

Valószínűségszámítás és statisztika

2. zárthelyi

Minden feladat megoldása 10 pontot ér. A feladatok nincsenek nehézségi sorrendben. A feladatok megoldásánál a számolás mellett a gondolatmenetet is adjuk meg. Jó munkát!

- 1) Legyenek ξ és η függetlenek, és exponenciális eloszlásúak, azaz

$$f_{\xi}(x) = f_{\eta}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Mutassuk meg, hogy $\frac{\xi}{\xi+\eta}$ eloszlása egyenletes a $[0, 1]$ intervallumon!

- 2) Legyen a ξ_1, ξ_2, \dots független valószínűségi változók sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi_i}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x \leq 0, \end{cases} \quad (2)$$

ahol $\lambda > 0$ állandó.

Határozzuk meg a

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \quad (3)$$

várható értékét és szórását a karakterisztikus függvények segítségével!

- 3) Egy villamosmegállóban várakozunk, és feljegyezzük az egymás után érkező villamosok közötti követési időközöket. A hivatalos menetrend szerint a követési idő 4-5 perc. Tegyük fel, hogy a követési idők egyenletes eloszlást követnek valamely 1 perc széles időintervallumon, ami nem feltétlenül a hivatalos követési idő. Adjunk becslést a Csebisev-egyenlőtlenség segítségével arra, hogy hány villamost kell megvárunk, ha legfeljebb 10%-os hibával szeretnénk meghatározni a követési idők várható értékét!
- 4) A 6-os lottó legutóbbi sorsolásán 66 641 darab háromtalálatos szelvény volt. A központi határeloszlás-tétel segítségével adjunk becslést arra, hogy 95%-os megbízhatóság mellett mekkora volt a Szerencsejáték Rt. 6-ös lottóból származó bevétele az adott héten!

A teljes nyereményalap 35%-át osztják szét a 3 találatosok között. A 3-es találat legutóbbi nyereménye 1365 Ft volt. A teljes bevétel hányad része képezi a nyereményalapot?