

Valószínűségszámítás és statisztika

2.b. zárthelyi

Minden feladat megoldása 10 pontot ér. A feladatok nincsenek nehézségi sorrendben. A feladatok megoldásánál a számolás mellett a gondolatmenetet is adjuk meg. Jó munkát!

- 1) Legyen ξ és η független valószínűségi változók, melyeknek a sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & \text{ha } |x| < 1, \\ 0, & \text{ha } |x| \geq 1, \end{cases} \quad f_{\eta}(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Mutassuk meg, hogy $\xi\eta$ eloszlása standard normális eloszlású!

(Útmutatás:

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2)$$

- 2) Legyen a ξ_1, ξ_2, \dots független valószínűségi változók sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi_i}(x) = ae^{-a|x|} \quad (3)$$

Határozzuk meg a

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \quad (4)$$

átlag karakterisztikus függvényét!

- 3) Egy buszmegállóban várakozunk, és feljegyezzük az egymás után érkező buszok közötti követési időközöket. A hivatalos menetrend szerint a követési idő 4-5 perc. Tegyük fel, hogy a követési idők exponenciális eloszlást követnek 4,5 perc várható értékkel. Adjunk becslést a Csebisev-egyenlőtlenség segítségével arra, hogy mekkora annak a valószínűsége, hogy a feltevésünk helyes, ha a megfigyelésünk alatt 8 buszt láttunk elmenni, és az átlagos követési idő 5.2 perc volt.
- 4) Az 5-ös lottó legutóbbi sorsolásán 149 645 darab kéttalátalos szelvény volt. A teljes nyereményalap 30%-át osztják szét a 2 talátalosok között. Egy szelvény ára 225 Ft, a 2-es találat legutóbbi nyereménye pedig 1365 Ft volt. A központi határeloszlás-tétel segítségével adjunk becslést arra, hogy 99%-os megbízhatóság mellett mekkora volt a Szerencsejáték Rt. 5-ös lottóból származó bevétele az adott héten!

Ezek szerint a teljes bevétel hányad része képezi a teljes nyereményalapot?