Valószínűségszámítás és statisztika

1. pótzárthelyi megoldása

1) Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, és C eseményre

$$A - [A - (B - C)] = AB\bar{C} \tag{1}$$

Megoldás: Definíció szerint $A - B = A\bar{B}$. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A - [A - (B - C)] &= A\,\overline{A - (B - C)} = A\,\overline{A\overline{B - C}} \\ &= A[\bar{A} + (B - C)] = A\bar{A} + A(B - C) = AB\bar{C} \end{aligned} \tag{2}$$

2) n különböző színű golyót helyezünk el n urnába úgy, hogy mind az n^n elhelyezés egyenlően valószínű. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan egy urna marad üresen?

Megoldás: A klasszikus valószínűség alapján a valószínűséget úgy kaphatjuk meg, hogy összeszámoljuk a kedvező eseteket, és elosztjuk az összes esetek számával.

Számoljuk össze azokat az eseteket, amikor egy adott urna, mondjuk az első, üres, a többi pedig nem üres. Tegyünk ehhez először minden urnába pontosan egy golyót. Az első nem üres urnába ekkor n féle golyót tehetünk, a következőbe $n-1$-et, és így tovább. Végül marad egy golyó, amit $n-1$ helyre tehetünk. Arra kell még figyelni, hogy mindegy, hogy milyen sorrendben kerültek a két golyót tartalmazó urnába a golyók, ezért a fenti gondolatmenettel minden esetet kétszer számoltunk. Mivel az üres urnát szintén szabadon választhatjuk, ezért az eddig összeszámolt eseteket meg kell még szorozni n-nel. Ebből a következő kifejezést kapjuk:

$$N_{\text{kedvező}} = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot (n-1) \cdot n \cdot \frac{1}{2} = n!\frac{n(n-1)}{2} \tag{3}$$

A keresett valószínűség tehát

$$P = \frac{n!n(n-1)}{2n^n} = \frac{(n-1)!(n-1)}{2n^{n-2}} \tag{4}$$

2. megoldás: A keresett valószínűséget a polinomiális eloszlásból is megkaphatjuk. Ha p_i annak a valószínűsége, hogy egy adott golyó az i-edik urnába kerül, akkor annak a valószínűsége, hogy az urnákba rendre $n_1, n_2, \ldots, n_n$ golyó kerül:

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_n) = \frac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_n!}p_1^{n_1}p_2^{n_2} \cdots p_n^{n_n} \tag{5}$$

Legyen A_{ij} az az esemény, hogy az i-edik urna üres, a j-edikben pedig két golyó van, Mivel minden golyó $p = 1/n$ valószínűséggel kerülhet egy adott urnába, ezért a fentiek szerint az A_{ij} esemény valószínűsége

$$P(A_{ij}) = \frac{n!}{0!1!\ldots 1!2!}\frac{1}{n^n} = \frac{n!}{2n^n} \tag{6}$$

Mivel az i és j urnák $n(n-1)$ féleképpen választhatók, ezért a keresett valószínűség

$$P(A) = \sum_{i \neq j} P(A_{ij}) = n(n-1)P(A_{ij}) = \frac{(n-1)!(n-1)}{2n^{n-2}}. \tag{7}$$

Megjegyzés: Az a gondolat, hogy a kedvező esetek száma $(n-1)^n$ azért nem jó, mert ekkor olyan eseteket is számolunk, amikor több, mint egy urna üres.

3) Egy urnában 3 golyó van: egy piros, egy fehér és egy fekete. Ötször húzunk az urnából találomra egy–egy golyót úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a kihúzott golyót. Feltéve, hogy feketét és fehéret is húztunk, mi a valószínűsége, hogy egyszer sem húztunk pirosat?

Megoldás: Jelölje n a húzások számát, p_r, p_b, p_w rendre a piros, a fekete és a fehér golyó húzásának valószínűségét, valamint R, B és W rendre azokat az eseményeket, hogy n húzásból nem húztunk piros, fekete, illetve fehér golyót. Nyilvánvaló, hogy $p_r + p_b + p_w = 1$.

A fenti jelölésekkel annak a valószínűsége, hogy egyszer sem húztunk pirosat, feltéve, hogy feketét és fehéret is húztunk a következő feltételes valószínűségként írható: $P(R \mid \bar{B}\bar{W})$.

Számítsuk ki ezt a valószínűséget a Bayes-tétel segítségével:

$$P(R \mid \bar{B}\bar{W}) = \frac{P(\bar{B}\bar{W} \mid R)P(R)}{P(\bar{B}\bar{W})} \tag{8}$$

A számlálót a következőképpen határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} P(\bar{B}\bar{W} \mid R)P(R) &= \Big(1 - P(\overline{\bar{B}\bar{W}} \mid R)\Big)\, P(R) \\ &= (1 - P(B + W \mid R))\, P(R) \\ &= (1 - (P(B \mid R) + P(W \mid R) - P(BW \mid R)))\, P(R) \\ &= P(R) - P(BR) - P(WR) + P(BWR) \\ &= (1 - p_r)^n - p_w^n - p_b^n \\ &= (p_w + p_b)^n - p_w^n - p_b^n \end{aligned} \tag{9}$$

ahol kihasználtuk azt, hogy BR esemény bekövetkezése esetén, azaz ha se feketét sem pirosat nem húzunk, akkor csak fehéret húzhatunk. Hasnonlóképpen, WR esemény esetén csak feketét húzhatunk. Végül a BWR esemény nyilvánvalóan a lehetetlen esemény, mert nem lehetséges, hogy sem feketét, sem fehéret és sem pirosat nem húzunk.

A nevező annak a valószínűsége, hogy feketét és fehéret is húzunk:

$$\begin{aligned} P(\bar{B}\bar{W}) &= 1 - P(\overline{\bar{B}\bar{W}}) = 1 - P(B + W) \\ &= 1 - (P(B) + P(W) - P(BW)) \\ &= 1 - ((1 - p_b)^n + (1 - p_w)^n - p_r^n) \\ ,&= 1 + (1 - p_w - p_b)^n - (1 - p_w)^n - (1 - p_b)^n, \end{aligned} \tag{10}$$

ahol kihasználtuk azt, hogy BW esemény bekövetkezése esetén, azaz ha se feketét sem fehéret nem húzunk, akkor csak pirosat húzhatunk.

Behelyettesítve a (9) és (10) kifelyezéseket (8) képletbe kapjuk, hogy

$$P(R \mid \bar{B}\bar{W}) = \frac{(p_w + p_b)^n - p_w^n - p_b^n}{1 + (1 - p_w - p_b)^n - (1 - p_w)^n - (1 - p_b)^n} \tag{11}$$

Felhasználva, hogy a feladat szerint $p_r = p_b = p_w = \frac{1}{3}$, illetve, hogy $n = 5$ kapjuk, hogy

$$P(R \mid \bar{B}\bar{W}) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^5} = \frac{2^5 - 2}{3^5 + 1 - 2^6} = \frac{30}{180} = \frac{1}{6} \tag{12}$$

4) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független, Poisson eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg az

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{n} k\xi_k \tag{13}$$

valószínűségi változó várható értékét és szórását.

Megoldás: A λ paraméterű Poisson eloszlás várható értéke és szórás négyzete egyaránt λ, ezért minden k-re $\mathbf{M}(\xi_k) = \mathbf{D}^2(\xi_k) = \lambda$. Mivel tetszőleges valószínűségi változók lineáris kombinációjának várható értéke egyenlő az egyes várható értékek lineáris kombinációjával (azaz a várható érték képzés lineáris funkcionál), ezért

$$\mathbf{M}(\eta_n) = \mathbf{M}\left(\sum_{k=1}^{n} k\xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{M}(\xi_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} k = \lambda \frac{n(n+1)}{2}, \tag{14}$$

még abban az esetben is, ha ξ_k-k nem lennének függetlenek.

Független véletlen változók esetén a szórásnégyzet képzés is lineáris, ezért

$$\mathbf{D}^2(\eta_n) = \mathbf{D}^2\left(\sum_{k=1}^{n} k\xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbf{D}^2(\xi_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} k = \lambda \frac{n(n+1)}{2}, \tag{15}$$

a szórás tehát

$$\mathbf{D}^2(\eta_n) = \sqrt{\frac{\lambda n(n+1)}{2}}. \tag{16}$$

5) Legyen a ξ és η valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

$$h(x,y) = \frac{1}{8\pi^2} e^{-\frac{x^2+\pi^2 y^2}{8\pi^2}}. \tag{17}$$

Határozzuk meg ξ és η várható értékét és szórását!

Megoldás: A ξ és η változók várható értékének és szórának meghatározásához elegendő a határeloszlásokat ismerni. A ξ sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} f_\xi(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dy = \frac{1}{8\pi^2} e^{-\frac{x^2}{8\pi^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{8}} dy \\ &= \frac{1}{8\pi^2} e^{-\frac{x^2}{8\pi^2}} 2\sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}2\pi} e^{-\frac{x^2}{2(2\pi)^2}}, \end{aligned} \tag{18}$$

amely nem más, mint egy 0 várható értékű és 2π szórású normális eloszlású változó sűrűságfüggvénye. Ebből következik tehát, hogy

$$\mathbf{M}(\xi) = 0 \qquad \mathbf{D}(\xi) = 2\pi. \tag{19}$$

Másrészről, η sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} f_\eta(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dx = \frac{1}{8\pi^2} e^{-\frac{y^2}{8}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{8\pi^2}} dx \\ &= \frac{1}{8\pi^2} e^{-\frac{y^2}{8}} 2\pi\sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}2} e^{-\frac{x^2}{2(2)^2}}, \end{aligned} \tag{20}$$

amely pedig nem más, mint egy 0 várható értékű és 2 szórású normális eloszlású változó sűrűságfüggvénye. Ebből következik tehát, hogy

$$\mathbf{M}(\eta) = 0 \qquad \mathbf{D}(\eta) = 2. \tag{21}$$