Elektrontér operátora:

Dirac-egyenlet: $(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m)\psi(\underline{x},t) = 0$

$x^\mu = (x^0, \underline{x})$, $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$, $\underline{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{\sigma} \\ -\underline{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{\psi} = \psi^{T*}\gamma^0 = \psi^+\gamma^0$

$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

Dirac-hatás:

$\int d^4x\, \mathcal{L}_D = \int d^4x\, \bar{\psi}(i\gamma^\mu \vec{\partial}_\mu - m)\psi$

$\Pi_{\psi(x,t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}(x,t)} = \bar{\psi} i \gamma^0 = i\psi^+$

Síkhullám-megoldásokat

$\psi_p^{(1)}(\underline{x},t) = e^{-i(p_0x_0 - \underline{p}\underline{x})}u(p)$

$\psi_p^{(2)}(\underline{x},t) = e^{i(p_0x_0 - \underline{p}\underline{x})}v(p)$

$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0$

$(\gamma^\mu p_\mu + m)v(p) = 0$

$u(p) = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ HF: $v(p)$-re

$\left.\begin{aligned} (p_0 - m)\xi - \underline{p}\underline{\sigma}\eta = 0 \\ \underline{p}\underline{\sigma}\xi - (p_0+m)\eta = 0 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} &\to \left[(p_0-m) - \frac{(\underline{p}\underline{\sigma})^2}{p_0+m}\right]\xi = 0 \\ &\to \eta = \frac{\underline{p}\underline{\sigma}}{p_0+m}\xi \end{aligned}$

$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + 2\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

antiszimm. szimm.

$(p_ip_j\sigma_i\sigma_j) = (\delta_{ij} + 2\varepsilon_{ijk}\sigma_k)p_ip_j = \underline{p}^2$

$(p_0 - m - \frac{\underline{p}^2}{p_0+m})\xi = 0$

$p_0^2 - m^2 - \underline{p}^2 = 0 \Rightarrow p^\mu p_\mu = m^2$ diszperziós reláció

$p_0 = \pm\sqrt{m^2 + \underline{p}^2}$

válasszuk a pozitív energiásat $\to$ ξ-re két független megoldás: $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u_s(p) = \sqrt{p_0+m}\begin{pmatrix} \xi_s \\ \frac{\underline{\sigma}\underline{p}}{p_0+m}\xi_s \end{pmatrix}$

$\bar{u}_s = u_s^+\gamma^0$ HF: biz.: $-\ \bar{u}_s(p)u_s(p) = 2m$ Lorentz-invariáns

$-\ u_s^+(p)u_s(p) = 2p_0$

$v_s(p) = -\sqrt{p_0+m}\begin{pmatrix} \frac{\underline{\sigma}\underline{p}}{p_0+m}\epsilon\xi_s \\ \epsilon\xi_s \end{pmatrix}$

$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

 04.09.

$$\hat{\Psi}(\underline{x},t) = \sum_{s=1}^{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_0} \left[e^{ipx} v_s(p) \hat{b}_s^+(p) + e^{-ipx} u_s(p) \hat{a}_s(p) \right]$$

Pauli-elv miatt antikommutációs relációk

$\{\hat{a}_s(p), \hat{a}_{s'}^+(p')\} = \delta_{ss'}(2\pi)^3 2p_0 \delta^{(3)}(p-p')$

$\{\hat{b}_s(p), \hat{b}_{s'}^+(p')\} = \delta_{ss'}(2\pi)^3 2p_0 \delta^{(3)}(p-p')$

$\{\hat{a}_s(p), \hat{b}_{s'}^+(p')\} = 0$ (és a többi)

HF: $\{\hat{\Psi}(\underline{x},0), \hat{\Psi}(\underline{y},0)\} = ?$

04.16.

$\{\hat{a}_s^+(p), \hat{a}_{s'}^+(p')\} = 0 = \{\hat{b}_s^+(p), \hat{b}_{s'}^+(p)\}$ Pauli-elv

vákuum: $\hat{a}_s(p)|0\rangle = \hat{b}_s(p)|0\rangle = 0$

eddig volt a Dirac egyenlet $(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\Psi(x) = 0$

elektromágneses térben

$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ kovariáns derivált

HF: $A_\mu \xrightarrow{\Lambda(x)} A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \Lambda$
$\Psi(x) \xrightarrow{\Lambda(x)} e^{i\Lambda}\Psi(x)$ } mértékinvariancia

$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi$

$\mathcal{L}_I = e\bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi A_\mu \to$ kölcsönhatási Lagrange-sűrűség

$H_I = -e\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)A_\mu(x) = j^\mu_{Dirac} A_\mu$

$Q_{naiv} = -e\int d^3x\, \Psi^+(x)\Psi(x) =$ → töltés operátora naivan

$\cancel{v_s^+(p) v_{s'}(p')}$ $\cancel{(2\pi)^3}\, \delta^{(3)}(p-p')$

$$= -e\sum_{s,s'} \int_p \int_{p'} \int d^3\underline{x} \Big[e^{-i(p-p')x} v_s^+(p) v_{s'}(p') b_s(p) b_{s'}^+(p') +$$

↳ Lorentz-invariáns integrálási mérték $\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p_0}$

$$+ e^{i(p-p')x} u_s^+(p) u_{s'}(p') a_s^+(p) a_{s'}(p') +$$
$$+ e^{-i(p+p')x} v_s^+(p) u_{s'}(p') b_s^+(p) a_{s'}(p') +$$
$$+ e^{i(p+p')x} u_s^+(p) v_{s'}(p') a_s^+(p) b_{s'}(p') \Big] = *$$

$$u_s^+(p) v_{s'}(-p) = \left(\chi_s^T, \chi_s^T \frac{\sigma p}{p_0+m}\right) \begin{pmatrix} \frac{-\sigma p}{p_0+m}\epsilon\chi_{s'} \\ \epsilon\chi_{s'} \end{pmatrix} (-1)(p_0+m) = 0$$

$v_s^+(p) u_s(-p) = 0$

$v_s^+(p)\, v_{s'}(p) = 2p_0\, \delta_{ss'}$

$u_s^+(p)\, u_{s'}(p) = 2p_0\, \delta_{ss'}$

$* = -e \int_p \sum_s \left[b_s(p)\, b_s^+(p) + a_s^+(p)\, a_s(p) \right]$

vákuum töltése: $\langle 0 | Q_{naiv} | 0 \rangle = -e \sum_s \int_p \langle 0 | \{ b_s(p), b_s^+(p) \} | 0 \rangle =$

$= -e \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_0} (2\pi)^3\, 2p_0\, \delta^{(3)}(0) \to$ nagyon végtelen

Lorentz-invariánsat vonunk le

$Q = Q_{naiv} - \left[-e \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_0} \{ b_s(p), b_s^+(p) \} \right] =$

$= -e \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p_0} \left[a_s^+(p)\, a_s(p) - b_s^+(p)\, b_s(p) \right]$

$a_{s_0}^+(t_0) | 0 \rangle = | e^-(t_0, s_0) \rangle$

$b_{s_0}^+(t_0) | 0 \rangle = | e^+(t_0, s_0) \rangle$

$\langle e^- | Q | e^- \rangle = -e \,, \quad \langle e^+ | Q | e^+ \rangle = +e \quad \Rightarrow$ HF: kiszámolni

$j_\mu^{Dirac}(x) = -e :\bar\psi(x) \gamma_\mu \psi(x): \; = \ldots$ HF

$: b_s(p)\, b_{s'}^+(p') : \; = - b_{s'}^+(p')\, b_s(p) \qquad (a_s(p)$-re is$)$

Fermionokra, ahány átrakás van annyi (−1) szorzó normálrendezésnél

antirészecske: az elektromágneses térhez való csatolása ellentétes $\Rightarrow |e^+\rangle$ pozitron

Elektron hullámcsomag

$|E\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} \sum_s f_s(p)\, a_s^+(p) | 0 \rangle$

$\langle E | E \rangle = 1 = \sum_s \int d^3p \frac{1}{(2\pi)^3} |f_s(p)|^2$

Mágneses momentum

$\underline{\mu} = \frac{1}{2} \int d^3x \;\; \underline{x} \times \underline{j}^{Dirac}(\underline{x})$

$\langle E | \underline{\mu} | E \rangle$-ben a következő tagok:

$\langle e^-(p, s) | \underline{\mu} | e^-(p', s') \rangle = \qquad (t = 0)$

$= -\frac{e}{2} \int d^3x \;\; \underline{x} \times \langle e^-(p,s) | :\bar\psi\, \underline{\gamma}\, \psi:(\underline{x}) | e^-(p', s') \rangle$

$\to a_s(p) \qquad \to a_{s'}^+(p')$

$\to b^+ b \to$ nem adnak járulékot

$\to a_\sigma(t)$, $a_\sigma(t')$

$$= -\frac{e}{2}\int d^3x\ \underline{x}\times\Big(\sum_{\sigma\sigma'}\iint_{k\,k'} \langle 0|\underbrace{a_s(p)a_\sigma^+(k)}^{\delta_{s\sigma}(2\pi)^3 2k_0\delta^{(3)}(p-k)}\ \overbrace{a_{\sigma'}(k')a_{s'}^+(p')}^{\delta_{\sigma's'}(2\pi)^3\delta^{(3)}(k'-p')2k_0'}|0\rangle\ \cdot$$

$$\cdot\, e^{-ikx}\,\bar u_\sigma(k)\gamma\, u_{\sigma'}(k')e^{ik'x}\Big) =$$

$$= -\frac{e}{2}\int d^3x\ \underline{x}\times\underbrace{\bar u_s(p)\underline{\gamma}\, u_{s'}(p')}\ e^{-i(p-p')\underline{x}} = **$$

$$u_s(p)\cong\sqrt{2m}\begin{pmatrix}\chi_s\\ \frac{\underline{\sigma}\,\underline{p}}{2m}\chi_s\end{pmatrix} \qquad p_0\approx m$$

$$\rightsquigarrow\ 2m\left(\chi_s^T,\ \chi_s^T\frac{(\underline{\sigma}\,\underline{p})}{2m}\right)\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\underline{\sigma}\\-\underline{\sigma}&0\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}0&\underline{\sigma}\\ \underline{\sigma}&0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\chi_{s'}\\ \frac{(\underline{\sigma}\,\underline{p}')}{2m}\chi_{s'}\end{pmatrix} = *$$

$$* = 2m\left(\chi_s^T,\ \chi_s^T\frac{(\underline{\sigma}\,\underline{p})}{2m}\right)\begin{pmatrix}\underline{\sigma}\frac{1}{2m}(\underline{\sigma}\,\underline{p}')\chi_{s'}\\ \underline{\sigma}\chi_{s'}\end{pmatrix} =$$

$$= \cancel{2m}\left(\chi_s^T\underline{\sigma}\frac{1}{\cancel{2m}}(\underline{\sigma}\,\underline{p}')\chi_{s'} + \chi_s^T\frac{(\underline{\sigma}\,\underline{p})}{\cancel{2m}}\underline{\sigma}\chi_{s'}\right) =$$

$$\bar u_s(p)\gamma_i u_{s'}(p') = \chi_s^T\Big(\underbrace{\sigma_i\sigma_\ell}_{\delta_{i\ell}+i\varepsilon_{i\ell k}\sigma_k} p_\ell' + \sigma_\ell p_\ell\sigma_i\Big)\chi_{s'} =$$

$$= \chi_s^T\left(p_i + p_i' + i\left(\underline{\sigma}\times(\underline{p}'-\underline{p})\right)_i\right)\chi_s$$

$$** = -\frac{e}{2}\int d^3x\ \ \underline{x}\times\ \chi_s^T\left[\underline{p}+\underline{p}'+i\underline{\sigma}\times(\underline{p}'-\underline{p})\right]\chi_s\ \ e^{-i(p-p')\underline{x}} = **$$

$$\underline{x}\times i\left(\underline{\sigma}\times(\underline{p}'-\underline{p})\right)e^{+i(p'-p)\underline{x}}$$

$$i\left[\underline{\sigma}\cdot\left(\underline{x}(\underline{p}'-\underline{p})\right) - (\underline{p}'-\underline{p})(\underline{x}\,\underline{\sigma})\right]e^{i(p'-p)\underline{x}}$$

$$\left[\underline{\sigma}\left(\underline{x}\,\underline{\nabla}\right) - (\underline{x}\,\underline{\sigma})\,\underline{\nabla}\right]e^{i(p'-p)\underline{x}}$$

parciális integrál, mert hullámcsomagként x-ben lokalizált

$$x_j\partial_j e^{i(p'-p)\underline{x}}$$

$$-\underbrace{(\partial_j x_j)}_{3}e^{i(p'-p)\underline{x}}$$

$$\Rightarrow 2\underline{\sigma} \qquad\qquad \underline{x}\times(\underline{p}+\underline{p}')\Rightarrow 2\underline{L}$$

$$\underline{L} = \underline{x}\times\frac{1}{i}\underline{\nabla}$$

$$** = -e\int d^3x\ e^{-ipx}\chi_s^T\left(\underline{L}+\underline{\sigma}\right)e^{ip'x}\chi_{s'}$$

$$\Rightarrow\ -e\int d^3x\sum_{s,s'}E_s(\underline{x})^*\chi_s^T(\underline{L}+\underline{\sigma})\ E_{s'}(\underline{x})\chi_{s'}$$

hullámcsomag

$$\underline{\sigma}\to 2\underline{S} \qquad S = \frac{1}{2}\sigma$$

χ_s Pauli spinorokra hat a $\underline{\sigma}$
x függésre hat az $\underline{L}$

SUGÁRZÁS ÉS ANYAG KÖLCSÖNHATÁSA 04.16.

$$|E\rangle = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2p_0}} f_s(p)\, |e^-(p,s)\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2m}} \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_s(p)$$

$$\langle E|\underline{\mu}|E\rangle = -\frac{e}{2m}\sum_{s,s'}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\int d^3x\; e^{-ipx} f_s^*(p)\chi_s^T[\underline{L}+2\underline{S}]\chi_{s'} f_{s'}(p') e^{ip'x}$$

μ_z várható értékében a spin járuléka csak akkor nem 0, ha $\delta_{ss'}\delta(p-p')(2\pi)^3$

$$\mu_z\Big|_{spin} = -\frac{e}{2m}\sum_s\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}|f_s(p)|^2(\delta_{s,\uparrow}-\delta_{s,\downarrow})$$

vissza az elejére → valóban s a spin index az elejétől kezdve

04.23.

Lorentz mérték:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 = \partial_0 A_0 + \underline{\nabla}\underline{A} \qquad c=1$$

$S = \frac{1}{2}\int d^4x \{[\underline{E}^2 - \underline{B}^2] +$ → hatás → $\partial_0 A_0$ nem szerepel → nem lehet hozzá kanonikus impulzus

$+ \frac{1}{\xi}[\dot{A}_0 + \underline{\nabla}A]^2\}$ = parciális integrálások

ξ ← mérték paraméter

$\xi = 1$ Feynman-mérték

$\underline{E} = -\dot{\underline{A}} - \underline{\nabla}A_0$, $\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A}$ behelyettesítéssel

$$S_F = \frac{1}{2}\int d^4x\,[\dot{\underline{A}}^2 - (\nabla_j\underline{A})^2 - \dot{A}_0^2 + (\underline{\nabla}A_0)^2]$$

$(\nabla_j \underline{A})^2 = \sum_i\sum_j\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)^2$

m-es tag $\not\exists$ fotonnak a nyugalmi tömege zérus ⇒ $\omega_k = |\underline{k}|$

δA_i és δA_0 szerint variálva $\Box A_\mu = 0$

síkhullámmegoldások

$$\hat{A}_\mu(\underline{x},0) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left(\hat{a}_\mu(\underline{k})e^{i\underline{k}\underline{x}} + \hat{a}_\mu^+(\underline{k})e^{-i\underline{k}\underline{x}}\right)$$

$$[a_\mu(k), a_\nu^+(k')] = -g_{\mu\nu}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\underline{k}-\underline{k}')2\omega_k$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[\hat{a}_i^+(\underline{k})a_i(\underline{k}) - \hat{a}_0^+(\underline{k})a_0(\underline{k})\right]$$

vákuumállapot: $a_\mu(k)\Phi_0 = 0$

$$\hat{\mathcal{H}}\, a_0^+(\underline{k}')\Phi_0 = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3} a_0^+(\underline{k})\underbrace{[a_0(\underline{k}), a_0^+(\underline{k}')]}_{-(2\pi)^3 2\omega_k\delta^{(3)}(\underline{k}-\underline{k}')}\Phi_0 = \omega_{k'}a_0^+(\underline{k}')\Phi_0$$

$(a_0^+(k)\Phi_0\,,\ a_0^+(k')\Phi_0) = -(2\pi)^3\, 2\omega_k\, \delta^{(3)}(k-k')\ (\Phi_0,\Phi_0)$

ez nem jó fizikailag

fizikai állapotokat vegyünk csak!

fizikai | $\partial_\mu \hat A^\mu(x)\,|\text{fizikai}\rangle = 0$ → minden mátrixelem ϕ

$k^\mu \hat a_\mu(k)\,|\text{fizikai}\rangle = 0$

$k^\mu = (\omega_k, 0, 0, k_3)$ $\quad \omega_k = k_3$ → vonatkoztatási rendszer

$\hat a^+_{\text{transzferzális}}\,\Phi_0 = \Phi_{\text{fizikai}}$ → $k_i \hat a_i^+ \Phi_0 = 0$ → $\hat a_1^+\Phi_0\,,\ \hat a_2^+\Phi_0$

$\hat b(k) = \frac{1}{\sqrt2}\left(a_0(k) - a_3(k)\right)$

$\hat c(k) = \frac{1}{\sqrt2}\left(a_0(k) + a_3(k)\right)$

$\hat b(k)\,\Phi_{\text{fizikai}} = 0$

$[\hat b(k), \hat b^+(k')] = [\hat c(k), \hat c^+(k')] = 0\ ,\quad [\hat b(k), \hat c^+(k')] \neq 0$

$\hat c^+(k)\Phi_0 \ \to\ \hat b(k)\hat c^+(k)\Phi_0 = [\hat b(k), \hat c^+(k)]\Phi_0 \neq 0$

$\hat c^+(k)\Phi_0$ nem fizikai, mert $\hat b(k)$ nem tünteti el

$\mathcal A = \mathcal A_0 \oplus \mathcal A_1 \oplus \mathcal A_2 \cdots$ állapotok

$\langle \mathcal A_{L'}|\hat S|\mathcal A_L\rangle = \delta_{L,L'}\, S_{fi}$

bővebb az állapottér, de egy része „béna"

lehet korlátozódni fizikai állapotokra

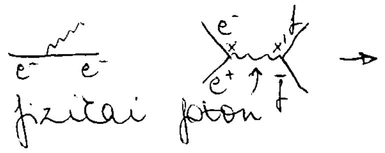
Elektron - pozitron szétsugárzás:

$e^-(p_1, s_1) + e^+(p_2, s_2) \longrightarrow f(q_1, r_1) + \bar f(q_2, r_2)$ fermionok

$-e$ töltés $\qquad\qquad q$ töltés

$\hat j^\mu_{em} = -e:\bar\Psi_e\gamma^\mu\Psi_e: + q:\bar\Psi_f\gamma^\mu\Psi_f: + \ldots$

$\hat H_I = \int d^3x\, j^\mu_{em} A_\mu$



$(p_1 + p_2)^2 = s = \left(E^{\text{teljes}}_{TKP}\right)^2$ → nem fizikai foton

két kölcsönhatás → perturbáció második rendje

$$-\frac12\int d^4x\int d^4x'\ \langle 0|\,\hat a_f(q_1,r_1)\,\hat b_f(q_2,r_2)\,\hat T\left[\hat H_I(x)\,\hat H_I(x')\right]\cdot$$

$$\cdot\, a_e^+(p_1,s_1)\, b_e^+(p_2,s_2)\,|0\rangle$$

$$-\int d^4x\int d^4x'\ \langle 0|\,\hat a_f(q_1,r_1)\,\hat b_f(q_2,r_2)\,\hat T\left[\hat A_\mu(x)\,\hat j_f^\mu(x)\,\hat A_\nu(x')\,\hat j_e^\nu(x')\right]\hat a_e^+(p_1,s_1)\,\hat b_e^+(p_2,s_2)\,|0\rangle$$

SUGÁRZÁS ÉS ANYAG KÖLCSÖNHATÁSA 04.23.

$$j_f(x) \to q\,\bar\Psi_f(x)\,\gamma^\mu\,\Psi_f(x)$$

$$b_f,\ a_f^+ \qquad b_f^+,\ a_f$$

$$a_f(q_1,r_1) \quad b_f(q_2,r_2)$$

$$e^{iq_1x+iq_2x}\hat A_\mu(x)\,\underbrace{\bar u_f(q_1,r_1)\,\gamma^\mu\, v_f(q_2,r_2)}_{\text{átmeneti áram mátrixelem}}$$

ugyanez a játék az elektronra

$$-e\,\bar\Psi_e(x')\,\gamma^\nu\,\Psi_e(x')$$

$$b_e\ a_e^+ \qquad b_e^+\ a_e$$

$$\hat A_\nu(x')\bar v_e(p_2,s_2)\,\gamma^\nu\,u_e(p_1,s_1)\,e^{-i(p_2+p_1)x}$$

$$\Rightarrow S_{fi} = eq\int d^4x\int d^4x'\; e^{i(q_1+q_2)x}\,e^{-i(p_1+p_2)x'}\,\bar u_f(q_1,r_1)\,\gamma^\mu\, v_f(q_2,r_2)\cdot$$

$$\cdot\,\bar v_e(p_2,s_2)\,\gamma^\nu\,u_e(p_1,s_1)\,\underbrace{\langle 0|\hat T[\hat A_\mu(x)\hat A_\nu(x')]|0\rangle}_{\text{foton propagátor}} = *$$

$$\hat A_\mu(x)\hat A_\nu(x')\Theta(x_0-x_0') + \hat A_\nu(x')\hat A_\mu(x)\Theta(x_0'-x_0)$$

$$\langle 0|\int_{k'} e^{-ik'x'}\hat a_\nu(k)\int_k e^{ikx}\hat a_\mu^+(k)|0\rangle =$$

$$= -g_{\mu\nu}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}e^{ik(x-x')}\Theta(x_0'-x_0)$$

$$-g_{\mu\nu}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}e^{ik(x'-x)}\Theta(x_0-x_0')$$

szép alak

foton propagátor: $-ig_{\mu\nu}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\dfrac{e^{ik(x-x')}}{\underbrace{k_0^2-\underline{k}^2}_{k^2}+i\varepsilon}$

$$* = eq\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{\underset{\substack{+i\varepsilon\\ \to 0}}{k^2}}(2\pi)^8\,\delta^{(4)}(q_1+q_2+k)\,\delta^{(4)}(p_1+p_2+k)\,\bar u_f(q_1,r_1)\gamma^\mu v_f(q_2,r_2)\cdot$$

$$\cdot\,\bar v_e(p_2,s_2)\,\gamma_\nu\, u_e(p_1,s_1) =$$

$$= -i(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2)\frac{eq}{s}\bar u_f(q_1,r_1)\gamma^\mu v_f(q_2,r_2)\cdot$$

$$\cdot\,\bar v_e(p_2,s_2)\,\gamma_\mu\, u_e(p_2,s_2) =$$

$$= i(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(\Sigma p_i-\Sigma p_f)\,T_{fi}$$

$$(\bar v_e\gamma_\mu u_e)^* = \bar u_e\gamma_\mu v_e$$

$$|T_{fi}|^2 = \frac{e^2q^2}{s^2}\;\bar v_f^{\alpha_1}(\gamma^\mu)^{\alpha_1\alpha_2}u_f^{\alpha_2}\,\bar u_f^{\beta_1}(\gamma^\nu)^{\beta_1\beta_2}v_f^{\beta_2}\cdot$$

$$\cdot\,\bar u_e^{\alpha_1}(\gamma_\mu)^{\alpha_1\alpha_2}v_e^{\alpha_2}\bar v_e^{\beta_1}(\gamma_\nu)^{\beta_1\beta_2}u_e^{\beta_2}$$

kiátlagolunk és összegzünk polarizációra

$$\frac{1}{2}\sum_{s_1}\frac{1}{2}\sum_{s_2}\cdot\sum_{r_1}\sum_{r_2}|T_{fi}|^2 =$$

$$\underbrace{\sum_r v_e(p,r)\bar{v}_e(p,r)}_{\text{mátrix}} = p_\kappa\gamma^\kappa - m$$

$$\sum_r u(p,r)\bar{u}(p,r) = p_\kappa\gamma^\kappa + m$$

$$u_f^{\alpha_1}\bar{u}_f^{\beta_1} \to (\not{q}_1 + m_f)^{\alpha_1\beta_1}$$

$$v_f^{\beta_2}\bar{v}_f^{\alpha_1} \to (\not{q}_2 - m_f)^{\beta_2\alpha_1}$$

$\triangleright$ 4 mátrix szorzatának spurja lesz a végeredmény

$$\frac{1}{2}\sum_{s_1}\frac{1}{2}\sum_{s_2}\sum_{r_1}\sum_{r_2}|T_{fi}|^2 =$$

$$= \frac{e^2q^2}{s^2}\,Sp\left(\gamma^\mu(\not{q}_1+m_f)\gamma^\nu(\not{q}_2-m_f)\right)Sp\left(\gamma_\mu(\not{p}_2-m_e)\gamma_\nu(\not{p}_1+m_e)\right)$$

nézzük azt a TKP rendszert ahol $s \gg m_f^2, m_e^2$

$$= \frac{8e^2q^2}{s^2}\left[(q_1p_2)(q_2p_1) + (q_1p_1)(q_2p_2)\right]$$

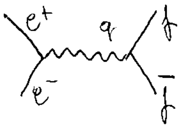
$(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2)\,\frac{8e^2q^2}{s^2}[\quad]$ ezt már csak integráljuk p-kre és osztjuk az áramsűrűséggel $\Downarrow$

$$\sigma^{TOT}_{e^-e^+\to f\bar{f}} = \frac{64\pi\,\alpha_e\,\alpha_f}{s}$$

$\alpha_e = \frac{e^2}{4\pi}$ $\alpha_f = \frac{q^2}{4\pi}$ mérhető a keltett részecske töltése

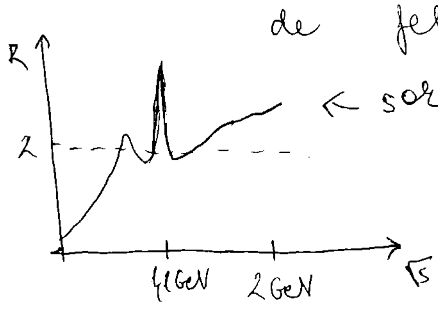
$$R^{(s)} = \frac{\sigma_{e^+e^-\to\sum f\bar{f}}}{\sigma_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-}} = \frac{\sum_f\alpha_f}{\alpha_e} = \frac{\sum_f q_f^2}{e^2}$$ is mérhető

adott energián



$2M_f \leq \sqrt{s}$ adnak járulékot

de feltettük $\sqrt{s} \gg M_f$



$\leftarrow$ sok rezonanciás fv.

u, d, s kvarkokból hadronok

átlagosan $R \approx 2$

$u \to \frac{2}{3}e$, $d \to -\frac{1}{3}e$, $s \to -\frac{1}{3}e$

$R(s)_{naiv} = \frac{2}{3}$ $\sqrt{s} \lesssim 2$ GeV

1973. SPEAR: 3 GeV-nél nagy éles rezonancia

$\Rightarrow$ átlag megnőtt („nagy októberi forradalom")

J/Ψ rezonancia $M_{J/\Psi} = 3{,}098$ GeV $\tau \sim 10^{-8}$ s

J/Ψ spektrum hasonló a pozitróniuméhoz $\Rightarrow$

$c\bar{c}$ kötött állapot $\to$ charm kvark

kvarkok közötti kölcsönhatás potenciálja:

$$V(r) = -\frac{\alpha_{erős}}{r} + \sigma r \to \text{húrfeszültség}$$

$\hookrightarrow$ kvarkbezárás miatt

α_s, σ megfelelő megválasztásával J/Ψ spektrumát jól le lehetett írni

$Q_c = \frac{2}{3}e$ $M_c \sim 1{,}5$ GeV

$\sqrt{s} \gtrsim 4$ GeV után állandó lett $R(s)$

$R(s)_{naiv} \approx \frac{10}{9}$ $\to$ még ez sem jó

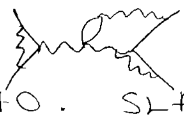
1977. DESY: 9,3 - 9,7 GeV megint éles rezonanciák $\to$ Υ (üpszilon) család

$b\bar{b}$ (bottom) $M_b \sim 4{,}5 - 5$ GeV

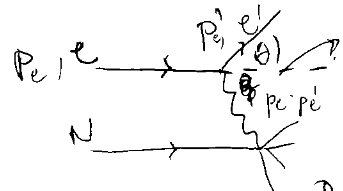
$Q_b = -\frac{1}{3}e$

$\sqrt{s} \gtrsim 10$ GeV $\to$ $R(s)_{naiv} \approx \frac{11}{9}$

$R_{mért} \approx 4$ kellenek a perturbációs korrekciók



1968-1970. SLAC-MIT $\to$ mélyen rugalmatlan elektron-nukleon szórás (proton, deuteron)



nagy impulzusátadás

$E_e = 20$ GeV

$p_e - p'_e = (E - E', \underline{q} - \underline{q}')$ $p_e = (E, \underline{q})$, $p'_e = (E', \underline{q}')$

$E' - E = -\frac{\nu}{M_p}$, $\frac{d\sigma}{d\nu d\theta}$ mérhető

SUGÁRZÁS ÉS ANYAG KÖLCSÖNHATÁSA

04.30.

$(p_e-p_e')^2 = (E-E')^2 - (\underline{q}-\underline{q}')^2 = (E-E')^2 - \underline{q}^2 - \underline{q}'^2 + 2\underline{q}\underline{q}' =$

$m_e \approx 0$ 20 GeV-en $E^2 \approx q^2$

$= (E-E')^2 - (E-E')^2 - 2EE' + 2\underline{q}\underline{q}' =$

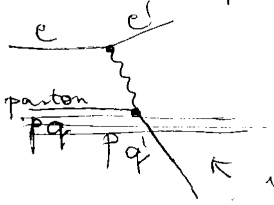
$= -2EE'(1-\cos\Theta)$ → átadott impulzus meghatároz-ható E' és Θ mérésével

⇒ $\dfrac{d\sigma}{d\nu\, d(p_e-p_e')}$ $\nu = 2M_p(E-E') = 2p_p(p_e-p_e')$ invariáns mennyiséget

a nukleon kvarkokból áll

Feynmannál partonmodell

$p_q = x \cdot p_N$ $\qquad 0 \leq x \leq 1$



többi néző (spektátor)

itt felgyülemlő ~~ele~~ energiából alakul ki a végállapoti hadrontömeg

$$\frac{d\sigma_{eN}}{d\nu\, d(p_e-p_e')^2} = \sum_q \int_0^1 F(x) \frac{d\sigma_{eq}(x)}{d\nu\, d(p_e-p_e')^2}\, dx$$

$[p_q + (p_e-p_e')]^2 = p_q'^2 \approx 0$ rugalmas

$\downarrow$
$x p_N$

$\underset{\approx 0}{p_q^2} + 2x p_N (p_e-p_e') + (p_e+p_e')^2 \approx 0$

$x\nu + (p_e-p_e')^2 \approx 0$

$x = -\dfrac{(p_e-p_e')^2}{\nu}$ tudjuk mekkora impulzushányadú partonon szóródott az elektron

hatáskeresztmetszetbe → $(\;)\,\delta\left(x + \dfrac{(p_e-p_e')^2}{\nu}\right)$

partoneloszlásfv. kimérhető

Bjorken-skálázás → csak x-től függ

(2 szeres energiaveszteség és megfelelő szög mellett nem változik a hatáskeresztmetszet)

kvarkok nem matematikai objektumok, hanem vannak

<u>Magerők</u>: töltésfüggetlen potenciál

Heisenberg (1932) → p, n a nukleon különböző töltésállapota ⇒ bevezetjük izo(topikus) spint

$$p = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad n = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

$$I_3|p\rangle = \frac{1}{2}|p\rangle \qquad I_3|n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle$$

$$I_- = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \quad I_+ = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \quad I_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \quad I_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}$$

$[H_{mag}, I_i] = 0 \qquad Q = I_3 + \frac{1}{2}$ a töltés

<u>Yukawa</u> (1937) → magerő közvetítő → skalár magerő kvantum ψ

$(\Box + m^2)\psi = 0$ szabad $\qquad \omega^2 = p^2 + m^2$

sztatikus, klasszikus ↪ $(-\Delta + m^2)\psi = g\,\delta^{(3)}(\underline{x})$

Yukawa-potenciál: $\Phi_Y = -g\dfrac{e^{-mr}}{r}$

↪ $\frac{1}{m} \approx R$ magerő hatótávolsága $\approx 10^{-15}$ m

↪ $m \approx 150$ MeV

1947-ben a kozmikus sugárzásban megtalálták

→ μ jön le a földfelszínre

1949-50-re gyorsítókkal pp szórásban keletkeztek

$$p^+p^+ \to p^+p^+\pi^0, \quad p^+p^+ \to p^+p^+\pi^+\pi^-, \ \dots, \quad p^+p^+ \to p^+n\,\pi^+$$

<u>Wigner J.</u> → barionszám $^{(B)}$ → nehéz részek

π-mezon → kisebb tömegű

barionszám az erős kölcsönhatásban megmarad

$B_p = 1, \quad B_{\bar{p}} = -1, \quad B_n = 1, \quad B_{\bar{n}} = -1 \ \dots$

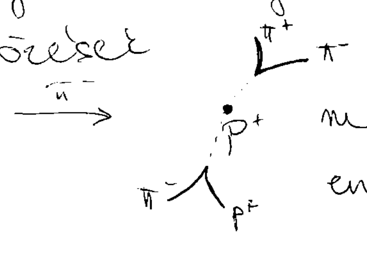
izospinje a pionnak 1 → izotriplett

$$I_3|\pi^\pm\rangle = \pm 1|\pi^\pm\rangle, \quad I_3|\pi^0\rangle = 0|\pi^0\rangle, \quad B = 0$$

$Q = I_3 + \dfrac{B}{2}$ összefüggésre változott

<u>Ritkaság</u> (strangeness)

$\pi^- p^+$ ütközések



mágneses tér

emulziós nyomok

SUGÁRZÁS ÉS ANYAG KÖLCSÖNHATÁSA 04.30.

hosszú élettartamú semleges részecske → társas keltés ⇒ új majdnem megmaradó tulajdonság

strangeness → s $\Lambda^0 \to \pi^- + p^+$ $M_{\Lambda^0} \approx 1100$ MeV

$K^0 \to \pi^+ + \pi^-$ $M_{K^0} \approx 490$ MeV

semleges barion

gyenge kölcsönhatási bomlás miatt hosszú élettartam

$Q = I_3 + \frac{B+S}{2}$

	Λ^0	K^0	K^+ ($\bar{K}^0$)	K^-	p	n	π^+	π^-	π^0
S	-1	-1	+1	-1	0	0	0	0	0
I_3	0	-1/2	-1/2	1/2	1/2	-1/2	1	-1	0
B	1	0	0	0	1	1	0	0	0

Gellmann - Nishijima $Q = I_3 + \frac{B+S}{2}$

$B+S = Y$ hipertöltés

sok-sok részecskét találtak → rendszerezni kell

$SU(2)_I \to SU(3)_{I,Y}$

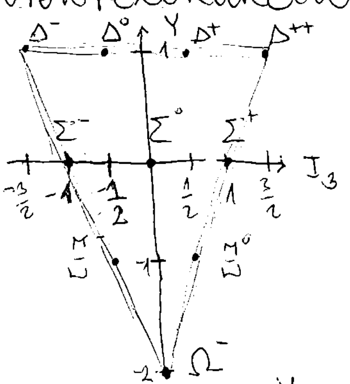
05.07.

izospin $\vec{I}$, hipertöltés Y $[\hat{H}_s, I_i] = [\hat{H}_s, Y] = 0$

$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$ SU(2) algebra

$\underline{I}^2, I_3, Y = B+S$ a független mennyiséget → megfigyelhetők egyszerre

hadronrezonanciák



→ Spin $= \frac{3}{2}$ barionrezonanciák

$m_\Delta = 1232$ MeV

$m_\Sigma = 1384$ MeV

$m_\Xi = 1533$ MeV

152 MeV

149 MeV

$\to \frac{\Delta M}{\Delta S} \approx 150$ MeV

Gell-Mann, Zweig

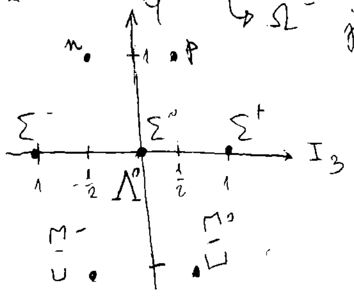
Ω^- jóslat 1964-ben

$m_\Omega = 1672$ MeV

Spin $= \frac{1}{2}$

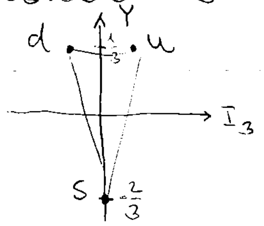
SU(3) algebra

barion oktett



kvarkokból lehet felépíteni

barionok 3 kvarkból → $B_q = \frac{1}{3}$ → additív kvarkmodell



$Q_u = \frac{2}{3}$ $\quad S_u = 0 \quad$ $Y_u = \frac{1}{3}$

$Q_d = -\frac{1}{3}$ $\quad S_d = 0 \quad$ $Y_d = \frac{1}{3}$

$Q_s = -\frac{1}{3}$ $\quad S_s = -1 \quad$ $Y_s = -\frac{2}{3}$

kvarkhullámfv-et

$H_s = \sum_q m_q \qquad m_u \approx m_d \qquad m_s - m_{u,d} \approx 150$ MeV

$|\Psi_{\text{neutron}}\rangle = |\Phi(x_1, x_2, x_3)\rangle \otimes |\varphi(\overset{1/2}{s_1}, \overset{1/2}{s_2}, \overset{1/2}{s_3})\rangle \otimes |\Upsilon((I_1Y_1),(I_2Y_2),(I_3Y_3))\rangle \otimes |c_1 c_2 c_3\rangle$

hely ↘ spin $S_z = \frac{3}{2}$ iz

szimmetrikus az alapállapoti hfv. a részecskék felcserélésére

$|\Delta^{++}\rangle = |u\uparrow u\uparrow u\uparrow\rangle$ spinstatisztika paradoxon → feles spinű részecske szimmetrikus akar lenni a hfv

Nambu, Han → kell legyen még egy kvantumszám, amelyre teljesen antiszimmetrikus kell legyen → 3 szín van → $SU(3)_c$ egzakt szimmetriája az erős kölcsönhatásnak → kvantumszíndinamika

$\Delta^+ = \frac{1}{\sqrt{3}}(|u\uparrow, u\uparrow, d\uparrow\rangle + |u\uparrow, d\uparrow, u\uparrow\rangle + |d\uparrow u\uparrow u\uparrow\rangle)$ ← izospin léptetés $I_\pm = \frac{1}{2}(I_1 \pm i I_2)$

$\Delta^0 \to udd$

$\Delta^- \to ddd \qquad \Sigma^0 \to uds \; (\frac{1}{\sqrt{6}}), \quad \Sigma^- \to dds$

$\Sigma^+ = \frac{1}{\sqrt{3}}(|u\uparrow u\uparrow s\uparrow\rangle + |u\uparrow s\uparrow u\uparrow\rangle + |s\uparrow u\uparrow u\uparrow\rangle)$ ← legmagasabb izospinűből kicseréltünk egy u-t s-re

$\Xi^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(|u\uparrow s\uparrow s\uparrow\rangle + |s\uparrow u\uparrow s\uparrow\rangle + |s\uparrow s\uparrow u\uparrow\rangle)$

$\Omega^- \to sss \qquad \Xi^- \to ssd$

SU(3) algebra: $T^a = \frac{1}{2}\lambda^a$ generátorok $n^2 - 1 = 8$ féle

↑ Gell-Mann mátrixok

$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ izospin

$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}(T^4 \pm i T^5)|\Delta^{++}\rangle = |\Sigma^+\rangle$

$$\lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\mathrm{Tr}\, T^a T^b = \frac{1}{2} \delta^{ab}$ spurtalan generátorok

$\lambda^6, \lambda^7 \to d$ és s közötti váltások

$T_8 = \frac{1}{2}\lambda_8 = \frac{\sqrt{3}}{2} Y \qquad Y = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

barionhullámfv. → spin $= \frac{1}{2}$ $s_z = \frac{1}{2}$ izospin $= \frac{1}{2}$ $I_3 = \frac{1}{2}$ proton

↳ $|ud\rangle_{\text{szinglet}} = (|ud\rangle - |du\rangle) \otimes (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)\frac{1}{2} =$

triplett : $|\uparrow\uparrow\rangle$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$, $|\downarrow\downarrow\rangle$ szinglett $= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$

$= \frac{1}{2}\left[|u\uparrow d\downarrow\rangle - |u\downarrow d\uparrow\rangle - |d\uparrow u\downarrow\rangle + |d\downarrow u\uparrow\rangle \right]$

↳ hozzáírjuk az $u\uparrow$-t → mind a 4 tagban 3 helyre lehet

$|p\uparrow\rangle = \underset{\text{const}}{(\ \ )}\left[|u\uparrow u\uparrow d\downarrow\rangle + |u\uparrow u\uparrow d\downarrow\rangle + |u\uparrow d\downarrow u\uparrow\rangle + \dots \right] =$

$= \frac{1}{\sqrt{18}}\Big[2|u\uparrow u\uparrow d\downarrow\rangle + 2|u\uparrow d\downarrow u\uparrow\rangle + 2|d\downarrow u\uparrow u\uparrow\rangle -$

$- |u\uparrow u\downarrow d\uparrow\rangle - |u\downarrow u\uparrow d\uparrow\rangle - |u\downarrow d\uparrow u\uparrow\rangle -$

$- |u\uparrow d\uparrow u\downarrow\rangle - |d\uparrow u\uparrow u\downarrow\rangle - |d\uparrow u\downarrow u\uparrow\rangle \Big]$

$|\Lambda^0\rangle$ merőleges a $|\Sigma^0\rangle$-ra

proton mágneses momentuma:

$$\hat{\mu}_{p,z} = \sum_q \gamma \frac{e_q}{2m_q} \hat{S}_{qz}$$

$$\gamma \approx 2$$

$\langle p | \hat{\mu}_{p,z} | p \rangle = \dots$ tagonként kell számolni (9)

$= \frac{1}{18}\left[4\left(\cancel{2}\frac{e_u}{\cancel{2}m_u}\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2} + \cancel{2}\frac{e_d}{\cancel{2}m_d}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \cdot 3 + 6 \cdot \cancel{2}\frac{e_d}{2m_d}\frac{1}{\cancel{2}} \right] =$

3 egyforma tag $\qquad$ $u\uparrow u\downarrow$ kiesik csak a $d\downarrow$ számít 6×

$= \frac{1}{18}\left(12\frac{e_u}{m_u} - 6\frac{e_d}{m_d} + 3\frac{e_d}{m_d} \right) =$

$= \frac{e}{18}\left(12\left(\frac{2}{3m_u} + \frac{1}{6m_d}\right) - \cancel{3}\frac{1}{\cancel{3}}\frac{1}{m_d} \right) = \qquad m_u \approx m_d$

$= \frac{e}{18\bar{m}}(10-1) = \frac{e}{18\bar{m}}9 = \frac{e}{2\bar{m}} = 3\frac{e}{2m_N} = 3\mu_{mag} = 2{,}79\mu_{mag}$

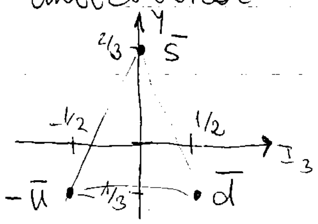
$\langle n | \hat{\mu}_{n,z} | n \rangle = \dots = -\frac{1}{3}\frac{e}{\bar{m}} = -2\mu_{mag} \qquad \frac{\mu_n}{\mu_p} = -\frac{2}{3}$ jóslat $= -0{,}6849$

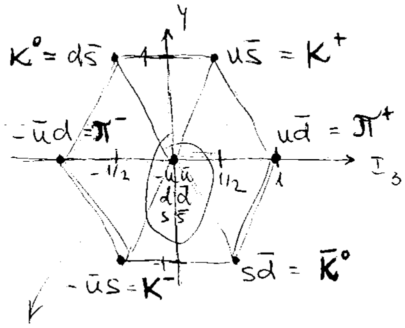
$= -1{,}91\mu_{mag}$

mezonok: $q\bar{q}$

pszeudoskalár mezonok → mezon oktett

antikvarkok





$$|\pi^0\rangle = \left(|d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\eta^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|s\bar{s}\rangle + |u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle\right)$$ SU(3) szinglett

$$|\eta_8\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-2|s\bar{s}\rangle - |u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle\right)$$