Valószínűségszámítás és statisztika

2. GyakUV megoldása

Minden feladat megoldása 10 pontot ér. A feladatok nincsenek nehézségi sorrendben. A feladatok megoldásánál a számolás mellett a gondolatmenetet is adjuk meg. Jó munkát!

1) Legyen a ξ és η valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

$$h_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{2\lambda^{3/2}}{\sqrt{\pi}} x e^{-\lambda xy}, & \text{ha } 0 < x < y \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \tag{1}$$

Határozzuk meg a $\xi\eta$ szorzat sűrűségfüggvényét.

Megoldás: A szorzat sűrűségfüggvényét a következő transzformációval kapjuk:

$$f_{\xi\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} h_{\xi,\eta}\left(x, \frac{z}{x}\right) dx \tag{2}$$

Mivel az integrandus csak akkor nem nulla, ha $x > 0$ és $x < \frac{z}{x}$, azaz $x < \sqrt{z}$, az integrál határaira kapjuk, hogy

$$f_{\xi\eta}(z) = \frac{2\lambda^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} \frac{1}{x} x e^{-\lambda x \frac{z}{x}} dx = \frac{2\lambda^{3/2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda z} \int_0^{\sqrt{z}} dx = \sqrt{\frac{4\lambda^3 z}{\pi}} e^{-\lambda z} \tag{3}$$

2) Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg a $|\xi|$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét, és mutassuk meg, hogy az minden valós $t \neq 0$-ra komplex az értéke.

Megoldás: Definíció szerint

$$\begin{aligned} \phi_{|\xi|}(t) = \mathbf{M}\left(e^{i|\xi|t}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i|x|t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2 + ixt} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2 - \frac{t^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2} dx \end{aligned} \tag{4}$$

Az integrált a következőképpen számíthatjuk ki. Az integrált a komplex síkon egy olyan egyenesen kell elvégezni, mely a $(0, -it)$ pontból indul, és a valós tengellyel párhumazosan a pozitív irányban a végtelenbe tart. Zárjuk be az integrációs útvonalat a valós tengelyen egy véges A valós értéknél, a képzetes tengellyel párhuzamosan a valós tengelyig, majd a valós tengelyen az origóig, végül a képzetes tengelyen a kiindulópontig.

Ekkor egy körintegrált kapunk, és mivel az integrációs útvonal nem zár körül pólust, ezért a körintegrál értéke nulla. Ha az A értékkel tartunk a végtelenhez, akkor a képzetes tengellyel párhuzamos szakasz járuléka nullához tart. A fentiek alapján a körintegrál így írható:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}dx + 0 + \int_\infty^0 e^{-\frac{1}{2}x^2}dx + \int_0^t e^{-\frac{1}{2}(-ix)^2}d(-ix) = 0 \qquad (5)$$

amiből a keresett integrál értéke

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\int_0^t e^{\frac{x^2}{2}}dx. \qquad (6)$$

Behelyettesítve a karakterisztikus függvénybe kapjuk, hogy

$$\phi_{|\xi|}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} + i\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\int_0^t e^{\frac{x^2}{2}}dx. \qquad (7)$$

Ez a kifejezés pedig nyilvánvalóan csak akkor lehet valós, ha $t = 0$.

3) Adjuk meg két, egymástól független, λ_1 és λ_2 paraméterekkel jellemzett exponenciális eloszlású pozitív valószínűségi változó maximumának eloszlását!

Megoldás: Definíció szerint

$$\begin{aligned} F_{\max(\xi_1,\xi_2)}(x) &= P(\max(\xi_1,\xi_2) < x) = P(\xi_1 < x, \xi_2 < x) \\ &= P(\xi_1 < x)P(\xi_2 < x) = F_{\xi_1}(x)F_{\xi_2}(x) \\ &= \left(1 - e^{-\lambda_1 x}\right)\left(1 - e^{-\lambda_2 x}\right) \end{aligned} \qquad (8)$$

4) Egy éjjel–nappali boltba egymástól függetlenül érkeznek a vásárlók. A vásárlók közötti időközök exponenciális eloszlásúak $1/\lambda = 5\,\text{min}$ várható értékkel. A tulajdonos szeretné a 100 000-edik vendéget ingyenesen vendégül látni. Mi a valószínűsége, hogy egy éven belül érkezik a 100 000-edik vendég.

Megoldás: Jelölje ξ_k az $k-1$-edik és az k-edik vásárló között eltelt időt. A feladat szerint $\mathbf{M}(\xi_k) = 1/\lambda = 5\,\text{perc}$, és mivel az időközök ezponenciális eloszlásúak, ezért a szórás is $\mathbf{D}(\xi_k) = 1/\lambda = 5\,\text{perc}$.

Ha τ_N jelöli az N-edik vásárlóig eltelt időt, akkor nyilvánvalóan $\tau_N = \sum_{k=1}^N \xi_k$. Mivel a vásárlók között eltelt idők függetlenek, ezért $\mathbf{M}(\tau_N) = N/\lambda$, és $\mathbf{D}(\tau_N) = \sqrt{N}/\lambda$.

A kérdés az, hogy mennyi a $P(\tau_N < T)$ valószínűség, ahol $T = 1\,\text{év}$. A központi határeloszlás tétel szerint

$$P(\tau_N < T) = P\left(\frac{\tau_N - \mathbf{M}(\tau_N)}{\mathbf{D}(\tau_N)} < \frac{T - \mathbf{M}(\tau_N)}{\mathbf{D}(\tau_N)}\right) \approx \Phi\left(\frac{T - N/\lambda}{\sqrt{N}/\lambda}\right) \qquad (9)$$

Behelyettesítve az adatokat kapjuk, hogy

$$P(\tau_N < T) \approx \Phi\left(\frac{60 \times 24 \times 365 - 5 \times 10^5}{5\sqrt{10^5}}\right) = \Phi(16{,}19) \approx 1. \qquad (10)$$

Megjegyzés: Annak a valószínűsége, hogy több, mint egy év múlva érkezik a 100 000-edik vásárló kb. 7×10^{-116}.