Valószínűségszámítás és statisztika
1. GyakUV megoldása

1) Alkossanak A, B és C teljes eseményrendszert, és legyen

$$X = \overline{A + BA + CB + C}. \tag{1}$$

Mutassuk meg, hogy X a lehetetlen esemény.

Megoldás: A következő azonos átalakításokkal kapjuk, hogy

$$X = \overline{A + BA + CB + C} = \bar{A}\bar{B}\bar{A}\bar{C}\bar{B}\bar{C} = \bar{A}\bar{B}\bar{C} = \overline{A + B + C} \tag{2}$$

Mivel A, B és C teljes eseményrendszert alkot, azért $A + B + C = \Omega$, azaz a biztos esemény, így $X = \bar{\Omega} = \emptyset$, a lehetetlen esemény.

2) A rulettasztalon 37 szám van, melyek közül 18 piros, 18 fekete, a 0 szám pedig se nem piros, se nem fekete. Gipsz Jakab a legénybúcsúja végén betért a kaszinóba, és addíg játszott a ruletten piros számokat, amíg nem nyert.

Másnap a legénybúcsú fáradalmait pihente ki, és azon gondolkodott, hogy vajon hányszor játszott a ruletten. Arra emlékezett csupán, hogy páros számú játékot játszott. Mi a valószínűsége, hogy pontosan két játékot játszott?

Megoldás: Jelölje A_k az az esemény, hogy a k-adik játékban nyert Gipsz Jakab, C azt az eseményt, hogy páros játékot játszott. Ezekkel a jelölésekkel a keresett valószínűség $P(A_2 \mid C)$.

Jelölje $p = \frac{18}{37}$ a piros számok valószínűségét. Az A_k események valószínűsége nyilvánvalóan geometriai eloszlást követ:

$$P(A_k) = (1-p)^{k-1}p \tag{3}$$

Nyilvánvaló továbbá, hogy $C = \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k}$, és mivel A_k egymást kizáró események, ezért

$$\begin{aligned}
P(C) &= P\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{2k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_{2k}) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{2k-1}p \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^{2k+1}p = p(1-p)\sum_{k=0}^{\infty}\left[(1-p)^2\right]^k \\
&= \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}
\end{aligned} \tag{4}$$

Mivel $A_2C = A_2$, ezért a keresett valószínűség

$$P(A_2 \mid C) = \frac{P(A_2C)}{P(C)} = \frac{P(A_2)}{P(C)} = \frac{(1-p)p}{\frac{1-p}{2-p}} = p(2-p) \tag{5}$$

Behelyettesítve p értékét

$$P(A_2 \mid C) = p(2-p) = \frac{1008}{37^2} \approx 73,6\% \tag{6}$$

3) A ξ valószínűségi változó Cauchy-eloszlást követ, melynek eloszlásfüggvénye $F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(x)$. Határozzuk meg az $\eta = me^\xi$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét.

Megoldás: Az η eloszlásfüggvénye definíció szerint

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(me^\xi < x) = P(\xi < \ln(x/m)) \tag{7}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\left(\ln\left(\frac{x}{m}\right)\right) \tag{8}$$

4) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók, és $\eta_n = \xi_1\xi_2\cdots\xi_n$. Határozzuk meg az

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\eta_n \tag{9}$$

valószínűségi változó várható értékét.

Megoldás: Legyen ξ_k eloszlásfüggvénye $F_{\xi_k}(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Ekkor $\mathbf{M}(\xi_k) = 1/\lambda$. Mivel $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \dots$ függetlenek, ezért

$$\mathbf{M}(\eta_n) = \mathbf{M}(\xi_1)\boldsymbol{\xi_2}\cdots\mathbf{M}(\xi_n) = \frac{1}{\lambda^n} \tag{10}$$

Ebből következik, hogy

$$\mathbf{M}(\eta) = \mathbf{M}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\eta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{\lambda^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{\lambda^n} - 1 = e^{-\lambda} - 1 \tag{11}$$

5) A ξ és η egész értékeket felvevő valószínűségi változók együttes eloszlásának karakterisztikus függvényének logaritmusa

$$\ln\phi(u,v) = \ln\mathbf{M}(e^{i(u\xi+v\eta)})$$

$$= \lambda\left(e^{ihu}-1\right) + \mu\left(e^{ihv}-1\right) + \rho\left(e^{ih(u+v)}-1\right) \tag{12}$$

ahol $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\rho > 0$, valamint $h > 0$ állandók.

Határozzuk meg ρ és η korrelációs együtthatóját.

Megoldás: Könnyen látható, hogy

$$\partial_u^2 \ln \phi(u,v) = \partial_u \frac{\partial_u \phi(u,v)}{\phi(u,v)} = \frac{\partial_u^2 \phi(u,v)}{\phi(u,v)} - \left(\frac{\partial_u \phi(u,v)}{\phi(u,v)} \right)^2 \tag{13}$$

Mivel $\phi(0,0) = 1$, ezért

$$\partial_u^2 \ln \phi(u,v)\big|_{u=v=0} = \partial_u^2 \phi(u,v)\big|_{u=v=0} - \left(\partial_u \phi(u,v)|_{u=v=0} \right)^2 \tag{14}$$

$$= -\mathbf{M}(\xi^2) + \mathbf{M}(\xi)^2 = -\mathbf{D}^2(\xi) \tag{15}$$

Hasonlóképpen

$$\partial_v^2 \ln \phi(u,v)\big|_{u=v=0} = -\mathbf{D}^2(\eta) \tag{16}$$

Harmadrészt

$$\partial_u \partial_v \ln \phi(u,v)|_{u=v=0} = \partial_u \partial_v \phi(u,v)|_{u=v=0} \tag{17}$$

$$- \partial_u \phi(u,v)\big|_{u=v=0} \partial_v \phi(u,v)|_{u=v=0} \tag{18}$$

$$= -\mathbf{M}(\xi\eta) + \mathbf{M}(\xi)\mathbf{M}(\eta) = -\mathbf{Cov}(\xi,\eta) \tag{19}$$

Ezekből a korrelációs együtthatóra kapjuk, hogy

$$\mathbf{R}(\xi,\eta) = \frac{\mathbf{Cov}(\xi,\eta)}{\mathbf{D}(\xi)\mathbf{D}(\eta)} = - \left. \frac{\partial_u \partial_v \phi(u,v)}{\sqrt{\partial_u^2 \phi(u,v) \partial_v^2 \phi(u,v)}} \right|_{u=v=0} \tag{20}$$

$$= \frac{\rho h^2}{\sqrt{(\lambda+\rho)\, h^2\, (\mu+\rho)\, h^2}} = \frac{\rho}{\sqrt{(\lambda+\rho)\,(\mu+\rho)}} \tag{21}$$