# Valószínűségszámítás és statisztika

## 2.b. zárthelyi megoldása

1) Legyen $\xi$ és $\eta$ független valószínűségi változók, melyeknek a sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & \text{ha } |x| < 1, \\ 0, & \text{ha } |x| \geq 1, \end{cases} \qquad f_\eta(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x \leq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Mutassuk meg, hogy $\xi\eta$ eloszlása standard normális eloszlású!

(Útmutatás:

$$\int_x^\infty \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{2}$$

**Megoldás:** A $\xi\eta$ sűrűségfüggvényét a következő transformációval kapjuk:

$$f_{\xi\eta}(x) = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{|y|} f_\xi\left(\frac{x}{y}\right) f_\eta(y) dy \tag{3}$$

Behelyettesítve a megadott sűrűségfüggvényeket:

$$f_{\xi\eta}(x) = \frac{1}{\pi}\int_x^\infty \frac{1}{y} \frac{ye^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} dy = \frac{1}{\pi}\int_x^\infty \frac{\frac{y}{x}e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}} dy \tag{4}$$

Bevezetve az $u = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1$ változót kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f_{\xi\eta}(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{u^2+1}}{u} e^{-\frac{1}{2}x^2(u^2+1)} \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} du \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^\infty xe^{-\frac{1}{2}x^2u^2} du = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned} \tag{5}$$

2) Legyen a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független valószínűségi változók sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi_i}(x) = \frac{1}{2} a e^{-a|x|} \tag{6}$$

Határozzuk meg a

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i \tag{7}$$

átlag karakterisztikus függvényét!

**Megoldás:** Legyen $\phi_i(t)$ a $\xi_i$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye. Definíció szerint

$$\begin{aligned}\phi_i(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{2} e^{ixt} e^{-a|x|} dx = \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{x(it+a)} dx + \frac{a}{2} \int_{0}^{\infty} e^{x(it-a)} dx \\ &= \frac{a}{2} \left[ \frac{e^{x(it+a)}}{it+a} \right]_{-\infty}^{0} + \frac{a}{2} \left[ \frac{e^{x(it-a)}}{it-a} \right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{2} \frac{a}{it+a} - \frac{1}{2} \frac{a}{it-a} \\ &= \frac{a^2}{a^2+t^2} \end{aligned} \tag{8}$$

Az átlag karakterisztikus függvénye:

$$\phi_{\bar{\xi}}(t) = \mathbf{M}\left(e^{i\bar{\xi}t}\right) = \mathbf{M}\left(e^{i\frac{1}{n}\sum_{i=1}\xi_i t}\right) = \left[\phi_i\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \frac{1}{\left(1+\left(\frac{t}{an}\right)^2\right)^n} \tag{9}$$

3) Egy buszmegállóban várakozunk, és feljegyezzük az egymás után érkező buszok közötti követési időközöket. A hivatalos menetrend szerint a követési idő 4-5 perc. Tegyük fel, hogy a követési idők exponenciális eloszlást követnek 4,5 perc várható értékkel. Adjunk becslést a Csebisev-egyenlőtlenség segítségével arra, hogy mekkora annak a valószínűsége, hogy a feltevésünk helyes, ha a megfigyelésünk alatt 8 buszt láttunk elmenni, és az átlagos követési idő 5.2 perc volt.

**Megoldás:** Jelölje az $i$ és $i+1$-edik busz között eltelt időt $\xi_i$. A feladat szerint $\xi_i$ exponenciális eloszlást követ $\mathbf{M}(\xi_i) = 1/\lambda = 4,5\,\text{perc}$ várható értékkel. Az exponenciális eloszlás esetén a szórás szintén $\mathbf{D}(\xi_i) = 1/\lambda = 4,5\,\text{perc}$.

Az első $n+1$ busz közötti átlagos követési időt jelölje $\bar{\xi}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$. Ekkor azt a valószínűséget kell megbecsülnünk, hogy $\bar{\xi}_7$ eltérése a várható értéktől kevesebb, mint $\epsilon = 5,2 - 4,5 = 0,7\,\text{perc}$. A Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$P\left(|\bar{\xi}_n - \mathbf{M}(\bar{\xi}_n)| > \epsilon\right) < \frac{\mathbf{D}^2(\bar{\xi}_n)}{\epsilon^2} = \frac{\mathbf{D}^2(\xi_i)}{n\epsilon^2}, \tag{10}$$

tehát

$$P\left(|\bar{\xi}_n - \mathbf{M}(\bar{\xi}_n)| \le \epsilon\right) \ge 1 - \frac{\mathbf{D}^2(\xi_i)}{n\epsilon^2}. \tag{11}$$

Behelyettesítve az adatokat kapjuk, hogy

$$P\left(|\bar{\xi}_7 - 4,5| \le 0,7\right) \ge 1 - \frac{4,5^2}{7\cdot 0,7^2} = -4,9. \tag{12}$$

A Csebisev-egyenlőtlenség szerint tehát ebben az esetben nem kapunk jobb becslést a triviális $P\left(|\bar{\xi}_7 - 4,5| \le 0,7\right) \ge 0$-nál.

4) Az 5-ös lottó legutóbbi sorsolásán 149 645 darab kéttalálatos szelvény volt. A teljes nyereményalap 30%-át osztják szét a 2 találatosok között. Egy szelvény ára 225 Ft, a 2-es találat legutóbbi nyereménye pedig 1365 Ft volt. A központi határeloszlás-tétel segítségével adjunk becslést arra, hogy 99%-os megbízhatóság mellett mekkora volt a Szerencsejáték Rt. 5-ös lottóból származó bevétele az adott héten!

Ezek szerint a teljes bevétel hányad része képezi a teljes nyereményalapot?

**Megoldás:** Jelölje az összes feladott szelvény számát $N$, a kettes találat valószínűségét $p$, a megbízhatósági szintet $p_0$. Jelölje továbbá a két találatosok számát az adott héten $\xi$. A kéttalálatosok száma nyilvánvalóan binomiális eloszlást követ, $\mathbf{M}(\xi) = Np$ várható értékkel és $\mathbf{D}^2(\xi) = Npq$ szórásnégyzettel, ahol $q = 1 - p$. A kettes találat valószínűsége nyilvánvalóan

$$p = \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} \approx 2,2474 \cdot 10^{-2}. \tag{13}$$

A központi határeloszlás tétel szerint

$$P\left(\left|\frac{\xi - Np}{\sqrt{Npq}}\right| < \lambda\right) \approx 2\Phi(\lambda) - 1 = 1 - p_0. \tag{14}$$

amiből $\lambda = \Phi^{-1}(1 - \frac{p_0}{2}) \approx 2,5758$.

$1 - p_0$ a valószínűsége tehát, hogy $(\xi - Np)^2 < \lambda^2 Npq$, amiből egy másodfokú egyenlőtlenséget kapunk $N$-re:

$$N^2p^2 - N(2p\xi + \lambda^2 pq) + \xi^2 < 0 \tag{15}$$

Ebből tehát

$$\frac{\xi}{p} + \frac{\lambda^2 q}{2p} - \frac{\sqrt{4q\lambda^2\xi + \lambda^4 q^2}}{2p} < N < \frac{\xi}{p} + \frac{\lambda^2 q}{2p} + \frac{\sqrt{4q\lambda^2\xi + \lambda^4 q^2}}{2p} \tag{16}$$

Mivel $\xi \gg 1$, ezért közelítőleg írhatjuk, hogy

$$\frac{\xi}{p} - \lambda\frac{\sqrt{q\xi}}{p} < N < \frac{\xi}{p} + \lambda\frac{\sqrt{q\xi}}{p} \tag{17}$$

Ebből könnyen megbecsülhetjük a Szerencsejáték Zrt. bevételét. Jelölje $K = 225\,\mathrm{Ft}$ egy szelvény árát. Ekkor a bevétel 99% valószínűséggel

$$K\frac{\xi}{p} - \lambda K\frac{\sqrt{q\xi}}{p} < NK < K\frac{\xi}{p} + \lambda K\frac{\sqrt{q\xi}}{p} \tag{18}$$

intervallumba esik. Behelyettesítve az adatokat kapjuk, hogy a megadott megbízhatósági szint mellett a teljes bevétel 1,4883 milliárd Ft és 1,5080 milliárd Ft között volt.

A teljes nyereményalap $\frac{1365\xi}{0.3} = 680,8 \cdot 10^6\,\mathrm{Ft}$, amiből kapjuk, hogy a teljes bevétel kb. 45%-a a nyereményalap.