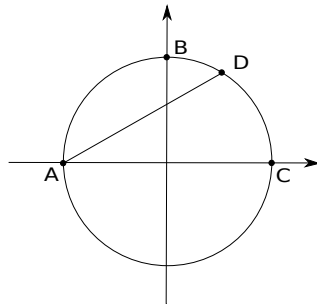


Valószínűségszámítás ZH 1.

1. feladat. Egy számozott oldallapú tetraéderrel dobunk. Annak a valószínűsége, hogy a tetraéder az n -edik oldalára esik ($n = 1, 2, 3, 4$), $p_n = C/n!$. Adjuk meg a C normálótényezőt, az n várható értékét, szórását és a generátorfüggvényt! Mi lenne egy olyan valószínűségi változó generátorfüggvénye, ahol $p_n = C/n!$, de $0 \leq n$ tetszőleges egész értéket felvehet?

2. feladat. Descartes-koordinátarendszerben egy R sugarú, origó középpontú kört rajzolunk a felső félsíkra. Az ABC félkör kerületén egyenletes eloszlás szerint kiválasztunk egy D pontot és megszerkesztjük az AD húrt (1. ábra). Mi lesz a húr hosszának sűrűségfüggvénye és eloszlásfüggvénye?



1. ábra.

3. feladat. Az X_1 és X_2 valószínűségi változók egymástól független, egyenletes eloszlású véletlen változók a $(0, a)$ intervallumon. Mi a $Z = X_1^2/X_2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye és eloszlásfüggvénye?

4. feladat. Az X_1 és X_2 valószínűségi változók eloszlásának együttes sűrűségfüggvénye $f(x_1, x_2) = C(x_1 + x_2)^2$, ha $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$, egyébként 0. Határozzuk meg a C normálófaktort, a marginális eloszlásokat, X_1 és X_2 várható értékét, szórásukat, valamint a korrelációt és a kovarianciát! Mi lesz az $X_1 - X_2$ valószínűségi változó várható értéke?

5. feladat. Vizsgáljunk egy olyan részecskekerendszert, melyben egyetlen részecske sebességeloszlásának sűrűségfüggvénye $\tilde{f}(\mathbf{v}) = N_D e^{-\lambda|\mathbf{v}|}$. Ebben az esetben a sebesség nagyságának eloszlása $f(v) = N_P v^2 e^{-\lambda v}$, ha $0 \leq v$, egyébként 0. Számoljuk ki az N_P normálófaktort, valamint az $f(v)$ eloszlás $\varphi(t)$ karakterisztikus függvényét! Határozzuk meg a negyedik és az ötödik momentumot!

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = C + \arcsin x \quad \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = C + \arccos x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = C + \operatorname{arctg} x \quad \int \frac{-1}{1+x^2} dx = C + \operatorname{arcctg} x$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = C + \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right)$$

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = C + \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right)$$

$$\int \sin^2 x dx = C + \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right)$$

$$\int \cos^2 x dx = C + \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right)$$

$$\int x \sin x dx = C + \sin x - x \cos x$$

$$\int x \cos x dx = C + \cos x + x \sin x$$

$$\int x \sin x dx = C + \sin x - x \cos x$$

$$\int x^2 \sin x dx = C - x^2 \cos x + 2(\cos x + x \sin x)$$

$$\int x^2 \cos x dx = C + x^2 \sin x - 2(\sin x - x \cos x)$$

$$\int x e^{ax} dx = C + \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = C + e^{ax} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right)$$

Ignorance is never better than knowledge. (Enrico Fermi)