Valószínűségszámítás ZH 2.

1. feladat. Az X valószínűségi válzozó $(0, a)$ intervallumon értelmezett, sűrűségfüggvénye $f_X(x) = C_X x^3$, ha $x \in (0, a)$, egyébként nulla. Az Y pozitív valószínűségi változó, mely független az X-től és sűrűségfüggvénye $f_Y(y) = C_Y e^{-\lambda y}$. Adjuk meg a

$$Z = \frac{Y}{Y + X^3}$$

sűrűségfüggvényét és eloszlásfüggvényét!

Segítség:

$$\int_0^\infty x^n e^{-cx} dx = (-1)^n \left(\frac{\partial}{\partial c}\right)^n \int_0^\infty e^{-cx} dx$$

2. feladat. Egy fotonforrás T idő alatt átlagosan N számú fotont bocsájt ki (N nagy). Az egyes fotonok kibocsájtása egymástól független. Mi annak a valószínűsége, hogy a megfigyelés $t \neq T$ időtartama alatt két fotont is kibocsájt a forrás? Képzeljük el a következő kísérletet! A forrásból kilépő fotonok a forrást két helyen hagyhatják el. Bármely foton ugyanakkora valószínűséggel hagyhatja el a forrást az egyik, illetve a másik irányba. Mindkét kivezetéshez egy-egy fotondetekort illesztünk és t idő alatt regisztráljuk, hogy melyik detektor hányszor szólalt meg. Mi annak a valószínűsége, hogy egyik detektor sem szólal meg? Mi annak a valószínűsége, hogy csak egy detektor fog - akár többször is - megszólalni?

3. feladat. Egy X valószínűségi változó sűrűségfüggyvénye

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{4\lambda}} e^{-\lambda x^2 - \mu x}.$$

Egy mérés során az $x_1, \ldots, x_n$ véletlen számokat kapjuk, melyek eloszlásai feltételezésünk szerint megegyeznek X eloszlásával. Adjunk Maximum Likelihood becslést λ és μ értékére!

4. feladat. Egy m, határozott értékű természeti állandót szeretnénk kimérni. A mérőeszközünk azonban torzít, azaz ha x_i egy mérési eredmény, akkor az x_i előáll az

$$x_i = m + \varepsilon_i$$

alakban, ahol ε_i a mérési zaj. A zajról tudjuk, hogy egy olyan valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f(\varepsilon) = Ce^{-\lambda|\varepsilon|}$. A λ paraméter a mérőeszköz fejlesztésével változtatható. Mi lesz az X (azaz a mérési hibával terhelt m) valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvénye? Adjunk *becslést* arra vonatkozólag, hogy ha n számú mérést végzünk, akkor mekkorának kell választanunk λ-t, hogy egy előre adott p valószínűséggel az általunk számított empirikus átlag és m abszolút eltérése kisebb legyen mint egy adott κ hibakorlát? Használjunk határeloszlás-tételt!

Segítség: Ha $X_1, \ldots, X_n$ Gauss-eloszlású véletlen változók μ átlaggal és σ szórással, akkor az

$$U = \sqrt{n}\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\sigma}$$

változó eloszlása egységnyi szórású, nullközepű Gauss-eloszlás. A feladat megoldása során tegyük fel, hogy a

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

függvény és $\Phi^{-1}(\lambda)$ inverze is ismert.