapott eredményül, ha maximális pontot kapott a feladatra?

88. Pistike és Mórica egymástól függetlenül ugyan azt a mérést végzik a másodéves fizikus laborgyakorlaton. Pistike  $\mathcal{N}(m, \sigma_1)$ , Mórica pedig

$\mathcal{N}(m, \sigma_2)$  eloszlású véletlen mintából számolja a  $\bar{\xi}_1$  illetve  $\bar{\xi}_2$  átlagokat. A mérés kiértékelését közösen végzik, és azon tanakodnak, hogy milyen súllyal vegyék figyelembe  $\bar{\xi}_1$ -et és  $\bar{\xi}_2$ -t az  $m$  paraméter becsléséhez.

(a) Mutassuk meg, hogy tetszőleges  $0 < \alpha < 1$  paraméterre

$$\alpha \bar{\xi}_1 + (1 - \alpha) \bar{\xi}_2$$

az  $m$  paraméter torzítatlan becslése!

(b) Igazoljuk, hogy ez a becslés akkor lesz minimális szórású, ha

$$\alpha = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}!$$

89. Bill Gates úgy döntött, hogy megjutalmazza Pistikét a Fagyálló Ablakok kifejlesztéséért. Két borítékot tett Pistike elé, és azt mondta, hogy az egyik borítékban kétszer akkora értékű csekk található, mint a másikban. Pistike kiválaszthatta az egyiket, majd a látott összeg alapján dönthetett, hogy a választott összeget kapja, vagy a másikat.

Pistike így okoskodott: „Tegyük fel, hogy a kiválasztott borítékban  $x$  összeget találok. Mivel 50% eséllyel  $2x$ , 50% eséllyel pedig  $1/2x$  lesz a másik borítékban, ezért várható értékben  $1.25x$ -et vághatok zsebre, ha a másikat választom. Tehát bármelyiket is választanom elsõre, érdemes inkább a másikat választanom...”

És Pistike csak állt, állt, boldogan állt, míg meg nem halt.

(a) Mi volt a hiba Pistike okoskodásában?

(b) Van-e helyes stratégia?

90. A BKV éves jelentésében az szerepel, hogy a metrószerelvények követési idejét  $F(x)$  eloszlásfüggvény jellemzi  $\mu$  várható értékkel és  $\sigma$  szórással. Pistike kísérleti úton ellenõrzi a jelentést. Jelölje  $\xi$  valószínűségi változó azt az időtartamot, amennyit Pistikének várnia kell *egy véletlenszerűen kiválasztott időpontban* a következő metrójáratig.

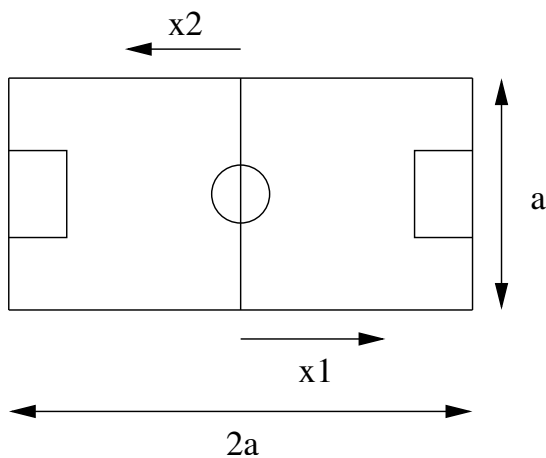
(a) Adjuk meg  $\xi$  sűrűségfüggvényét!

- (b) Pistike naívan azt gondolja, hogy a  $\mu$  átlagos követési időt jól közelítheti a  $\bar{\xi}$  átlagos várakozási idővel, ha elég sok mérést végez. Számoljuk ki a  $\langle \xi \rangle$  várható értéket, és mutassuk meg, hogy Pistike téved!
- (c) Adjuk meg  $\langle \xi \rangle$  várható értéket exponenciális eloszlású követési idők esetén!
91. Miután Pistike rájött, hogy mi is volt a probléma az előző elméletével, most egy másik mérési módszert alkalmaz. Nem véletlenszerű időpontokban vizsgálja a metrójáratokat, hanem egy adott pillanattól folyamatosan. Tegyük fel, hogy az egyes szerelvények között exponenciális időtartamok telnek el, ugyanazzal a  $\lambda$  paraméterrel.
- (a) Ha a megfigyelést a „nulladik” szerelvénytől kezdve végzi, akkor milyen lesz a megfigyelés kezdőpontjától az  $n$ -edik szerelvény érkezéséig eltelt időtartam eloszlása? (Tegyük fel, hogy ez egyes szerelvények között eltelt időtartamok függetlenek.)
- (b) Állapítsuk meg a  $(0, t)$  időintervallum alatt érkező metrószerelvények számának valószínűségeloszlását!
92. Míg Pistike a BKV-t tanulmányozza, Mórickát a Magyar Posta, pontosabban Dezső, a helyi postás munkarendje foglalkoztatja. Móricka tudja, hogy Dezső mikor kezdi a munkát, de azt nem, hogy mikor fejezi be. Dezső kissé fura munkamódszerei közé tartozik, hogy teljesen rendszertelenül keresi fel a címzetteket, azaz munkaideje – az  $[a, b]$  időintervallum – alatt egyenletes eloszlással bármikor kihozhatja a leveleket. Móricka az ismeretlen  $b$  paramétert a legkésőbb kikézbesített levél kézbesítési időpontja alapján próbálja megbecsülni.
- (a) Adjuk meg azt a statisztikát, ami a fenti mérés alapján torzítatlan becslést ad  $b$ -re!
- (b) Mutassuk meg, hogy ez a becslés erősen konzisztens is!
- (Megjegyzés: az egyszerűség kedvéért válasszuk az  $a$  paraméter értékét 0-nak.)

93. Egy fizikus hallgató az elmúlt hétvégén a XI. túlélőversenyen küzdött az életbenmaradásért. Az életére főként különféle élősködők törtek. A hétvége alatt  $n$  szúnyog vette vérét (ennyi szúnyogcsípést számolt meg otthon magán), és ezek közül  $k$  dögöt csapott agyon út közben. Adjunk Maximum-likelihood becslést a vérszívók sikeres elhárításának  $p$  valószínűségére.
94. „Egy könnyű nyári délutánon Jancsi megkérdezte Juliskától:  
 – Szerinted igaz, hogy ha  $\hat{P}_n$  egy  $p$  ( $0 < p < 1$ ) valószínűségű esemény relatív gyakorisága, akkor  $\hat{P}_n^2$  torzítatlan becslése  $p^2$ -nek?  
 Juliska hosszasan elgondolkodott, majd azt mondta:  
 – Persze!”  
 Igaza volt Juliskának, vagy tévedett?
95. Tanulmányozzuk a partjelzők viselkedését a focipályán! Jelölje  $\xi_1$  az első,  $\xi_2$  a második partjelző távolságát a felezővonalától. Tegyük fel, hogy a partjelzők két ellentétes térfél egymással szemközi oldalvonalán mozognak, és  $\xi_1$   $\xi_2$  együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x_1, x_2) = A - A \left| 1 - \frac{x_1 + x_2}{a} \right|, \quad x_1, x_2 \in [0, a],$$

ahol  $a$  az oldalvonal hosszának fele (Ld. ábrát!).



- (a) Adjuk meg az  $A$  paraméter értékét!
- (b) Számoljuk ki  $\xi_1$  és  $\xi_2$  korrelációs együtthatóját!
- (c) Adjuk meg a két partjelző egymástól mért távolságának várható értékét!
96. Hófehérke megfigyelte, hogy Hapci, a hét törpe egyike a  $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$  véletlen időpontokban tüsszent. Felteszi, hogy két tüsszentés között eltelt  $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) idők függetlenek, azonos eloszlásúak és  $\mathbb{M}(\delta_i) = m$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) létezik. Jelölje  $\nu_t$  Hapci  $[0, t)$  időintervallum alatti tüsszentéseinek számát. Bizonyítsuk be, hogy  $\frac{\nu_t}{t}$  sztochasztikusan konvergál az  $\frac{1}{m}$  értékhez ( $t \rightarrow \infty$ )!
97. Atom Antit, a pontszerű hangyát véletlenszerűen, a síkban egyenletes eloszlással behelyezzük az egységnégyzet belsejébe. Mivel Atomanti ebben a feladatban nem olyan kemény legény, mint szokott lenni, legszívesebben a legközelebbi sarokba bújna. Felvetődik tehát a triviális kérdés: mi Atomanti legközelebbi saroktól való távolságának eloszlás és sűrűségfüggvénye?
98. A gyakvezér hazatért a síelésből, és a következő tapasztalatokat szerezte: ha a mellette síelő Móricka a fekete jelzésű buckás pályán próbálkozott, akkor annak valószínűsége, hogy Móricka a  $[t, t + dt[$  időintervallumban a legközelebbi buckában landolt, arányos volt a pályán töltött  $t$  idővel és a  $dt \ll t$  időtartammal. Mi Móricka bukásának eloszlás és sűrűségfüggvénye?
99. Atom Antit, a pontszerű hangyát véletlenszerűen, a térben egyenletes eloszlással behelyezzük az egységkocka belsejébe. Mint ismeretes Atom Anti tud ugyan repülni, de mivel már öregszik, legszívesebben a kocka hat fala közül legközelebbi falhoz bújna. Nyilvánvalóan felvetődnek a következő kérdések:
- (a) Mi Anti és a legközelebbi fal közötti távolság sűrűség- és eloszlásfüggvénye?

(b) Ha Anti egységnyi sebességgel, egyenesvonalú egyenletes mozgással a legrövidebb úton a legközelebbi falat célozza meg, akkor várhatóan mennyi ideig fog repülni a legközelebbi falig?

100. Nelson admirális csatába indul. A legnagyobb távolság eléréséhez a hajóágyúkat  $45^\circ$ -os szögbe állíttatja. A személyzet változó teljesítménye, a puszkapor változó minősége, a szél és más ismeretlen hatások miatt az ágyúgolyó kezdeti sebessége egy

$$\varrho(v) = \begin{cases} \frac{(v/v_0)^\alpha}{v_0\Gamma(\alpha+1)} e^{-v/v_0}, & \text{ha } v \geq 0, \\ 0, & \text{ha } v < 0 \end{cases}$$

eloszlású valószínűségi változóval adható meg, ahol  $\Gamma(x)$  a gamma-függvényt jelöli, valamint  $v_0 > 0$  és  $\alpha > 0$ . Adjuk meg az ágyúgolyó becsapódási helyének várható értékét és szórását, ha  $v_0 = 10\text{m/s}$ ,  $\alpha = 5$  és a légellenállást elhanyagoljuk!

101. Detektorral részecskék élettartamát mérjük. A részecskék élettartama  $\lambda$  paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változóval adható meg. A detektor azonban elromlott és az élettartamnak csak a tizedesveszű utáni számjegyeit írja ki, azaz csak az élettartam törtrészét tudjuk mérni. Mi lesz a mért értékek sűrűségfüggvénye?

102. A gyakorlatvezetők szobájába új nyomtató érkezett. Murphy szerint „ami elromolhat, az el is romlik”, így van ez az új nyomtatóval is: minden oldal kinyomtatása során  $p$  valószínűséggel a nyomtató visszaadja lelkét a teremtőjének. Ekkor az adott oldal már ki sem jön a nyomtatóból. Másrészt az a bölcsesség is igaznak bizonyult, hogy tévedni emberi dolog, és ez a gyakorlatvezetőkre is vonatkozik:  $q$  valószínűséggel hibás oldalt küldenek a nyomtóra. A hibás oldalt mindig a nyomtató mellé teszik. A nyomtató meghibásodása, és a gyakorlatvezetők figyelmetlensége egymástól független események.

Tegyük fel, hogy elromlott a nyomtató, és a szerelő

(a) egyetlen elrontott oldalt sem talál

(b)  $k$  darab elrontott oldalt talál

a nyomtató mellett. Mi a valószínűsége, hogy a nyomtató meghibásodásáig  $n$  oldalt nyomtattak a gyakorlatvezetők?

103. Egységnyi szakaszon egyenletes valószínűséggel kiválasztunk két pontot. Az így kapott három szakaszból a középső és a jobb szélső hosszának határozzuk meg a korrelációs együtthatóját!
104. Tegyük fel, hogy egy részvény értéke a tőzsdén minden nap  $r$  vagy  $1/r$ -szeresére változik 50-50%-os eséllyel. Mi lesz sok idő ( $N \gg 1$  nap) múlva a részvény értékének eloszlása?
105. Az ötödik osztályos tanulók testmagassága átlagosan 145 centi, 15 centi szórással. Becsüljük meg, hogy legfeljebb hány tanuló lesz 130 centinél alacsonyabb egy 30 fős osztályból.
106. Egységnyi szakaszon vegyünk fel egyenletes eloszlással egy pontot. A nulla és az így kapott pont között ismét vegyünk fel egy pontot egyenletes eloszlással. Határozzuk meg az így kapott három szakasz közül a két szélső korrelációs együtthatóját!
107. Az ideális gáz molekuláinak sebessége Maxwell-eloszlású valószínűségi változó. Sűrűségfüggvénye:

$$f(v) = \begin{cases} 0, & \text{ha, } x < 0 \\ \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} v^2 e^{-v^2 h^2}, & \text{ha, } x \geq 0, \end{cases}$$

ahol  $h > 0$  paraméter. Számítsuk ki a sebesség

- (a) legvalószínűbb értékét,  
(b) várható értékét!
108. Mekkora az esélye, hogy egy 52 lapos francia kártya paklit megkeverve a legfelső négy lap ász lesz?
109. Jenő és Csaba egyformán ügyes ping-pong játékosok. Melyik valószínűbb, hogy Jenő négy meccsből pontosan hármat megnyer, vagy hogy Csaba nyolc meccsből pontosan ötöt megnyer?
110. Ellenőrizzük az alábbi műveleti azonosságokat:



- (a)  $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
- (b)  $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
- (c)  $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
- (d)  $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$
- (e)  $A + A \cdot B = A$
- (f)  $A(A + B) = A$
- (g)  $A \setminus B = A \cdot \overline{B}$

111. Van két 52 kártyából álló paklink. Mind a két paklit külön-külön jó alaposan megkeverjük, majd felváltva kártyákat húzunk belőlük. Mekkora a valószínűsége, hogy...
- (a) ... ugyanazt a kártyát húzzuk ki egyszerre mindkét pakliból?
  - (b) ... elfogy mind a két pakli anélkül, hogy egyszer is ugyanazt a kártyát húztuk volna egyszerre a két pakliból?
112. 8 bástyát véletlenszerűen elhelyezünk egy sakktáblán. Mi a valószínűsége, hogy egyik sem üti a másikat?
113. Jenő és Csaba az előző heti második feladatból negyed óra alatt szokott megebédelni dél és délután kettő között az egyetem menzáján. Mekkora az esélye annak, hogy összefutnak?
114.  $(0, 1)$  intervallumból válasszunk ki találmra egy  $x$  pontot. Mekkora a valószínűsége, hogy egy  $x, 1 - x$  és egy  $1/2$  hosszúságú szakasszal egy háromszöget lehet alkotni?
115. Egy kör kerületén véletlenszerűen kiválasztunk három pontot. Mekkora a valószínűsége, hogy a három pontból alkotott háromszög tartalmazza a kör középpontját?
116. Egy  $R$  sugarú gömbben találmra, és egymástól függetlenül elhelyezünk  $N$  darab pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a középpont és a hozzá legközelebbi pont távolsága legalább  $r$ ?

117. Jenő távoli amerikai rokona (Kylie) annak ellenére, hogy vadászpilótának készül, nem túl ügyesen parkol. Tolatva próbál beállni  $\gamma$  szögben egy hosszú, egyenes mentén elhelyezkedő oszlopsor  $r$  sugarú oszlopai közé, ahol az oszlopok tengelyeinek távolsága  $d$ , míg a kocsí szélessége  $l$ . Mekkora az esélye, hogy elkaszál egy oszlopot? Mennyi ez a valószínűség akkor, ha  $\gamma$  tolatási szög egyenletes eloszlású  $[0, \pi]$  tartományon?
118. Válasszuk ki  $X, Y$  pontokat egymástól függetlenül  $(-1, 1)$  tartományban egyenletes eloszlás szerint. Tekintsük az alábbi másodfokú egyenletet:

$$x^2 + Xx + Y = 0$$

Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a gyökök valósak!

119. Oldjuk meg a 116. feladatot  $D$  dimenziós gömbre! Mihez konvergál a valószínűség, ha  $R \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$  és  $r$  értéke  $R$ -től és  $N$ -től úgy függ, hogy létezik

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ R \rightarrow \infty}} \frac{Nr^D}{R^D} = x$$

véges pozitív határérték?

120. Írjunk egy programot, amely kiszámolja a  $\pi$  értékét! Ehhez vegyünk egy egység oldalú négyzetet, és egy azzal átfedő egység átmérőjű kört, majd a négyzetbe véletlenszerűen szórjunk  $N$  pontot. Az egyes területekre eső pontok arányát használjuk fel a számításhoz. Milyen pontosságú lesz az eredményünk, ha  $10, 10^2 \dots 10^6$  pontot használunk fel? Az eredményt ábrázoljuk log-log skálán!
121. Egy véletlenszerűen kiválasztott hallgató első zéhán 20%, a másodikon 32%, a pótzéhán pedig 61% valószínűséggel bukik meg, amennyiben egyáltalán megjelenik rajtuk. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ez a hallgató...
- (a) ... a két ZH valamelyikét elbukja? (Feltételezzük, hogy a zéhákon való átjutás egymástól független események.)

- (b) ... év végén megszerzi a gyakorlat jegyet úgy, hogy mind a két ZH-n megjelenik?
- (c) ... év végén úgy szerzi meg a gyakorlat jegyet, hogy az első ZH-n nem jelenik meg?
122. Mekkora annak a valószínűsége, hogy...
- (a) ... két, egymástól függetlenül kitöltött ötöslottó szelvény között van négy találatos?
- (b) ... az egymástól függetlenül kitöltött szelvények  $n$  számától hogyan függ a pontosan  $k$  találatos szelvények előfordulásának valószínűsége?
123. Legyen  $(1 - p)p^n$  a valószínűsége, hogy egy adott évben  $n$  politikus bonyolódik korrupciós ügybe, és  $q$  a valószínűsége, hogy egy ilyen ügyből botrány robban ki. Feltéve hogy  $N$  botrány robbant ki egy évben, és egy politikushoz pontosan egy ügy tartozik, mekkora az esélye annak, hogy eredetileg  $n$  korrupciós ügy volt?
124. Legyenek  $A_1, A_2, \dots, A_n$  teljesen független események. Legyen  $\mathcal{P}\{A_k\} = p$  konstans minden  $k$ -ra. Mekkora a valószínűsége  $\sum_{i=1}^n A_i$ -nek? Milyen számhoz tart ez a valószínűség, ha  $p = q/n$  és  $n$  tart végtelenhez?
125. Kitöltve  $N$  ötöslottó szelvényt úgy, hogy egy szám sem szerepel kétszer, mekkora egy pontosan  $k$  találatos szelvény előfordulásának a valószínűsége?
126. A magyar emberek 57 %-a barna szemű, és a barna szem domináns tulajdonság (vagyis ha örököljük a megfelelő gént valamelyik szülőnktől, akkor mi is barna szeműek leszünk). Feltéve, hogy ez az arány már több generáció óta nem változott, és az emberek szemszínétől függetlenül választanak párt maguknak, mekkora a valószínűsége annak, hogy egy barna szemű magyar párnak barna szemű utódja születik?
127. Szindbádnak jogában áll  $N$  háremhölgy közül kiválasztania egyet oly módon, hogy az előtte egyenként elvonuló hölgyek valamelyikére rámutat. Tegyük fel, hogy egyértelmű (szigorúan monoton) szépség szerinti sorrendet tud megállapítani az előtte elvonuló hölgyek között, és

hogy a háremhölgyek bármely elvonulási sorrendje egyformán valószínű. Szindbád  $k$  számú hölgyet elenged, majd a továbbiak közül kiválasztja az elsőt, aki szebb az összes előtte elvonultaknál.

- (a) Mennyi a valószínűsége, hogy a legszebb hölgyet választja így ki?
- (b) Milyen  $k$ -ra lesz a legnagyobb a valószínűsége annak, hogy a legszebb hölgyet választja ki, ha  $N$  elég nagy?

128. Csaba és Jenő egy valszám példával kapcsolatban  $p$ , illetve  $q$  valószínűséggel mondanak igazat. Feltéve, hogy Csaba azt állítja Jenőről, hogy hazudik, mekkora az esélye, hogy Jenő mégis igazat mond?

129. Tegyük fel, hogy egy vizsgán olyan tesztsort adnak fel, ahol 100 kérdés mindegyikére 5 lehetséges válasz van. Ideális esetben ha egy vizsgázó tudja a helyes választ, akkor bejelöli. Ha nem, akkor véletlenszerűen választ egyet. Vizsga után a hallgatókat kifaggatva kiderült, hogy 10-en tudták pontosan 90 kérdésre a választ, 12-en 82 és 15-en 80 kérdésre a választ. Mekkora az esélye annak, hogy egy 91 pontra kitöltött tesztet egy olyan hallgató adott be, aki 90 kérdésre tudta a választ?

130. Válasszunk ki az  $[1, N]$  halmazon véletlenszerűen  $k < N$  darab egész számot. Mi a legkisebb szám eloszlása?

131. A Csillagflotta és a Borg Wolf 359-es rendszerbeli ütközetében minden egyes föderációs hajót minden percben pontosan  $n = 10$  találat ér, és minden egyes találat a többi találattól függetlenül  $p = 0,1$  valószínűséggel kritikus. Egy hajó akkor semmisül meg, ha egy adott percben legalább három kritikus találat éri. (A korábbi percek találatai nem számítanak, hiszen az erőtér úgyszólamint regenerálódik.)

- (a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy hajó legalább  $t$  percet túlél ebben a csatában?
- (b) Tudjuk, hogy a hajók számának időfüggését jó közelítéssel az alábbi függvény írja le:

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

ahol  $N_0$  a hajók száma a csata elején. A fentiek alapján számold ki a túlélés  $\tau$  karakterisztikus idejét!

132. Vizsgáljuk meg az alábbi populáció dinamikát: A generációk sorban követik egymást, és egy generációban minden egyes egyed egymástól függetlenül  $\lambda$  paraméterű, Poisson-eloszlás szerinti számú utódot hoz létre. Jelölje  $N_0$  a 0. generáció méretét. Mekkora a valószínűsége, hogy a populáció a  $k$ . generációban még nem pusztult ki? Mikor lesz ez a valószínűség  $k \rightarrow \infty$  határesetben 0?
133. Generáljunk irányítatlan Erdős-Rényi gráfokat <sup>1</sup>  $N = 100$  csúcson,  $p = \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{5}{10}, \frac{9}{10}, \frac{99}{100}$  élbekötési valószínűségek mellett.
- (a) Gráfonként ábrázoljuk a várt, és a kapott fokszám-eloszlásokat!
  - (b) Mutassuk meg, hogy fix  $N$  és  $p$  mellett egy adott  $d$  fokszámhoz tartozó csúcsok  $n_d$  száma jó közelítéssel binomiális eloszlású! Mikor térhet el ez a binomiális eloszlástól? Miért? Mutass példákat!
134. Mióta az ELTE-n is bevezették a Neptunt, a Műegyetemisták előszere-tettel játsszák az alábbi játékot az ELTE-sekkel: Ha a Műegyetemista Neptun-kódja ABC rendben megelőzi az ELTE-s hallgatóét, akkor az ELTE-s hallgatónak meg kell hívnia a Műegyetemista hallgatót egy sörre. Ha nem, akkor feldobnak egy kockát. Ha a dobott szám hatos, ismét a Műegyetemista nyer, de ezúttal már két sört. Ha hatnál kisebb, akkor az ELTE-s hallgatónak jár két sör.
- (a) Méltányos-e ez a játék, ha a Neptun-kódok eloszlása egyenletes mindkét egyetemen, és mindenki a Neptun-kódjától függetlenül szeret játszani? (Az ELTE-sék vagy a BME-sék nyernek várhatóan több sört rajta?)
  - (b) Ha Te játszánád a játékot egy véletlenszerűen kiválasztott Műegyetemistával, mennyi lenne az általad nyert sörök számának várható értéke?

---

<sup>1</sup>[http://hu.wikipedia.org/wiki/Erdős-Rényi\\_model](http://hu.wikipedia.org/wiki/Erdős-Rényi_model)

(A számok megelőzik a betűket az ABC-ben, de hanyagoljuk el azt az esetet, amikor a Műegyetemista hallgató Neptun-kódjának első karaktere megegyezik a tiédde! A Neptun-kódok első karaktere mindig betű.)

135. Határozzuk meg az ötöslottó találatok várható értékét egy véletlenszerűen kitöltött szelvény esetén!
136. A múlt héten láttuk, hogy a Wolf 359-esnél lejátszódó ütközetben a Föderációs hajók számának időfüggése az alábbi:

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

ahol  $\tau = 13,7$ perc.

- (a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy hajó az első 10 perc alatt megsemmisül? Feltéve, hogy túléli az első 10 percet, mekkora az esélye, hogy a második 10 percet is túléli?
- (b) Mi egy véletlenszerűen kiválasztott hajó élettartamának várható értéke?
137. Egy kör átmérőjét közelítőleg megmérjük. Ha feltesszük, hogy a kerület  $(a, b)$  intervallumon egyenletes, milyen a kör területének eloszlása és várható értéke?
138.  $\chi$  és  $\psi$  két egymástól független, uniform eloszlású valószínűségi változók.  $\alpha$  paraméter mely értéke mellett nulla az alábbi függvény várható értéke?

$$f(\chi, \psi) = \begin{cases} (\chi - \psi) & \text{ha } \chi < \psi \\ \alpha(\chi - \psi)^2 & \text{ha } \chi \geq \psi \end{cases}$$