Gyakorló feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy ha A,B,C események páronként függetlenek, és A független B+C -től, akkor A,B,C teljesen függetlenek!

2. Mongol szakon az egyetemi felvételik során öt jelöltet vettek fel idén. A nagy kavarodásban azonban idén véletlenszerûen kerültek az értesítések a borítékokba. Mi a valószínûsége, hogy

   (a) legalább három,

   (b) legalább két borítékba a megfelelõ értesítés került?

3. Egy a oldalhosszúságú szabályos háromszög belsejében egyenletes eloszlással véletlenszerûen kiválasztunk egy pontot. Mi ennek a pontnak és a hozzá legközelebbi oldal távolságának eloszlásfüggvénye?

4. Ketten asztaliteniszt játszanak, mindkét játékosra nézve $1/2$ annak a valószínűsége, hogy egy pontot szerezzen, és az egyes pontok nyerései egymástól függetlenek. Mennyi annak a valószínşége, hogy a játék valamelyik fél 23:21 arányú nyereségével ér véget? Es annak, hogy 24:22 lesz az eredmény?

5. Egy urnában van 6 piros és 4 fehér golyó. Ezek közül véletlenszerűen kiválsztunk 3-at és elhelyezzük egy másik urnába. Innen egymás után visszatevéssel húzunk 5-ször. Mennyi annak a valószínűsége, hogy
   a) az 5 húzás közül 2 esetben húzunk pirosat?
   b) a második urnában 2 piros van, feltéve, hogy 5-ször húztunk pirosat?

6. Egy irásbeli vizsgán az egyik tesztkérdésnél három válasz közül kell a helyeset kiválasztani. A vizsgázók p valószínűséggel tudják, 1-p valószínűséggel nem tudják a helyes megoldást, ilyenkor találomra választanak a három lehetőség közül. Milyen valószínűséggel találunk olyat a helyesen válaszolók között, aki ténylegesen tudta a helyes megoldást?

7. A házunk előtt talalható két telefon közül az egyik jól működik, a másik viszont 20% valószínűséggel elnyeli a pénzérmét, de nem tudjuk melyik.

Lemegyünk az egyikhez telefonálni, és azt tapasztaljuk, hogy n bedobott pénzérméből egyet sem nyelt el. Mi a valószínűsége, hogy sikerült a jó telefont választanunk?

8. Mennyi a valószínűsége, hogy a bridzslapokat találomra szétosztva
   a) minden játékos egyszínű lapot kap?
   b) valamelyik játékos egyszínű lapot kap?
   c) egy meghatározott játékos lapeloszlása 6,4,2,1?
   d) mind a négy ász egy meghatározott játékoshoz kerül?
   e) egy meghatározott játékosnál két ász és két király van?

9. Céllövést hajtunk végre téglalap alakú céltáblára, ahol $-2 \leq z \leq +2$; $-1 \leq y \leq +1$. A kisérlet megfigyelt eredménye a találat (z,y) koordinátái. (A lövés feltételei olyanok, hogy a táblát biztosan eltaláljuk.) Meghatározandók az alábbi események valószínűségei:
   a) az abszcissza nem kisebb az ordinátánál
   b) a koordináták szorzata nem negatív
   c) a koordinťák abszolút értékének összege egynél nagyobb

10. Egy pálcát ketté törünk, majd a nagyobbik darabot megint ketté törjük. Mi a valószínűsége, hogy az így kapott három pálcából háromszöget lehet csinálni?

11. Egyes vidékeken az a babona járja, hogy ha egy lány 6 fűszálat fog a markába úgy, hogy mindkét végén kilógjanak a szálak, majd egy társa mindkét oldalon páronként összecsomózza a fűszálakat, s ha egy zárt lánc keletkezik, következő évben férjhez megy. Mi a valószínűsége az eseménynek, ha a babona igazat mond? Általánosítsuk az eredményt 2n fűszálra!

12. n+1-szer dobunk pénzérmével. Mi a valószínűsége annak, hogy minden dobásnak van ugyanolyan szomszédja (azaz vagy az előtte, vagy az utána következő dobás ugyanolyan mint a vizsgált dobás)?

13. Legyen ξ és η két, azonos eloszlású, független valószínűségi változó, közös sűrűségfüggvényük: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Bizonyítsuk be, hogy a (ξ, η) véletlen helyzetű síkbeli pont $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, $\phi = \arctan \frac{\eta}{\xi}$ polárkoordinátái függetlenek és határozzuk meg ezek sűrűségfüggvényéit!

14. A $[0,1]$ intervallumban véletlenszerűen választunk egy számot. Mennyi a valószínűsége, hogy a szám harmadik tizedesjegye 5 ?

15. Egy nem ideális autóguminál a defekt bekövetkezésének valószínűsége a $(t, t+\tau)$ intervallumban, feltéve, hogy eddig nem volt defekt, arányos a gumi korával és az intervallum hosszával, $(\alpha \cdot t \cdot \tau)$, ha τ elég kicsi. Határozzuk meg a defekt pillanatának sűrűség- és eloszlásfüggvényét!

16. Hányféleképpen lehet kettes találatot elérni a lottón?

17. Egy urna $m_1 + m_2$ golyót tartalmaz, m_1 fehéret és m_2 feketét. Véletlenszerűen kihúzunk (visszatevés nélkül) m $\leq$min(m_1, m_2) golyót. Határozzuk meg az alábbi események valószínűségét
    1. $A = \{$ a kihúzott golyók mind fehérek$\}$
    2. $B = \{$ a kihúzott golyók között pontosan k fehér van, $k \leq m\}$
    3. $C = \{$ a kihúzott golyók között legalább egy fehér van $\}$
    4. $D = \{$ nem kevesebb mint $k \leq m$ fehéret húzunk$\}$

18. Egy forgáskúp belsejében egyenletes eloszlással felveszünk egy pontot. Milyen lesz a vetület helyzetének eloszlás- és sfűségfüggvénye az alaplapon, ha
    a) a kúp magasságvonalával párhuzamosan vetítünk?
    b) a kúp csúcsából vetítünk?

19. Egységnyi szakaszon vegyünk fel három pontot véletlenszerűen! Milyen lesz a középső pont koordinátájának eloszlásfüggvénye, sűrűségfüggvénye, ill. mi a valószínűsége, hogy a pont a $[0.25, 0.75]$ intervallumba esik? Milyen lesz a legnagyobb és a legkisebb pont eloszlás- és sűrűségfüggvénye a fenti példában, illetve ha általánosabban n pontot vettünk fel az egységnyi szakaszon?

20. Legyen ξ és η együttes sűrűségfüggvénye a következő: $h(x, y) = x + y$, ha $1 \geq x \geq 0$, $1 \geq y \geq 0$, és $h(x, y) = 0$ egyébként. Hátározzuk meg $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét!

21. Mennyi annak a valószínűsége, hogy két kockával dobva, a hatodik dobás után lesz először a számjegyek összege 12 ?

22. Van négy urnánk. Az elsőben csupa fehér, a másodikban csupa piros, a maradék kettőben pedig piros és fehér golyók vegyesen úgy, hogy a pirosak részaránya p. Találomra kiválasztunk egy urnát, és három golyót húzunk belőle visszatevéssel. Azt tapasztaljuk, hogy mind a három piros. Mi a valószínűsége, hogy a csupa pirosat tartalmazó urnából húztunk?

23. Házat építünk, de az alap-ásásnál átvágtunk egy vezetéket. Minden egyes napon $1/5$ a valószínűsége annak, hogy a rendes ügymenet keretében a szolgáltató a felelősségbiztosításunk terhére kijavítja a kábelt, függetlenül attól, hogy mennyi ideje várakozunk már. Minden nap várakozás 50 ezer forint kárt okoz nekünk. A szolgáltató alvállalkozója felajánlja, hogy 200 ezer forintért azonnal elhárítja a hibát, folytathatjuk az építkezést. Mikor a legkisebb a várható költségünk: ha
a) megvárjuk, amíg a szolgáltató magától kijön?
b) azzonal kifizetjük az alvállalkozót?
c) két napig várunk, és ha addig nem kerül sor a javításra, akkor megrendeljük az alvállalkozótól?

24. Egy dupla utcai telefonfülke előtt várakozunk. Mindkét fülke foglalt. Az egyikben egy férfi telefonál, a másikban pedig egy nő. A várakozási idő mindkettőre egy-egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó, a férfi esetén λ a nő esetében μ paraméterrel (ahol $\lambda > \mu$). A két várakozási idő egymástól független. Várhatóan mennyi ideig kell várakoznunk, ha
a) addig várunk míg megüresedik egy fülke?
b) meg akarjuk várni míg mindketten befejezik a beszélgetést?

25. Egy gépírónő átlagosan 8 oldalanként vét egy hibát. Mi a valószínűsége, hogy egy oldalt elszúr?

26. Vegyünk fel a $[0,1]$ intervallumon egy pontot a következő eloszlásfüggvénnyel:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \geq x \leq 1 \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

A pont és az 1 között vegyünk fel egy másik pontot egyenletes eloszlással. Határozzuk meg az így kapott három szakasz közül a két szélső korrelációs együtthatóját!

27. N polcra véletlenszerűen felteszünk k darab könyvet. Mi a valószínűsége, hogy egy polcon épp m darab könyv van, ha tudjuk, hogy a vizsgált polc nem üres?

28. Egy városban n ház van. Legyen azon házak száma, amelyekben x_j ember lakik n_j. Ekkor egy házban átlagosan $m = \sum n_j x_j / n$ ember lakik. Visszatevés nélküli mintavétellel kiválasztunk r házat, és megszámoljuk, hány ember lakik a házban $(X_1, X_2, ..., X_r)$. Mennyi az így megszámolt emberek számának $(Y = X_1 + X_2 + ...X_r)$ várható értéke, és szórása?

29. A Holdon, mivel nincs légkör, az ott élő Nonexistimus lunaris baktériumok mutációs rátája, azaz annak a valószínűsége, hogy hibásan másolódik le egy nukleotid az öröklődés során igen nagy, $\mu = 10^{-4}$. Mint tudjuk, minden N. lunaris pontosan 32 utódot hoz létre osztódással (közben ő maga megsemmisül). Eközben hat a mutáció. A hibásan lemásolt DNS láncokat (amelyek mindíg L nukleotidból állnak) hordozó lények nem bírják a viszontagságos körülményeket, elpusztulnak. Határozzuk meg a tulélő utódok számának eloszlását és várhatóértékét! Ha az egy egyedre jutó életképes utódok számának várható értéke 1-nél kisebb, hosszútávon a faj kihalna. Hány nukleotid hosszúságú lehet maximum az N. lunaris DNS-e, hogy ne haljon ki a faj?

30. N embernél vérvizsgálatot végeznek. Tegyük fel, hogy N igen nagy szám. Ha minden ember vérét külön vizsgálnák, N vizsgálatra lenne szükség. Másik megoldás, hogy k ember vérmintáját összegyüjtik és együtt analizálják. Ha a vizsgálat eredménye negatív, akkor egy vizsgálat elég k embernek. Ha pozitív, akkor a k embert egyenként is meg kell vizsgálni, így $(k + 1)$ vizsgálat szükséges. Tegyük fel, hogy a vizsgálat eredménye bárkire ugyanakkora p valószínűséggel pozitív, valamint az egyes emberek sztochasztikusan függetlenek.
a) Mennyi a valószínűsége, hogy k ember véréből összegyüjtött minta pozitív?

b)Mennyi az elvégezendő vizsgálatok számának várható értéke?
c)Írjunk fel olyan egyenletet amellyel megtalalhatjuk azt a k értéket, ami minimalizálja a fenti várható értéket!

31. Egy pénzdarabot 600-szor feldobtunk és 285 esetben volt fej az eredmény. Vizsgáljuk meg a ξ^2 próba segítségével, van-e ellentmondás a $p = \frac{1}{2}$ hipotézis és adataink között!

32. Egy nagy autóparkolóba időegység alatt λ valószínűségel érkezik újabb kocsi, és a bent lévő autók mindegyike μ valószínűséggel távozik el onnan. Mindkét valószínűség független attól, hogy éppen hány kocsi tartózkodik a parkolóban. Irjuk fel azt az egyenletrendszert, ami meghatározza annak a $p_n(t)$ valószínűségét, hogy t idő múlva pontosan n darab kocsi lesz a parkolóban. Irjuk fel a $G(t,z) = \sum_n p_n(t)z^n$ generátorfüggvény egyenletét, és ennek segítségével határozzuk meg a p_n^* stacionárius eloszlást!

33. Legyen ξ egyenletes eloszlású a $(0,a)$ intervallumban, ahol a ismeretlen paraméter. Mutassuk meg, hogy az a paraméter maximum lilkihood becslése $\max(x_1, x_2, ..., x_n)$ és határozzuk meg a torzítás értékét, tehát e becslés várható értékének és az a-nak a különbségét!

34. Legyen ξ és η együttes sűrűségfüggvénye a következő:

$$h(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{ha} \quad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg ξ és η korrelációs együtthatóját.

35. Egy „verekedős” játékautomata l féle ellenfél közül sorsol nekünk partnert minden menet elején. Várhatóan hány menetet kell „túlélni”, míg sorra kerül kedvenc ellenfelünk, ha egy ellenfél csak akkor kerül újra sorra, ha már mindenkivel megverekedtünk? És ha függetlenül sorsol a gép mentenként, azaz előfordulhat, hogy egy ellenféllel egymás után többször is meg kell küzdeni?

36. Az ágyú csövét a vízszinteshez képest 45 fokos szögbe állítjuk be. Az ágyúgolyó a torkolatot átlagosan $50m/s$ sebességgel hagyja el, de $10m/s$

-os szórással. Közelítsük a sebesség eloszlását egy Gauss-eloszlással, melynek sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (a = 50m/s, \;\; \sigma = 10m/s).$$

Mi a golyó becsapódási helyének várható értéke és szórása?

37. Vegyünk fel a $[0,1]$ intervallumon egy pontot a következő eloszlásfüggvénnyel:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ x^2 & 0 \geq x \leq 1, \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

A pont és az 1 között vegyünk fel egy másik pontot egyenletes eloszlással. Határozzuk meg az így kapott három szakasz közül a két szélső korrelációs együtthatóját!

38. Bizonyítsuk be, hogy a várható érték az a szám, melytől való négyzetes eltérés várható értéke minimális. Bizonyítsuk be, hogy a medián meg az a szám, melytől való abszolút eltérés várható értéke minimális. (A medián definíciója: m az a szám, hogy $F(m) = 1/2$, ahol F az eloszlásfüggvény)

39. Egységnyi szakaszon vegyünk fel egyenletes eloszlással egy pontot. A nulla és az így kapott pont között ismét vegyünk fel egy pontot egyenletes eloszlással. Határozzuk meg az így kapott három szakasz közül a két szélső korrelációs együtthatóját!

40. A „pétervári probléma": a következő szerencsejátékot ajánlják nekünk: N forintot fizetünk minden játszmáért. Egy játszma a következőképp zajlik: egy penzérmét dobálnak fel, ha elsőre irás , akkor vesztettünk, ha elsőre fej, másodikra irás, akkor nyerünk 1 forintot, ha csak a harmadik lesz először irás, akkor 2 forintot, és így tovább, ha n-szer volt fej, akkor 2^n forintot kapunk vissza. Kérdés, mekkora N forintig édemes belemenni ebbe a játékba?

41. Mi a valószínűsége, hogy az alábbi egyenlet gyökei valóssak, ha b és c egyenletes eloszlású véletlen változók a $[-a, a]$ intervallumon?

$$ax^2 + bx + c = 0$$

42. Egy gyárban egy gép sok alkatrészből áll, amik véletlenszerűen meghibásodhatnak. Adott idő alatt a meghibásodott alkatrészek k száma Poisson-eloszlást követ, λ paraméterrel. A gép javításához szükséges idő az alábbi módon függ a hibás alkatrészek számától:

$$T = \tau(1 - e^{-\alpha k}),$$

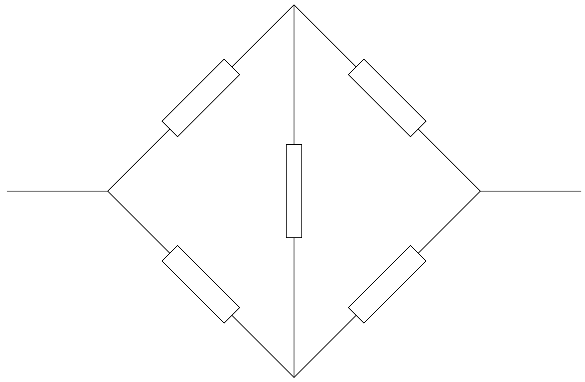
ahol τ és α adott konstansok. Mennyi a javítási idő várható értéke és szórása?

43. N levelesládába véletlenszerűen szétosztunk k darab levelet. Mi a valószínűsége, hogy egy kiválasztott levelesládában épp m levél van, ha tudjuk, hogy a vizsgált láda nem üres?

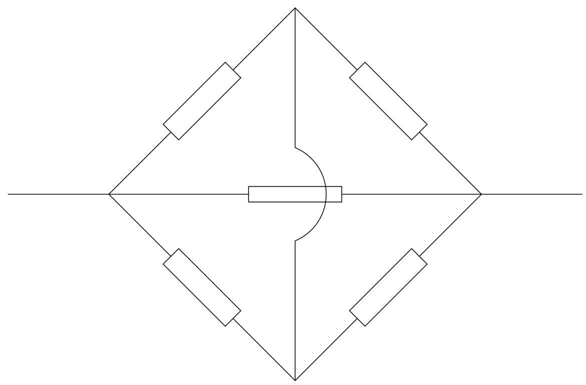
44. Van négy urnánk. Az elsőben csupa fehér, a másodikban csupa piros, a maradék kettőben pedig piros és fehér golyók vegyesen úgy, hogy a pirosak részaránya p. Találomra kiválasztunk egy urnát, és három golyót húzunk belőle visszatevéssel. Azt tapasztaljuk, hogy mind a három piros. Mi a valószínűsége, hogy a csupa pirosat tartalmazó urnából húztunk?

45. Egy egyenesen bolyongó részecske mozgása során p_j vaószínűséggel ugrik jobbra és p_b-vel balra a részecske. Mi a valószínűsége, hogy n lépés után k lépéssel távolodik jobbra?

46. Az alábbi áramkörben levő ellenállások egymástól függetlenül p valószínűséggel hibásodnak meg. Mi a valószínűsége, hogy áram folyhat a kivezetett pontok között, ha a meghibásodás szakadást eredményez? Mennyi ez $p = 1/2$ esetén? Mi a valószínűsége, hogy a rendszer rövidzárlatos, ha a meghibásodást az ellenállás zárlata okozza? (lásd a 1 és 2 ábrákat!)

a) 

1. ábra.

b) 

2. ábra.

47. Egy embernek, aki ki akarja nyitni lakása ajtaját, n kulcsa van. A kulcsokat véletlenszerűen és függetlenül próbálja ki (ennek okára csak sejtéseink vannak). Mennyi a kisérletek számának várható értéke, ha
a) a kipróbált és rossznak bizonyult kulcsokat nem rakja külön, tehát újra sorra kerülhetbek;
b) ha külön rakja őket?

48. (a) Adjuk meg annak valószínûségét, hogy k $(4 \leq k \leq 89)$ a második legnagyobb kihúzott lottószám!

    (b) Melyik számra maximális ez a valószínûség?

49. A Szultán azzal jutalmazza meg Szimbádot, hogy kiválaszthat egy lányt

az N tagú háreméből. A Szultán azonban nem szívesen válik meg legszebb háremhölgyétől, ezért azt a feltételt szabja, hogy Szimbád csak egyesével nézheti meg a háremhölgyeket, és akit egyszer már nem választott, azt később már nem kérheti.

Szimbád úgy dönt, hogy megnézi az első M háremhölgyet, majd ezután azt a lányt választja, amelyik szebb bármelyik korábban látottnál.

(a) Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy Szimbád a legszebb lányt választja!

(b) Adjunk becslést arra, hogy milyen M-nél van a keresett valószínűség maximuma, ha $N \gg 1$!

50. Egy választáson M férfi és $N - M$ nő indul. Egy vitaműsorba behívnak n jelöltet. Tegyük fel, hogy mindenki ugyanakkora eséllyel kerül a műsorba. Jelölje ξ a meghívott nők számát.

    (a) Adjuk meg a $P(\xi = k)$ valószínűséget!

    (b) Mi ξ legvalószínűbb értéke?

51. Egy kockával addig dobunk, míg 6-ost nem dobunk. Mennyi lesz a dobásszám várható értéke és szórása, ha az utolsó dobást is beszámítjuk?

52. Mi a valószínűsége, hogy két kockával dobva az összeg 7, ha tudjuk, hogy páratlan számot dobtunk?

53. n db sípálya talákozik a völgy alján, a felvonók egy helyről indulnak. Ha azt a taktikát követjük, hogy mindig a legrövidebb sorba állunk be, akkor várhatóan hányadik menetben fogunk a legnehezebb pályán síelni, feltéve, hogy teljesen véletleszerű az, hogy épp melyik sor a legrövidebb? És ha azt is fejbe vesszük, hogy egy pályán addig nem csúszunk le újra, amíg az összes többin nem mentünk egyet?

54. Móricka szerződést köt a Szerencsejáték Rt.-vel: Kenózik. A Kenó sorsoláson 80 számból húznak 20-at, Móricka pedig 10 számot játszik meg. A Szerencsejáték Rt. egymilliószorosát fizeti a feltett tétnek, ha mind a tíz megjátszott szám a kihúzott húsz között van. Mekkora Móricka

nyerési esélye az egymilliószoros fõnyereményre?

55. Pistike a 6-os villamoson szeretne utazni a Moszkva térrõl a Móricz Zsigmond körtérig, de nincs se jegye, sem bérlete. Úgy dönt, hogy lóg. Annak a valószínûsége, hogy az i-ik megállóban felszáll egy ellenõr p_i. Mi a valószínûsége, hogy Pistikét leszállítják?

56. Pistike és Móricka játsza a wimbledoni teniszdöntõt és az ötödik játszmában 5–5-re állnak. Tegyük fel, hogy minden további gémet 50–50% valószínûséggel nyeri Pistike illetve Móricka. Akkor van vége a meccsnek, ha valamelyikük ezek után egymás után két gémet nyer.

    (a) Adjuk meg a további gémeket leíró valószínûségi mezõt!
    (b) Mi a valószínûsége, hogy hat, vagy kevesebb gémet játszanak még?
    (c) Mi a valószínûsége, hogy páros számú gémet játszanak még?

57. Egy rekeszben $m_1 + m_2$ sörösüveg van, m_1 teli és m_2 üres. Véletlenszeûen kihúzunk (visszatevés nélkül) $m \leq \min(m_1, m_2)$ üveget. Határozzuk meg az alábbi események valószínûségét

    (a) $A = \{$ minden a kihúzott üveg tele van $\}$
    (b) $B = \{$ a kihúzott üvegek között pontosan k teli van, $k \leq m\}$
    (c) $C = \{$ a kihúzott üvegek között legalább egy teli van $\}$
    (d) $D = \{$ nem kevesebb mint $k \leq m$ telit húzunk$\}$

58. Egyes vidékeken a következõ babona járja: ha egy fizikus hallgató 6 medveszõrszálat fog a markába úgy, hogy mindkét végén kilógnak a szálak, majd egy társa mindkét oldalon páronként összecsomózza a szõrszálakat, s ha egy zárt lánc keletkezik, akkor következõ félévben nem kell pótzh.-t írnia.

    (a) Mi a valószínûsége az eseménynek, ha a babona igazat mond?
    (b) Általánosítsuk az eredményt $2n$ szõrszálra!

59. Pistike és négy cimborája kedvenc sörözõjében ücsörög. Mivel törzsvendégek, mindegyiküknek saját korsója van. Ezt az új pincér is tudja jól, de azt már sajnos elfelejtette, hogy melyikük milyen sört szeret. Csak arra emlékszik, hogy a kocsmában kapható ötféle sörbõl mindegyikük mást szokott inni. Zavarában ezért véletlenszerûen csapol az ötféle sörbõl az egyes korsókba, mindegyikbe mást. Mi a valószínûsége, hogy

    (a) legalább három,

    (b) legalább két,

    (c) pontosan négy korsóba az a sör kerül, amit a tulajdonosa szeret?

60. A valószínûségszámítás gyakorlati jegyet szeretnénk beíratni az indexünkbe. A gyakorlatvezetõ p valószínûséggel tartózkodik az egyetemen (a híresztelésekkel ellentétben p nem feltétlenül kicsi). Ha bent van az egyetemen, akkor 4 terem valamelyikében van egyenlõ valószínûséggel. 3 teremben már megnéztük és nem találtuk. Mi a valószínûsége annak, hogy a negyedikben megtaláljuk?

61. Az Enterprise ûrhajó az N naprendszerbõl álló galaxist járja. Kirk kapitány az eddig meglátogatott n naprendszerbõl k-ban találkozott E. coli baktériummal, vagy fejlettebb életformával. Mi a valószínûsége, hogy a galaxis s számú naprendszerében található E. coli vagy fejlettebb életforma? (Feltesszük, hogy a galaxisban a különbözõ számú lakott naprendszerek azonos valószínûséggel fordulnak elõ.)

62. Kirk kapitány és az Enterprise ûrhajó legénysége csillagok szerkezetét is vizsgálja. Egy R sugarú – természetesen gömb alakú – csillagban véletlenszerûen elhelyeznek N darab kisméretû szondát.

    (a) Mi a valószínûsége annak, hogy a csillag középpontjához legközelebb esõ szonda távolsága a középponttól nagyobb r-nél?

(b) Mihez konvergál ez a valószínûség, ha $R \to \infty$ és $N \to \infty$, továbbá létezik a $\lim\limits_{\substack{R\to\infty \\ N\to\infty}} \frac{Nr^3}{R^3} = c > 0$ határérték?

63. Pistike és Móricka véletlenszerûen felír fejenként egy-egy 1-nél kisebb pozitív valós számot. Mekkora annak a valószínûsége, hogy

(a) összegük kisebb 1-nél, és szorzatuk kisebb $\frac{2}{9}$-nél?

(b) összegük nagyobb, négyzetösszegük kisebb 1-nél, valamint bármelyik q-szorosa ($q \in]1, +\infty]$ paraméter) nagyobb, mint a másik szám?

64. Miután Mórizka az elõzõ héten mégsem nyert a Kenón, most úgy döntött, hogy biztosra megy: felkereste kedvenc bukmékerét, aki megsúgta neki a hétvégi Lovi három *biztos* gyõztes lovát. A magyar lóversenyszabályok azonban különlegesek, mivel nem lehet elõre tudni, hogy hányszoros nyereményt ér el a játékos. A bukméker csupán annyit tudott mondani, hogy 0 és 100% között egyenlõ valöszínûséggel bármekkora lehet a nyeremény (a feltett téten felüli rész). (Tegyük fel, hogy a nyeremény valós szám.) Mórizka elvitte nagymamáját, Mari nénit is a lóversenyre. Az elsõ lóra 1 forintot tett Mari néni, a másodikra 1 forintot Mórizka.

(a) Mi a valószínûsége hogy együtt 1 forintnál többet nyertek?

(b) Mórizka ezek után feltette az összes pénzét (1 forintot plusz a nyereményét) a harmadik lóra. Mi a valószínûsége, hogy összesen 2/9 forintnál többet nyert?

(c) Mi a valószínûsége, hogy 64a és 64b egyszerre teljesül?

65. Jancsi és Juliska megbeszélik, hogy meglátogatják a Gonosz Boszorka mézeskalácsházát. Sajnos elfelejtették megbeszélni, hogy a ház négy sarka közül melyiknél találkoznak. A mézeskalácsház olyan hatalmas, hogy nem lehet ellátni a többi sarokra. Mind a ketten pontosan megérkeznek, és ha a másik nincs ott, akkor 1 perc alatt átsétálnak a szomszédos sarkok valamelyikére 50–50% valószínûséggel. Ha nem találkoznak a következõ sarkon vagy útközben, megint véletlenszerûen választanak

egy sarkot, és elsétálnak oda. Tegyük fel, hogy eredetileg mindketten egyenlõ valószínûséggel érkeznek bármelyik sarokra, és egymástól függetlenül váltogatják helyzetüket, amíg találkoznak.

(a) Jelölje p_n annak a valószínûségét, hogy az elsõ n percen belül találkoznak. Határozzuk meg p_n értékét!

(b) Jelölje r_n annak a valószínûségét, hogy a találkozás az n-edik percben jön létre. Határozzuk meg az r_n valószínûséget!

(c) Bizonyítsuk be, hogy 1 annak a valószínûsége, hogy véges idõn belül találkoznak!

66. Miután Móricka az elsõ héten mégsem nyert a Kenón, most úgy döntött, hogy biztosra megy: felkereste kedvenc bukmékerét, aki megsúgta neki a hétvégi Lovi három *biztos* gyõztes lovát. A magyar lóversenyszabályok azonban különlegesek, mivel nem lehet elõre tudni, hogy hányszoros nyereményt ér el a játékos. A bukméker csupán annyit tudott mondani, hogy 0 és 100% között egyenlõ valószínûséggel bármekkora lehet a nyeremény (a feltett téten felüli rész. Tegyük fel, hogy a nyeremény valós szám.)

    Móricka elvitte nagymamáját, Mari nénit is a lóversenyre. Az elsõ lóra 1 forintot tett Mari néni, a másodikra 1 forintot Móricka. Móricka ezek után feltette az összes pénzét (1 forintot plusz a nyereményét) a harmadik lóra. Mi annak az együttes valószínûsége, hogy az elsõ két futam után Móricka és Mari néni együtt 1 forintnál, és a harmadik futam után Móricka összesen 50 fillérnél többet nyert?

67. Jelöljük A-val azt a véletlen eseményt, hogy Jancsi elvégzi a fizikus szakot, B-vel pedig, hogy Juliska bölcsészdiplomát szerez. Mivel Jancsi és Juliska jóban vannak, ezért ezek az események nem feltétlenül független események. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left|P(AB) - P(A)P(B)\right| \leqslant \frac{1}{4}\,! \qquad ()$$

68. Juan Antonio Samaranch és Jaques Rogge a dopping ellenes harc hatékonyabbá tételén tanakodnak. N versenyzõ mindegyikét meg akarják

vizsgálni, de költség- és idõtakarékosságból a következõ mellett döntenek: k versenyzõ vérmintáját összeöntik, majd az összekevert mintán egyszerre elvégzik a doppingtesztet. Tegyük fel, hogy a teszt minden versenyzõre p valószínûséggel pozitív. Ha az eredmény az együttes mintán negatív, akkor elegendõ volt k emberre egyetlen tesztet elvégezni; ha viszont pozitív, akkor ezek után külön meg kell vizsgálni minden mintát.

(a) Segítsük kiszámolni, hogy mennyi lesz a vizsgálatok számának M_k várható értéke, ha k osztója N-nek?

(b) A takarékosság jegyében adjuk meg azt is, hogy k mely értékénél lesz M_k minimális?

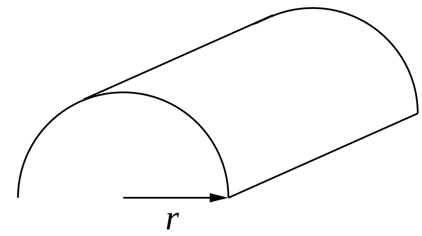
69. Az új Nemzetiben új ruhatárost alkalmaztak, akivel elfelejtették közölni, hogy nemcsak a vendégeknek kell ruhatárjegyet adni, hanem a kabátoknak is. Pistike az Ember tragédiája utáni katarzisban megérkezik a ruhatárhoz, ahol még N kabát várja gazdáját. A ruhatáros eddigre már rájött, hogy a kiosztott ruhatárjegyek számára semmiféle információt nem hordoznak, ezért véletlenszerûen hozza ki a kabátokat. Ha egy kabát kihozatala T ideig tart, várhatóan mennyi ideig vár Pistike a kabátjára, feltéve, hogy a ruhatáros

    (a) megjegyzi, hogy melyik kabátot mutatta már meg Pistikének?

    (b) annak biztos tudatában, hogy másnap kirúgják annyira leitta magát, hogy azt sem tudja, az melyik kabátot hozta ki az imént?

70. Egy pontszerû sugárforrásból a síkban minden irányban egyenletes eloszlással részecskék indulnak ki. Mi lesz a becsapódó részecskék eloszlása a forrástól d távolságban elhelyezett egyenesen?

71. Móricka és Pistike a szakadó esõ elõl egy félhenger alakú buszmegállóba menekül. Miután megállapították, hogy az esõ teljesen egyenletesen esik függõleges irányból, azon kezdenek el gondolkodni, hogy vajon milyen eloszlás szerint nedvesedik a buszmegálló fala. Tényleg, vajon, milyen eloszlással?



72. Fánkokat készítünk, a tésztába egyenletesen mazsolákat szórunk bele, és jól összegyúrjuk. Hány mazsolát számoljunk egy fánkra legalább, ha azt szeretnénk, hogy átlagosan 100 fánkból legfeljebb csak egyben ne legyen mazsola?

73. A koordinátarandszer x tengelyén a $[-1, 1]$ intervallumon egyenetes valószínûséggel felveszünk egy pontot. Mi ennek a pontnak és a $(0, 1)$ koordinátájú pont távolságának a sûrûségfüggvénye?

74. Egység sugarú, kör alakú céltáblára lövünk. A találat valószínûsége a céltáblán egyenletes eloszlású. A céltáblát koncentrikus körökkel három egyenlõ részre osztjuk. Mekkorák legyenek a körök sugarai, hogy minden részbe egyenlõ valószínûséggel essen találat?

75. A $[0, 1]$ intervallumon vegyünk fel egyenletes eloszlással egy pontot. A nulla és a pont között ismét vegyünk fel egy másik pontot szintén egyenletes eloszlással. Mi lesz az így kapott három szakasz közül a bal szélső hosszának eloszlásfüggvénye, sűrűségfüggvénye, várható értéke?

76. Egy bankjegyautómatánál a meghibásodás bekövetkezésének valószínűsége a $(t, t + \Delta t)$ időintervallumban $\lambda t^2 \Delta t$, feltéve, hogy t -ig jól működött. Határozzuk meg a meghibásodás pillanatának eloszlásfüggvényét!

77. Egy négyzet kerületén és belsejében kiválasztunk véletlenszerûen egy-egy pontot. Mi a valószínûsége, hogy a közöttük levõ távolság kisebb a négyzet oldalhosszánál?

78. A $[0, a]$ intervallumon egyenletes eloszlással választunk n számot.

    (a) Adjuk meg a $\xi_{\max} = \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ valószínûségi változó eloszlás és sûrûségfüggvényét!

(b) Mutassuk meg, hogy az

$$\hat{a}_n = \frac{n}{n+1}\xi_{\max}$$

statisztika torzítatlan becslése az a paraméternak!

79. Móricka egyik rémálmában a (ξ, η) kétdimenziós vektorváltozó sûrûségfüggvényét látja lelki szemei elõtt:

$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{4x^2+1-2y+y^2}{8}} \qquad (-\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty).$$

Végül arra ébred, hogy álmában kiszámolta a $\xi + \eta$ várható értékét és szórását. Mit kapott eredményül?

80. Az egyetem n hallgatója egyenletes eloszlással választ egy számot a $[0;1]$ intervallumon. Mi a legnagyobb választott szám eloszlása, sûrûségfüggvénye, várható értéke és szórása?

81. Pistike egy N emeletes ház legfelsõ szintjén lakik. Jelölje A_i azt az eseményt, hogy a lift elakad az i-edik emeleten, $P(A_i) = p_i$ ennek a valószínûségét. Az A_i események egymást nyilvánvalóan kizárják. Tegyük fel azt is, hogy minden használatkor A_i-k egymástól függetlenül következhetnek be. Mennyi a valószínûsége, hogy n számú használat során elõbb akad el Pistike az 1. emeleten, mint bárhol másutt.

82. Mint tudjuk, a gömbtükörnek nincs határozott gyújtópontja. Vizsgáljuk az esetet síkban! Vegyük az egységkör egyharmadát, és egy, a szimmertiatengelyével párhuzamos, homogén fénynyalábbal világítsuk meg a belsõ ívét! Határozzuk meg a körív belsõ felületérõl visszavert fény eloszlásának sûrûségfüggvényét a szimmetriatengely mentén!

83. Pistike egy szabálytalan pénzérmét dobál: a fej valószínûsége legyen p. Jelölje ξ az elsõ csupa fej vagy csupa írás sorozat hosszát, η pedig az

elsõ fej-sorozatot követõ írás-sorozat, vagy az elsõ írás-sorozatot követõ fej-sorozat hosszát. Pistike a generátor-függvények segítségével fejben kiszámolja a ξ és az η várható értékét és szórását, és meglepõ eredményre jut. Min lepõdött meg Pistike?

84. Az egyetemen a vizsgaidõszakban egy adott Δt hosszúságú idõtartam alatt megjelent hallgatók száma Poisson-eloszlású valószínûségi változó λ paraméterrel. Egy hallgató p valószínûséggel vizsgázik éppen. Mennyi a valószínûsége, hogy adott Δt idõintervallumban éppen k hallgató vizsgázik az egyetemen?

85. Egy sötét pincében n darab sörösrekesz, minden rekeszben n számú sörösüveg van. Az i-edik rekeszben i teli üveg található. Egy házibuli alkalmával lemegyünk a pincébe sörért, és az egyik, véletlenszerûen kiválasztott rekeszbõl véletlenszerûen kiemelünk egy sörösüveget. Ez szerencsénkre éppen tele van. Mi a valószínûsége, hogy ha a kiválasztott rekeszt felvisszük a buliba, akkor rajtunk kívül még legalább $k < n$ cimboránknak jut egy-egy üveg sör?

86. Az egyetemisták között a szeszfogyasztók arányát vizsgáljuk. Hány hallgatót kell megkérdeznünk ahhoz, hogy a felmérés alapján kapott arány a valódi aránytól 95% valószínûséggel legfeljebb 0.01-del térjen el?

87. Pistike egy valószínûségszámítás zárthelyin a következõ integrált írta fel megoldásként:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-2)^2}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{4}}\, dx.$$
Mi lehetett a feladat, és mit kapott eredményül, ha maximális pontot kapott a feladatra?

88. Pistike és Móricka egymástól függetlenül ugyan azt a mérést végzik a másodéves fizikus laborgyakorlaton. Pistike $\mathcal{N}(m, \sigma_1)$, Móricka pedig

$\mathcal{N}(m, \sigma_2)$ eloszlású véletlen mintából számolja a $\bar{\xi}_1$ illetve $\bar{\xi}_2$ átlagokat. A mérés kiértékelését közösen végzik, és azon tanakodnak, hogy milyen súllyal vegyék figyelembe $\bar{\xi}_1$-et és $\bar{\xi}_2$-t az m paraméter becsléséhez.

(a) Mutassuk meg, hogy tetszõleges $0 < \alpha < 1$ paraméterre

$$\alpha\bar{\xi}_1 + (1-\alpha)\bar{\xi}_2$$

az m paraméter torzítatlan becslése!

(b) Igazoljuk, hogy ez a becslés akkor lesz minimális szórású, ha

$$\alpha = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^1 + \sigma_2^2}!$$

89. Bill Gates úgy döntött, hogy megjutalmazza Pistikét a Fagyálló Ablakok kifejlesztéséért. Két borítékot tett Pistike elé, és azt mondta, hogy az egyik borítékban kétszer akkora értékû csekk található, mint a másikban. Pistike kiválaszthatta az egyiket, majd a látott összeg alapján dönthetett, hogy a választott összeget kapja, vagy a másikat.

Pistike így okoskodott: „Tegyük fel, hogy a kiválasztott borítékban x összeget találok. Mivel 50% eséllyel $2x$, 50% eséllyel pedig $1/2x$ lesz a másik borítékban, ezért várható értékben $1.25x$-et vághatok zsebre, ha a másikat választom. Tehát bármelyiket is választanám elsõre, érdemes inkább a másikat választanom..."

És Pistike csak állt, állt, boldogan állt, míg meg nem halt.

(a) Mi volt a hiba Pistike okoskodásában?

(b) Van-e helyes stratégia?

90. A BKV éves jelentésében az szerepel, hogy a metrószerelvények követési idejét $F(x)$ eloszlásfüggvény jellemzi μ várható értékkel és σ szórással. Pistike kísérleti úton ellenõrzi a jelentést. Jelölje ξ valószínûségi változó azt az idõtartamot, amennyit Pistikének várnia kell *egy véletlenszerûen kiválasztott idõpontban* a következõ metrójáratig.

(a) Adjuk meg ξ sûrûségfüggvényét!

(b) Pistike naívan azt gondolja, hogy a μ átlagos követési idõt jól közelítheti a $\bar{\xi}$ átlagos várakozási idõvel, ha elég sok mérést végez. Számoljuk ki a $\langle \xi \rangle$ várható értéket, és mutassuk meg, hogy Pistike téved!

(c) Adjuk meg $\langle \xi \rangle$ várható értéket exponenciális eloszlású követési idõk esetén!

91. Miután Pistike rájött, hogy mi is volt a probléma az elõzõ elméletével, most egy másik mérési módszert alkalmaz. Nem véletlenszerû idõpontokban vizsgálja a metrójáratokat, hanem egy adott pillanattól folyamatosan. Tegyük fel, hogy az egyes szerelvények között exponenciális idõtartamok telnek el, ugyanazzal a λ paraméterrel.

(a) Ha a megfigyelést a „nulladik” szerelvénytõl kezdve végzi, akkor milyen lesz a megfigyelés kezdõpontjától az n-edik szerelvény érkezéséig eltelt idõtartam eloszlása? (Tegyük fel, hogy ez egyes szerelvények között eltelt idõtartamok függetlenek.)

(b) Állapítsuk meg a $(0, t)$ idõintervallum alatt érkezõ metrószerelvények számának valószínûségeloszlását!

92. Míg Pistike a BKV-t tanulmányozza, Mórickát a Magyar Posta, pontosabban Dezsõ, a helyi postás munkarendje foglalkoztatja. Móricka tudja, hogy Dezsõ mikor kezdi a munkát, de azt nem, hogy mikor fejezi be. Dezsõ kissé fura munkamódszerei közé tartozik, hogy teljesen rendszertelenül keresi fel a címzetteket, azaz munkaideje – az $[a, b]$ idõintervallum – alatt egyenletes eloszlással bármikor kihozhatja a leveleket.

Móricka az ismeretlen b paramétert a legkésõbb kikézbesített levél kézbesítési idõpontja alapján próbálja megbecsülni.

(a) Adjuk meg azt a statisztikát, ami a fenti mérés alapján torzítatlan becslést ad b-re!

(b) Mutassuk meg, hogy ez a becslés erõsen konzisztens is!

(Megjegyzés: az egyszerûség kedvéért válasszuk az a paraméter értékét 0-nak.)

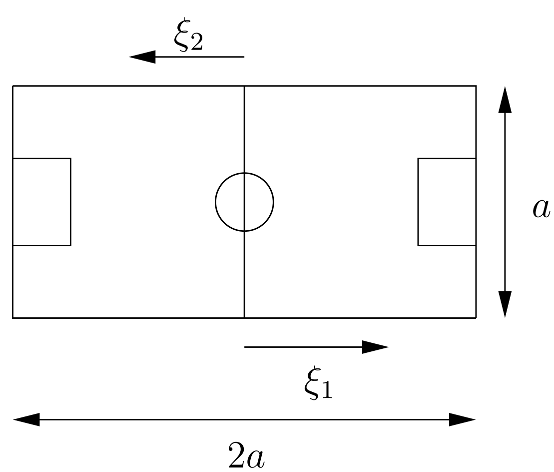
93. Egy fizikus hallgató az elmúlt hétvégén a XI. túlélõversenyen küzdött az életbenmaradásért. Az életére fõként különféle élõsködõk törtek. A hétvége alatt n szúnyog vette vérét (ennyi szúnyogcsípést számolt meg otthon magán), és ezek közül k dögöt csapott agyon út közben. Adjunk Maximum-likelihood becslést a vérszívók sikeres elhárításának p valószínûségére.

94. „Egy könnyû nyári délutánon Jancsi megkérdezte Juliskától:
– Szerinted igaz, hogy ha $\hat{P}_n$ egy p $(0 < p < 1)$ valószínûségû esemény relatív gyakorisága, akkor $\hat{P}_n^2$ torzítatlan becslése p^2-nek?
Juliska hosszasan elgondolkodott, majd azt mondta:
– Persze!"
Igaza volt Juliskának, vagy tévedett?

95. Tanulmányozzuk a partjelzõk viselkedését a focipályán! Jelölje ξ_1 az elsö, ξ_2 a második partjelzõ távolságát a felezõvonaltól. Tegyük fel, hogy a partjelzõk két ellentétes térfél egymással szemközti oldalvonalán mozognak, és ξ_1 ξ_2 együttes sûrûségfüggvénye

$$f(x_1, x_2) = A - A\left|1 - \frac{x_1 + x_2}{a}\right|, \qquad x_1, x_2 \in [0, a],$$

ahol a az oldalvonal hosszának fele (Ld. ábrát!).



(a) Adjuk meg az A paraméter értékét!

(b) Számoljuk ki ξ_1 és ξ_2 korrelációs együtthatóját!

(c) Adjuk meg a két partjelzõ egymástól mért távolságának várható értékét!

96. Hófehérke megfigyelte, hogy Hapci, a hét törpe egyike a $\tau_0 = 0$, τ_1, τ_2, $\ldots$, τ_n, $\ldots$ véletlen idõpontokban tüsszent. Felteszi, hogy két tüsszentés között eltelt $\delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ idõk függetlenek, azonos eloszlásúak és $\mathbb{M}(\delta_i) = m$ $(i = 1, 2, \ldots)$ létezik. Jelölje ν_t Hapci $[0, t)$ idõintervallum alatti tüsszentéseinek számát. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{\nu_t}{t}$ sztochasztikusan konvergál az $\frac{1}{m}$ értékhez $(t \to \infty)$!

97. Atom Antit, a pontszerû hangyát véletlenszerûen, a síkban egyenletes eloszlással behelyezzük az egységnégyzet belsejébe. Mivel Atomanti ebben a feladatban nem olyan kemény legény, mint szokott lenni, legszívesebben a legközelebbi sarokba bújna. Felvetõdik tehát a triviális kérdés: mi Atomanti legközelebbi saroktól való távolságának eloszlás és sûrûségfüggvénye?

98. A gyakvezér hazatért a sílelésbõl, és a következõ tapasztalatokat szerezte: ha a mellette síelõ Móricka a fekete jelzésû buckás pályán próbálkozott, akkor annak valószínûsége, hogy Móricka a $[t, t + dt[$ idõintervallumban a legközelebbi buckában landolt, arányos volt a pályán töltött t idõvel és a $dt \ll t$ idõtartammal. Mi Móricka bukásának eloszlás és sûrûségfüggvénye?

99. Atom Antit, a pontszerû hangyát véletlenszerûen, a térben egyenletes eloszlással behelyezzük az egységkocka belsejébe. Mint ismeretes Atom Anti tud ugyan repülni, de mivel már öregszik, legszívesebben a kocka hat fala közül legközelebbi falhoz bújna. Nyilvánvalóan felvetõdnek a következõ kérdések:

(a) Mi Anti és a legközelebbi fal közötti távolság sûrûség- és eloszlásfüggvénye?

(b) Ha Anti egységnyi sebességgel, egyenesvonalú egyenletes mozgással a legrövidebb úton a legközelebbi falat célozza meg, akkor várhatóan mennyi ideig fog repülni a legközelebbi falig?

100. Nelson admirális csatába indul. A legnagyobb távolság eléréséhez a hajóágyúkat 45°-os szögbe állíttatja. A személyzet változó teljesítménye, a puskapor változó minõsége, a szél és más ismeretlen hatások miatt az ágyúgolyó kezdeti sebessége egy

$$\varrho(v) = \left\{ \frac{(v/v_0)^\alpha}{v_0\Gamma(\alpha+1)} e^{-v/v_0}, \&\text{ha } v \geqslant 0{,}0, \&\text{ha } v < 0 \right.$$

eloszlású valószínûségi változóval adható meg, ahol $\Gamma(x)$ a gammafüggvényt jelöli, valamint $v_0 > 0$ és $\alpha > 0$. Adjuk meg az ágyúgolyó becsapódási helyének várható értékét és szórását, ha $v_0 = 10\mathrm{m/s}$, $\alpha = 5$ és a légellenállást elhanyagoljuk!

101. Detektorral részecskék élettartamát mérjük. A részecskék élettartama λ paraméterû exponenciális eloszlású valószínûségi változóval adható meg. A detektor azonban elromlott és az élettartamnak csak a tizedesvesszõ utáni számjegyeit írja ki, azaz csak az élettartam törtrészét tudjuk mérni. Mi lesz a mért értékek sûrûségfüggvénye?

102. A gyakorlatvezetõk szobájába új nyomtató érkezett. Murphy szerint „ami elromolhat, az el is romlik”, így van ez az új nyomtatóval is: minden oldal kinyomtatása során p valószínûséggel a nyomtató visszaadja lelkét a teremtõjének. Ekkor az adott oldal már ki sem jön a nyomtatóból. Másrészt az a bölcsesség is igaznak bizonyult, hogy tévedni emberi dolog, és ez a gyakorlatvezetõkre is vonatkozik: q valószínûséggel hibás oldalt küldenek a nyomtóra. A hibás oldalt mindig a nyomtató mellé teszik. A nyomtató meghibásodása, és a gyakorlatvezetõk figyelmetlensége egymástól független események.

Tegyük fel, hogy elromlott a nyomtató, és a szerelõ

(a) egyetlen elrontott oldalt sem talál

(b) k darab elrontott oldalt talál

a nyomtató mellett. Mi a valószínûsége, hogy a nyomtató meghibásodásáig n oldalt nyomtattak a gyakorlatvezetõk?

103. Egységnyi szakaszon egyenletes valószínűséggel kiválasztunk két pontot. Az így kapott három szakaszból a középső és a jobb szélső hosszának határozzuk meg a korrelációs együtthatóját!

104. Tegyük fel, hogy egy részvény értéke a tőzsdén minden nap r vagy $1/r$-szeresére változik 50-50%-os eséllyel. Mi lesz sok idő ($N >> 1$nap) múlva a részvény értékének eloszlása?

105. Az ötödik osztályos tanulók testmagássága átlagosan 145 centi, 15 centi szórással. Becsüljük meg, hogy legfeljebb hány tanuló lesz 130 centinél alacsonyabb egy 30 fős osztályból.

106. Egységnyi szakaszon vegyünk fel egyenletes eloszlással egy pontot. A nulla és az így kapott pont között ismét vegyünk fel egy pontot egyenletes eloszlással. Határozzuk meg az így kapott három szakasz közül a két szélső korrelációs együtthatóját!

107. Az ideális gáz molekuláinak sebessége Maxwell-eloszlású valószínûségi változó. Sûrûségfüggvénye:

$$f(v) = \begin{cases} 0, & \text{ha, } x < 0 \\ \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} v^2 e^{-v^2 h^2}, & \text{ha, } x \geq 0, \end{cases}$$

ahol $h > 0$ paraméter. Számítsuk ki a sebesség

(a) legvalószínûbb értékét,

(b) várható értékét!

108. A megfigyelések szerint egy egydimenziós szöcske ugrásánál a leérkezés helyének sűrűségfüggvénye:

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}, \qquad a = 10cm. \tag{1}$$

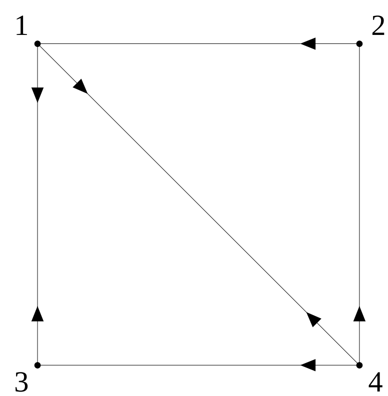
Mi lesz a szöcske helyének eloszlása n ugrás után, ha minden ugrás független az előző ugrásoktól? Mekkora lesz a szöcskének a kezdőponttól mért átlagos négyzetes eltérése?

109. Szabálytalan pénzdarabbal játszunk, p valószínűséggel fej, $q = 1 - p$ valószínűséggel irás a dobás eredménye. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első IF pár az $n-1$ -ik és n-ik kisérletben következik be? Írjuk fel a generátorfüggvényt, a várható 'ertéket és a szórásnégyzetet!

110. A tapasztalat szerint a baromfikeltetőben p valószínűséggel kakas, $q = 1-p$ valószínűséggel jérce kel ki a tojásból. Ha egy keltetés során a k-ik kikelő az első kakas, akkor mi k várhatóértéke és szórása? Használjunk generátorfüggvényt a megoldáshoz!

111. Legyen $\xi = 0, 1, 2, ...$ diszkrét valószínűségi változó generátorfüggvénye $g_\xi(z)$! Írjuk fel $\xi + 1$ és 2ξ generátorfüggvényét!

112. Az alábbi gráfon egy részecske bolyong, minden lépésben tovább ugrik a pontokat összekötő vonalak mentén de csak a nyilakkal jelölt irányokban. Egy adott pontban minden lehetséges irányt egyforma valószínűséggel választ a részecske. Írjuk fel az így definiált Markov-lánc egylépéses átmeneti-valószínűség mátrixát! Vizsgáljuk meg, vajon ergodikus-e ez a Markov-lanc? Hogy lehetne egy mátrixelem (nyilacska) megváltoztatásával ezt a tulajdonságot (az ergodikusságot vagy nem ergodikusságot) az ellenkezőjére változtatni?



3. ábra.

113. Egy hibás kávéautomata a gombok nyomogatásától teljesen függetlenül választja ki, hogy milyen italt ad. Ha kávét adott az n-ik vásárlónak,

akkor az $n+1$-iknek forró csokit fog adni. Ha forró csokit adott az n -ik vásárlónak, akkor fele-fele valószínűséggel kávét vagy teát fog adni a következőnek, ha teát adott előzőleg, akkor a tea után kávét fog adni. Készítsünk ábrát az így definiál t Markov-láncról, és írjuk fel az egylépéses átmeneti-valószínűség mátrixát! Vizsgáljuk meg, vajon ergodikus-e ez a Markov-lanc? Hogy keresnéd meg a határeloszlást?

114. Egy pont a számegyenesen a 0-ból kiindulva mindig $1/2$, $1/2$ valószínűséggel lép egy szomszédos, egész értékű pontba, azaz ha ξ_n jelöli a pont helyzetét az n -ik lépésben, akkor $\xi_{n+1}=\xi_n \pm 1$. A mozgást korlátozzuk két fal közé: a $-K$ és a K pontokról a bolyongó pont visszapattan. Legyen K páratlan és definiáljunk az η_n újabb Markov-láncot a következő módon: $\eta_n = \frac{\xi_{2n}}{2}$. Írjuk fel η_n átmenetvalószínűség-mátrixát! Bizonyítsuk be, hogy a Markov-lánc ergodikus, és a határeloszlás egyenletes!