Valószínűségszámítás és statisztika

1. zárthelyi megoldása

1) Definiáljuk az $A \diamond B$ műveletet a következőképpen: $A \diamond B = AB + \bar{A}\bar{B}$. Igaz-e, hogy ez a művelet kommutatív és asszociatív, tehát hogy

$$\begin{aligned} A \diamond B &= B \diamond A, \quad \text{illetve} \\ A \diamond (B \diamond C) &= (A \diamond B) \diamond C? \end{aligned}$$

(5 pont)

Megoldás: A kommutativitást következő azonos átalakításokkal kapjuk:

$$A \diamond B = AB + \bar{A}\bar{B} = BA + \bar{B}\bar{A} = B \diamond A$$

Az asszociativitást a következő azonos átalakításokkal kapjuk:

$$\begin{aligned} A \diamond (B \diamond C) &= A \diamond (BC + \bar{B}\bar{C}) \\ &= A(BC + \bar{B}\bar{C}) + \bar{A}\overline{BC + \bar{B}\bar{C}} \\ &= ABC + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}(\bar{B} + \bar{C})(B + C) \\ &= ABC + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} \\ (A \diamond B) \diamond C &= (AB + \bar{A}\bar{B}) \diamond C \\ &= (AB + \bar{A}\bar{B})C + \overline{AB + \bar{A}\bar{B}}\bar{C} \\ &= (AB + \bar{A}\bar{B})C + (A + B)(\bar{A} + \bar{B})\bar{C} \\ &= ABC + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} \end{aligned}$$

2) Egy urnában ν különböző golyó van. Annak a valószínűsége, hogy a golyók száma $\nu = n$, fordítottan arányos a golyók viszatevés nélküli húzásának lehetséges számával. Adjuk meg ν valószínűségeloszlását, az eloszlás generátorfüggvényét, és az urnában lévő golyók számának várható értékét!

(10 pont)

Megoldás: A feltevés szerint $P(\nu = n) = C/n!$, ahol $(n = 0, 1, \dots)$. Mivel az eloszlásnak normáltnak kell lennie, ezért

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C}{n!} = Ce = 1,$$

tehát a normálófaktor $C = e^{-1}$. A generátorfüggvény definíció szerint

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-1}}{n!} z^k = e^{z-1},$$

a várható érték pedig

$$\mathbf{M}(\nu) = G'(z)\big|_{z=0} = e^{z-1}\big|_{z=0} = e^{-1} \approx 0.3678$$

3) Mikulás beletette n fiók közül valamelyikbe az útlevelét, de elfelejtette, hogy melyikbe. Annak a valószínűsége, hogy kihúzva azt a fiókot, amelyben az útlevél van, abban megtalálja az útlevelet, p. A fiókok közül a Mikulás ugyanolyan valószínűséggel húzza ki mindegyiket. Ha az először kihúzott fiókban nem találja Mikulás az útlevelet, mennyi a valószínűsége, hogy az valóban nincs ott?

(15 pont)

Megoldás:

Jelölje A azt az eseményt, hogy az útlevél az első fiókban van, B pedig azt, hogy a Mikulás *nem* találja meg az útlevelét. A feltételek szerint

$$P(A) = 1/n \qquad P(B \mid A) = 1 - p$$
$$P(\bar{A}) = 1 - 1/n \qquad P(B \mid \bar{A}) = 1$$

A Bayes-tétel alapján a kérdéses valószínűség

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \mid B) &= \frac{P(B \mid \bar{A})P(\bar{A})}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \bar{A})P(\bar{A})} \\ &= \frac{1(1 - 1/n)}{(1-p)/n + 1(1 - 1/n)} = \frac{n-1}{n-p} \end{aligned}$$

4) Egy dobozban 2^n cédula van, ezek közül $\binom{n}{k}$ darab cédulára a k szám van felírva ($k = 0, 1, \ldots, n$). Kiveszünk visszatevés nélkül m darab cédulát, Jelölje ξ az ezeken lévő számok összegét. Határozzuk meg ξ várható értékét!

(20 pont)

Megoldás: Jelölje ξ_i az i-edik kihúzott cédulára írt számot. Nyilvánvalóan $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_m$. Mivel valószínűségi változók összegének várható értéke egyenlő a várható értékek összegével, ezért ξ várható értéke

$$\mathbf{M}(\xi) = \mathbf{M}\left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{M}(\xi_i)$$

Mivel az i-edik húzás várható értéke

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\xi_i) &= \sum_{k=1}^{n} kP(\xi_i = k) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \\ &= \frac{n}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{n}{2},\end{aligned}$$

ezért a keresett várható érték

$$\mathbf{M}(\xi) = \frac{mn}{2}.$$

5) Az X_1 és X_2 valószínűségi változók eloszlásának együttes sűrűségfüggvénye $h(x_1, x_2) = C(x_1^2 + x_1x_2)$, ha $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$, egyébként 0. Határozzuk meg a C normálófaktort, a perem-eloszlásokat, valamint a korrelációs együtthatót!

(25 pont)

Megoldás: Mivel az eloszlás normált, ezért

$$\begin{aligned}1 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1\int_0^1 C(x_1^2 + x_1x_2)dx_1dx_2 \\ &= C\left(\left[\frac{x_1^3}{3}\right]_0^1 [x_2]_0^1 + \left[\frac{x_1^2}{2}\right]_0^1\left[\frac{x_2^2}{2}\right]_0^1\right) = C\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = C\frac{7}{12}\end{aligned}$$

Ebből következően a normálófaktor $C = \frac{12}{7}$.

X_1 peremeloszlása

$$\begin{aligned}f(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, x_2)dx_2 = \int_0^1 C\left(x_1^2 + x_1x_2\right)dx_2 \\ &= C\left(x_1^2\left[x_2\right]_0^1 + x_1\left[\frac{x_2^2}{2}\right]_0^1\right) = \frac{12}{7}\left(x_1^2 + \frac{x_1}{2}\right)\end{aligned}$$

X_2 peremeloszlása

$$\begin{aligned}g(x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, x_2)dx_1 = \int_0^1 C\left(x_1^2 + x_1x_2\right)dx_1 \\ &= C\left(\left[\frac{x_1^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x_1^2}{2}\right]_0^1 x_2\right) = \frac{12}{7}\left(\frac{1}{3} + \frac{x_2}{2}\right)\end{aligned}$$

A korrelációs együttható,

$$R(X_1, X_2) = \frac{\mathbf{M}(X_1X_2) - \mathbf{M}(X_1)\mathbf{M}(X_2)}{\mathbf{D}(X_1)\mathbf{D}(X_2)}$$

kiszámításához szükségünk van a következő kifejezésekre:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}(X_1) &= \int_0^1 x_1\, f(x_1) dx_1 = \frac{5}{7} \\
\mathbf{M}(X_2) &= \int_0^1 x_2\, g(x_2) dx_2 = \frac{4}{7} \\
\mathbf{M}(X_1 X_2) &= \int_0^1 \int_0^1 x_1 x_2\, h(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{17}{42} \\
\mathbf{D}^2(X_1) &= \int_0^1 (x_1 - \mathbf{M}(X_1))^2\, f(x_1) dx_1 = \frac{23}{490} \\
\mathbf{D}^2(X_2) &= \int_0^1 (x_2 - \mathbf{M}(X_2))^2\, g(x_2) dx_2 = \frac{23}{294}
\end{aligned}
$$

amiből kapjuk, hogy

$$
R(X_1, X_2) = -\frac{1}{23}\sqrt{\frac{5}{3}} \approx -5,513 \times 10^{-2}
$$