Valószínűségszámítás és statisztika
2. zárthelyi megoldása

1) Legyenek ξ és η függetlenek, és exponenciális eloszlásúak, azaz

$$f_\xi(x) = f_\eta(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x \leq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Mutassuk meg, hogy $\frac{\xi}{\xi+\eta}$ eloszlása egyenletes a $[0,1]$ intervallumon!

Megoldás: A $\zeta = \frac{\xi}{\xi+\eta}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$\begin{aligned} F_\zeta(x) &= P\left(\frac{\xi}{\xi+\eta} < x\right) = \iint_{\frac{u}{u+v}<x} f_\xi(u) f_\eta(v)\,du\,dv \\ &= \lambda^2 \int_0^\infty \int_{\frac{u}{x}-u}^\infty e^{-\lambda(u+v)}\,dv\,du = \lambda^2 \int_0^\infty \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(u+v)}\right]_{v=\frac{u}{x}-u}^\infty du \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda u}{x}}\,du = \lambda \left[-\frac{x}{\lambda} e^{-\frac{\lambda u}{x}}\right]_0^\infty = x \end{aligned} \tag{2}$$

ha $0 \leq x \leq 1$, ami az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye.

2) Legyen a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független valószínűségi változók sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi_i}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x \leq 0, \end{cases} \tag{3}$$

ahol $\lambda > 0$ állandó.

Határozzuk meg a

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \tag{4}$$

várható értékét és szórását a karakterisztikus függvények segítségével!

Megoldás: Legyen $\phi_i(t)$ a ξ_i valószínűségi változó karakterisztikus függvénye. Definíció szerint

$$\begin{aligned} \phi_i(t) &= \int_{-\infty}^\infty e^{ixt} f_{\xi_i}(x)\,dx = \lambda \int_0^\infty e^{x(it-\lambda)}\,dx \\ &= \lambda \left[\frac{e^{x(it-\lambda)}}{it-\lambda}\right]_0^\infty = -\frac{\lambda}{it-\lambda} = \frac{1}{1-\frac{it}{\lambda}} \end{aligned} \tag{5}$$

Az átlag karakterisztikus függvénye:

$$\phi_{\bar{\xi}}(t) = \mathbf{M}\left(e^{i\bar{\xi}t}\right) = \mathbf{M}\left(e^{i\frac{1}{n}\sum_{i=1}\xi_i t}\right) = \left[\phi_i\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = \frac{1}{\left(1-\frac{it}{\lambda n}\right)^n} \tag{6}$$

Ebből az átlag várható értéke

$$\mathbf{M}(\bar{\xi}) = \frac{1}{i}\left.\frac{d\phi_{\bar{\xi}}(t)}{dt}\right|_{t=0} = -n\frac{1}{i}\left(-\frac{i}{\lambda n}\right)\left.\frac{1}{\left(1-\frac{it}{\lambda n}\right)^{n+1}}\right|_{t=0} = \frac{1}{\lambda} \tag{7}$$

Az átlag négyzetének várható értéke

$$\mathbf{M}\left(\bar{\xi^2}\right) = -\left.\frac{d^2\phi_{\bar{\xi}}(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = -n(n+1)\left(-\frac{i}{\lambda n}\right)^2\left.\frac{1}{\left(1-\frac{it}{\lambda n}\right)^{n+2}}\right|_{t=0} \tag{8}$$

$$= \frac{n+1}{n\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{n\lambda^2} \tag{9}$$

Ebből az átlag szórásnégyzete

$$\mathbf{D}^2\left(\bar{\xi}\right) = \mathbf{M}\left(\bar{\xi^2}\right) - \mathbf{M}\left(\bar{\xi}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{n\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{n\lambda^2} \tag{10}$$

3) Egy villamosmegállóban várakozunk, és feljegyezzük az egymás után érkező villamosok közötti követési időközöket. A hivatalos menetrend szerint a követési idő 4-5 perc. Tegyük fel, hogy a követési idők egyenletes eloszlást követnek valamely 1 perc széles időintervallumon, ami nem feltétlenül a hivatalos követési idő. Adjunk becslést a Csebisev-egyenlőtlenség segítségével arra, hogy hány villamost kell megvárnunk, ha legfeljebb 10%-os hibával szeretnénk meghatározni a követési idők várható értékét!

Megoldás: Jelölje az i és $i+1$-edik villamos között eltelt időt ξ_i. A feladat szerint ξ_i egyenletes eloszlást követ valamely $[a, a+1]$ intervallumon. Ennek a várható értéke $\mathbf{M}(\xi_i) = a + \frac{1}{2}$, szórása $\mathbf{D}(\xi_i) = \frac{1}{\sqrt{12}}$ perc.

Az első $n+1$ villamos közötti átlagos követési időt jelölje $\bar{\xi}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$. Ekkor azt az n számot kell megbecsülnünk, amelyre annak a valószínűsége, hogy a $\bar{\xi}_n$ átlag eltérése a várható értéktől kevesebb, mint egy rögzített ϵ, legalább $1-p_0$. A Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$P\left(|\bar{\xi}_n - \mathbf{M}(\bar{\xi}_n)| > \epsilon\right) < \frac{\mathbf{D}^2(\bar{\xi}_n)}{\epsilon^2} = \frac{\mathbf{D}^2(\xi_i)}{n\epsilon^2}, \tag{11}$$

tehát

$$P\left(|\bar{\xi}_n - \mathbf{M}(\bar{\xi}_n)| \leq \epsilon\right) \geq 1 - \frac{\mathbf{D}^2(\xi_i)}{n\epsilon^2} > 1 - p_0 \tag{12}$$

amiből kapjuk, hogy

$$n > \frac{\mathbf{D}^2(\xi_i)}{p_0\epsilon^2} \tag{13}$$

A feladat szerint a hiba legfeljebb 10% lehet, amiből $\epsilon = 0,45$ perc. A megbízhatósági szintet 99%-ra véve kapjuk, hogy $p_0 = 0.01$, amiből $n > 142$ adódik.

4) Az 6-ös lottó legutóbbi sorsolásán 66 641 darab háromtalálatos szelvény volt. A teljes nyereményalap 35%-át osztják szét a háromtalálatosok között. Egy szelvény ára 225 Ft, a hármas találat legutóbbi nyereménye pedig 1365 Ft volt. A központi határeloszlás-tétel segítségével adjunk becslést arra, hogy 95%-os megbízhatóság mellett mekkora volt a Szerencsejáték Rt. hatos lottóból származó bevétele az adott héten!

Ezek szerint a teljes bevétel hányad része képezi a teljes nyereményalapot?

Megoldás: Jelölje az összes feladott szelvény számát N, a hármas találat valószínűségét p, a megbízhatósági szintet p_0. Jelölje továbbá a háromtalálatosok számát az adott héten ξ. A háromtalálatosok száma nyilvánvalóan binomiális eloszlást követ, $\mathbf{M}(\xi) = Np$ várható értékkel és $\mathbf{D}^2(\xi) = Npq$ szórásnégyzettel, ahol $q = 1 - p$. A hármastalálat valószínűsége nyilvánvalóan

$$p = \frac{\binom{6}{3}\binom{39}{3}}{\binom{45}{6}} \approx 2,2441 \cdot 10^{-2}. \tag{14}$$

A központi határeloszlás tétel szerint

$$P\left(\left|\frac{\xi - Np}{\sqrt{Npq}}\right| < \lambda\right) \approx 2\Phi(\lambda) - 1 = 1 - p_0. \tag{15}$$

amiből $\lambda = \Phi^{-1}(1 - \frac{p_0}{2}) \approx 1.9600$.

$1 - p_0$ a valószínűsége tehát annak, hogy $(\xi - Np)^2 < \lambda^2 Npq$, amiből egy másodfokú egyenlőtlenséget kapunk N-re:

$$N^2p^2 - N(2p\xi + \lambda^2 pq) + \xi^2 < 0 \tag{16}$$

Ebből tehát

$$\frac{\xi}{p} + \frac{\lambda^2 q}{2p} - \frac{\sqrt{4q\lambda^2\xi + \lambda^4 q^2}}{2p} < N < \frac{\xi}{p} + \frac{\lambda^2 q}{2p} + \frac{\sqrt{4q\lambda^2\xi + \lambda^4 q^2}}{2p} \tag{17}$$

Mivel $\xi \gg 1$, ezért közelítőleg írhatjuk, hogy

$$\frac{\xi}{p} - \lambda\frac{\sqrt{q\xi}}{p} < N < \frac{\xi}{p} + \lambda\frac{\sqrt{q\xi}}{p} \tag{18}$$

Ebből könnyen megbecsülhetjük a Szerencsejáték Zrt. bevételét. Jelölje $K = 225\,\mathrm{Ft}$ egy szelvény árát. Ekkor a bevétel 95% valószínűséggel

$$K\frac{\xi}{p} - \lambda K\frac{\sqrt{q\xi}}{p} < NK < K\frac{\xi}{p} + \lambda K\frac{\sqrt{q\xi}}{p} \tag{19}$$

intervallumba esik. Behelyettesítve az adatokat kapjuk, hogy a megadott megbízhatósági szint mellett a teljes bevétel 665,6 millió Ft és 670,7 millió Ft között volt.

A teljes nyereményalap $\frac{1365\xi}{0.35} = 259,9 \cdot 10^6\,\mathrm{Ft}$, amiből kapjuk, hogy a teljes bevétel kb. 38%-a a nyereményalap.