# Valószínűségszámítás és statisztika
## 2. pótzárthelyi megoldása

1) Legyen a $\xi$ és $\eta$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

$$h_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{1-r^2}e^{-\frac{1}{2}\left(x^2-2rxy+y^2\right)}. \tag{1}$$

Határozzuk meg a $\xi/\eta$ sűrűségfüggvényét.

**Megoldás:** Két valószínűségi változó hányadosának sűrűségfüggvényére vonatkozó transzformációs képletből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
f_{\xi/\eta}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} |y| h_{\xi,\eta}(xy,y)dy \\
&= \frac{\sqrt{1-r^2}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |y| e^{-\frac{1}{2}\left(x^2y^2-2rxyy+y^2\right)}dy \\
&= 2\frac{\sqrt{1-r^2}}{2\pi}\int_{0}^{\infty} y e^{-\frac{1}{2}y^2\left(x^2-2rx+1\right)}dy \\
&= \frac{\sqrt{1-r^2}}{\pi}\left[-\frac{1}{x^2-2rx+1}e^{-\frac{1}{2}y^2\left(x^2-2rx+1\right)}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{1-r^2}}{x^2-2rx+1} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}}\frac{1}{\left(\frac{x-r}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2+1}
\end{aligned} \tag{2}$$

**1. megjegyzés:** Ez az eloszlás egy általánosított Cauchy-eloszlású valószínűségi változó, mely egy standard Cauchy-eloszlású változó lineáris transzmormáltja.

**2. megjegyzés:** Ha két valószínűségi változó nem független, akkor az együttes sűrűségfüggvényt kell használni a transzformációnál, és nem lehet a peremeloszlások szorzatát használni.

2) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók a $[0,1]$ intervallumon. Határozzuk meg a $\eta_n = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét.

**Megoldás:** A $\xi_i$ valószínűségi változók egyenletes eloszlásúak, ezért az eloszlásfüggvényük

$$F_{\xi_i}(x) = P(\xi_i < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ x, & \text{ha } 0 \le x \le 1, \\ 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases} \tag{3}$$

Az $\eta_n$ eloszlásfüggvénye

$$F_{\eta_n}(x) = P(\eta_n < x) = P(\max_i \xi_i < x) = P(\xi_1 < x, \xi_2 < x, \dots, \xi_n < x)$$
$$= P(\xi_1 < x)P(\xi_2 < x)\cdots P(\xi_n < x) = [F_{\xi_i}(x)]^n. \qquad (4)$$

tehát

$$F_{\eta_n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ x^n, & \text{ha } 0 \le x \le 1, \\ 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases} \qquad (5)$$

Ebből könnyen megkapjuk $\eta_n$ sűrűségfüggvényét

$$f_{\eta_n}(x) = F'_{\eta_n}(x) = nx^{n-1}. \qquad (6)$$

Végül a karakterisztikus függvény

$$\phi_{\eta_n}(t) = \mathbf{M}\left(e^{i\eta_n t}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f_{\eta_n}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} nx^{n-1}dx \qquad (7)$$

3) Mutassuk meg, hogy ha a $\xi_k$ $(k = 1, 2, \dots)$ valószínűségi változókra $\mathbf{M}(\xi_k) \neq 0$, és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{D}(\xi_n)}{\mathbf{M}(\xi_n)} = 0, \qquad (8)$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{st}\, \frac{\xi_n}{\mathbf{M}(\xi_n)} = 1. \qquad (9)$$

**Megoldás:** Definíció szerint azt kell belátni, hogy tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén a

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{\mathbf{M}(\xi_n)} - 1\right| > \epsilon\right) \qquad (10)$$

valószínűség nullához konvergál $n \to \infty$ esetén.

Alkalmazzuk a $\frac{\xi_n}{\mathbf{M}(\xi_n)}$ valószínűségi változóra a Csebisev-egyenlőtlenséget! Mivel

$$\mathbf{M}\left(\frac{\xi_n}{\mathbf{M}(\xi_n)}\right) = \frac{1}{\mathbf{M}(\xi_n)}\mathbf{M}(\xi_n) = 1, \qquad (11)$$

ezért a Csebisev-egyenlőtlenségből az adódik, hogy

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{\mathbf{M}(\xi_n)} - 1\right| > \epsilon\right) < \frac{\mathbf{D}^2\left(\frac{\xi_n}{\mathbf{M}(\xi_n)}\right)}{\epsilon^2} = \frac{\mathbf{D}^2(\xi_n)}{\epsilon^2 \mathbf{M}(\xi_n)^2} = \frac{1}{\epsilon^2}\left(\frac{\mathbf{D}(\xi_n)}{\mathbf{M}(\xi_n)}\right)^2 \qquad (12)$$

Mivel a (8) feltétel szerint a jobb oldal nullához tart, ezért a bal oldal is nullához tart $n \to \infty$ esetén.

4) Ha készpénzzel fizetünk, akkor a legközelebbi 5 forintosra kell kerekíteni. Tegyük fel, hogy a termékek árának utolsó számjegye egyenletes eloszlást követ. Ha naponta átlagosan 15 terméket vásárolunk, mekkora a valószínűsége, hogy egy év alatt a kerekítésekből 100 Ft hasznunk származik?

**Megoldás:** Jelölje az $i$-edik vásárlás során a kerekítést $\xi_i$. Ez a változó nyilvánvalóan $-2, -1, 0, 1$ és 2 értéket vehet fel, a feltevés szerint azonos $p = \frac{1}{5}$ valószínűséggel. A $\xi_i$ valószínűségi változó várható értéke azért $\mathbf{M}(\xi_i) = \sum_{k=-2}^{2} kP(\xi_i = k) = 0$. A szórásnégyzet pedig

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2(\xi_i) = \mathbf{M}(\xi_i^2) - \mathbf{M}(\xi_i)^2 &= \sum_{k=-2}^{2} k^2 P(\xi_i = k) - 0 \\ &= \frac{1}{5}(4+1+0+1+4) = 2 \end{aligned} \tag{13}$$

Jelölje $\eta_n$ az $n$ vásárlás utáni az összes kerekítést. Ez nyilvánvalóan az egyes vásárlások utáni kerekítések összege, tehát $\eta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$. A keresett valószínűség

$$\begin{aligned}P(\eta_n > \Delta X) = P\left(\frac{\eta_n}{\mathbf{D}(\eta_n)} > \frac{\Delta X}{\mathbf{D}(\eta_n)}\right) &\approx 1 - \Phi\left(\frac{\Delta X}{\mathbf{D}(\eta_n)}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\Delta X}{\sqrt{n}\mathbf{D}(\xi_i)}\right), \end{aligned} \tag{14}$$

ahol alkalmaztuk a központi határeloszlás tételt, kihasználtuk, hogy független véletlen változók esetén $\mathbf{D}^2(\eta_n) = \mathbf{D}^2\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = n\mathbf{D}^2(\xi_i)$, azaz $\mathbf{D}(\eta_n) = \sqrt{n}\mathbf{D}(\xi_i)$, valamint $\Phi(x)$ jelöli a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét.

Az adatokat behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}P(\eta_n > 100) = 1 - \Phi\left(\frac{100}{\sqrt{15 \times 365}\sqrt{2}}\right) &\approx 1 - \Phi\left(\frac{100}{\sqrt{10000}}\right) \\ &= 1 - \Phi(1) \approx \frac{100\% - 68\%}{2} = 16\%, \end{aligned} \tag{15}$$

ahol kihasználtuk, hogy normális eloszlású véletlen változó esetén a változó értéke a várható érték körüli egy szórásnyi intervallumba kb. 68% valószínűséggel esik.

A számológéppel kapható pontos érték $P(\eta_n > 100) = 16,96\%$.