

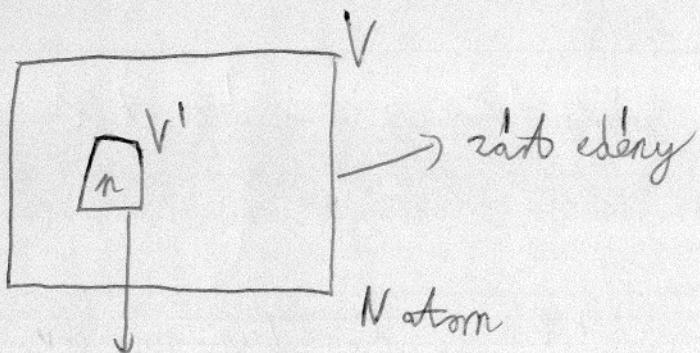
A statisztikus fizika alapjai

1. ora

0) Stat. fiz. használata:

- nem ismerjük a pontos állapotot a rendszerek:
(stat. hosszú időbeli reláció), nagy számú adat + nem tudjuk a kérdezi felületeket pontosan beállítani

1) Sűrűséggádorás gázokban:



Képrendeletű

térfogat \rightarrow mennyi $\frac{\text{atom}}{\text{volumen}}$ benne? $p(n) = ?$

visszalövőtelmény:

- részleges lesz
- sorszámi web. elte. hu / Ikerstab 11. pdf

aj. ir.:

- Nagy Károly: Termofiz. és statisztikus fizika
- Kubo: Statisztikus fizika

- feltételezések:

- független atomok: ez akkor igaz, ha a k. h. hatótávolsága jóval kisebb, mint az atomok átmérője

DE valójában kiterjedés, hatótávolság
kölcsönhatás, ötkötés

$$\gamma_0 \ll \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$$

- egysélyben arányos valószínűséggel találkozik 1 atom az ΔV pontján

egy atom: $\frac{V}{V}$ valósz. lesz V -ben

$$p(n) = \underbrace{\binom{N}{n}}_{\text{kiválasztunk}} \left(\frac{V'}{V} \right)^n \left(1 - \frac{V'}{V} \right)^{N-n}$$

különbözzen
n atomból,
ami lehet van

Bernoulli-eloszlás
(binomialis eloszlás)

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n! (N-n)!} = \frac{N \cdot (N-1) \cdots (N-n+1)}{n!}$$

↳ ezekkel nem tudunk igazán mit kerdeni

!!

Magatuk (vátható érték) kell
+ mások: mennyire törek el a másik értékek az átlagtól

- generator fv.: $\phi(z) = \sum_{n=0}^N p(n) \cdot e^{nz} =$ momentangen. fv.

\downarrow

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\text{shaded} \right) \frac{1}{l!} \cdot \phi(nz)^l$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} z^l \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^N p(n) n^l}_{\text{eloszlásfv. } l\text{-edik momentumára}}$$

$$\langle n^l \rangle = \overline{n^l}$$

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^N e^{nz} \binom{N}{n} \left(\frac{V'}{V}\right)^n \left(1 - \frac{V'}{V}\right)^{N-n} = \left(e^z \cdot \frac{V'}{V} + 1 - \frac{V'}{V}\right)^N$$

↓

$$\text{mn.: } (a+b)^N = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} a^n b^{N-n}$$

megvan a generátor fv.

$$\phi(z=0) = 1 \quad (\text{normális})$$

$$\frac{d\phi}{dz} = \sum_{n=0}^N p(n) \cdot n \cdot e^{nz} = N \cdot \underbrace{\left(e^z \cdot \frac{V'}{V} + 1 - \frac{V'}{V}\right)}_{N-1} \cdot e^z \cdot \frac{V'}{V}$$

$$\bar{n} = \frac{d\phi}{dz} \Big|_{z=0} = N \cdot \frac{V'}{V} = \frac{N}{V} \cdot V' \quad (\dots)$$

• Elővetel:

- a generátorfv. $z=0$ -ban a normális ténylezőt adja meg
- - II - deriváltja $z=0$ -ban \bar{n} -t adja meg
- - II - második deriváltja $z=0$ -ban \bar{n}^2 -t adja meg

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dz^2} &= \sum_{n=0}^N p(n) \cdot n^2 \cdot e^{nz} = N(N-1) \cdot (\dots) \cdot e^z \cdot \frac{V'}{V} \cdot e^z \cdot \frac{V'}{V} + \\ &+ N \cdot (\dots) \cdot \frac{V'}{V} e^z \end{aligned}$$

$$\bar{n}^2 = \frac{d^2\phi}{dz^2} \Big|_{z=0} = N(N-1) \left(\frac{V'}{V}\right)^2 + N \cdot \frac{V'}{V}$$

$$\overline{\Delta n^2} = \overline{n^2} - \overline{n}^2 = N(N-1) \left(\frac{V'}{V} \right)^2 + N \cdot \frac{V'}{V} - N^2 \left(\frac{V'}{V} \right)^2 = N \cdot \frac{V'}{V} - N \left(\frac{V'}{V} \right)^2 = N \cdot \frac{V'}{V} \left(1 - \frac{V'}{V} \right)$$

$$\overline{n} = \frac{N}{V} \cdot V'$$

$$\overline{\Delta n^2} = N \cdot \frac{V'}{V} \left(1 - \frac{V'}{V} \right) \quad (\text{szoroslegyüt})$$

- termodynamikai határozet: $N \rightarrow \infty$ (nagyon sok atom van)
 de ezt így tessük, hogy köbön V is nő $\rho = \frac{N}{V}$ = állandó
 (kérüljük állandó, melynek következője jobb fel fogat $(\frac{V}{N})$ állandó)
 (úgy növeljük a részecskék számát, hogy több rendszer
 egymás mellé tessük)

$$\overline{n} = \frac{N}{V} \cdot V'$$

$$\overline{\Delta n^2} = N \cdot \frac{V'}{V} = \overline{n} \quad (\text{szoroslegyüt})$$

szövök: tipikusan merre kezd el a változás értelel
 egy megs érte

$$\rightarrow \underline{\text{relatív szövök}}: \frac{\sqrt{\overline{\Delta n^2}}}{\overline{n}} = \frac{\sqrt{\overline{n}}}{\overline{n}} = \frac{1}{\sqrt{\overline{n}}}$$

\uparrow Ha az inv. szövök

minél nagyobb V' fel fogatott leszünk, annál
 kisebb lesz az átlagos inv. ingadozás

- az eloszlásfr. termelők. határesete: (n véges, $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, $\frac{N}{V} = \text{ell}$)

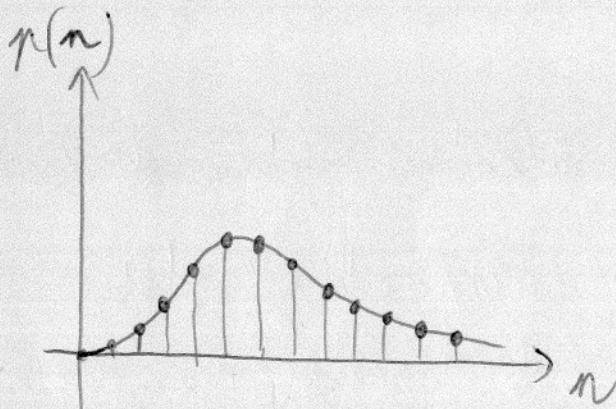
$$p(n) = \binom{N}{n} \cdot \left(\frac{V'}{V}\right)^n \left(1 - \frac{V'}{V}\right)^{N-n} = \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{n!} \left(\frac{N}{V} \cdot \frac{V'}{V}\right)^n \left(1 - \frac{N}{V} \cdot \frac{V'}{V}\right)^{N-n} =$$

$$= \frac{1}{n!} \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{N^n} \left(\rho V'\right)^n \left(1 - \frac{\rho V'}{N}\right)^N \left(1 - \frac{\rho V'}{N}\right)^{-n} \quad \left(\frac{N}{V} = \rho = \text{konst.}\right)$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \cancel{\frac{N^N}{N^n}} \left(\rho V'\right)^n \cdot e^{-\rho V'} \quad \begin{matrix} \rightarrow 1 & (\text{n véges}) \\ \text{maz.:} & \end{matrix}$$

$$\boxed{p(n) = \frac{1}{n!} \cdot \left(\rho V'\right)^n \cdot e^{-\rho V'}} \quad \text{Poisson-eloszlás}$$

$$\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N \rightarrow e^x$$



- 2. termelőművek határesete: $N \rightarrow \infty$, $\frac{V}{V} = \text{ell}$ és $\frac{V'}{V} = \text{ell}$

$$\bar{n} = \frac{V}{V} \cdot V' = \rho \cdot V' \rightarrow V' - \text{vel } \bar{n}''$$

$$\overline{\Delta n^2} = \underbrace{\left(\frac{N}{V}\right) \cdot V'}_{\rho} \left(1 - \frac{V'}{V}\right) \rightarrow \text{er is } V' - \text{vel } \bar{n}''$$

$$\overline{\Delta n^2}_{\text{ell}} = \bar{n} \cdot \left(1 - \frac{V'}{V}\right)$$

$$\frac{\sqrt{n^2}}{n} = \frac{\sqrt{n(1-\frac{V}{V})}}{n} \approx \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

itt is ezzel arányos

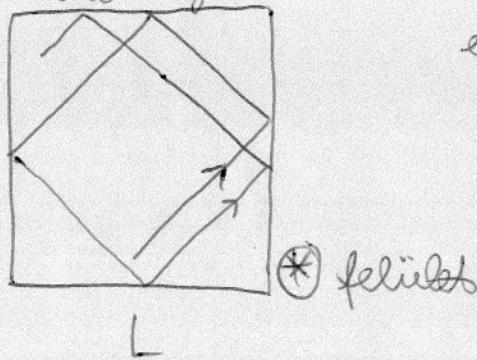
↓

makroskopikus rendszerekben (pl. 1 mol →
 $\rightarrow \sqrt{n} \sim 10^{23}$) → a fluktuációk elágazik !!!

2) Gázok nyomása, Bernoulli - formula:

- az atomok ütköznek a falal → impulsus ad át
- ez pillanatot sem, de minden sok atom van, ezek tökések kiátlagolódnak

kocka alakú edény



egy atom:

Δt alatti ütközések száma \oplus felületen

$\frac{|p_x|}{m} \Delta t$ → az imp. előjelét által,
 de nagysága nem változik

$$\frac{\frac{|p_x|}{m} \Delta t}{2L} \quad \text{ütközések száma}$$

1 ütközésben átvadott impulsus: $2|p_x|$

Δt alatt átvadott impulsus: $2|p_x| \cdot \frac{|p_x|}{m} \cdot \Delta t = \frac{(p_x)^2}{m} \cdot \Delta t$

- N atom áttal haddott impulsus:

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{(p_{\alpha x})^2 \cdot \Delta t}{m \cdot L} = f \cdot \Delta t = N p \cdot L^2 \cdot \Delta t \quad V=L^3$$

(nyomás)

a. atom áttal

haddott x irányú

imp.

$$p = \sqrt{\frac{1}{V} \sum_{\alpha=1}^N \frac{(p_{\alpha x})^2}{m}}$$

$$\overline{p_x^2} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha x}^2$$

$$p = \frac{N}{V} \cdot \frac{\overline{p_x^2}}{m}$$

- nincs kitüntetett oldal egységekben:

$$\overline{p_x^2} = \overline{p_y^2} = \overline{p_z^2}$$

$$\overline{p_x^2} = \frac{1}{3} \overline{p^2}$$

$$p = \frac{N}{V} \cdot \frac{\overline{p^2}}{3m} = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \cdot \frac{\overline{p^2}}{2m}$$

Ad $\bar{E} = \frac{\overline{p^2}}{2m}$ 1 részecskére
jutó (kinetikus) energia

$$\bar{E} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \frac{p_{\alpha x}^2}{2m}$$

$$pV = N \cdot \frac{2\bar{E}}{3}$$

• termodinamika (termodinamikai törvény):

$$pV = N k_B T$$



$$\frac{2}{3} \bar{\epsilon} = k_B T$$

$$\boxed{\bar{\epsilon} = \frac{3}{2} k_B T}$$

(az általunk tekintett speciális rendszere: atomics k.d.)



(atomi mértékű kiindulva
magyaráztunk makroszkopikus
jelenségeket)

ideális gáz

DE feltételeztünk egységesités ($\bar{r}_x = \bar{r}_y = \bar{r}_z$), ami valójában
a kölcsönhatás következtében jön létre

- tétesleges alakú edény:

virál tétel: ~~$\sum_i (p_i r_i)$~~

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N (p_i r_i) \right) = \sum_i (p_i \dot{r}_i) + \sum_i (p_i \dot{r}_i) = \sum_i (E_i \dot{r}_i) + \sum_i \frac{p_i^2}{m}$$

\uparrow
 E_i
 \downarrow

(2 félle eset van: az atomok közötti és atomok
tal közötti)

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N (p_i r_i) \right) = \sum_i (E_i \dot{r}_i) + 2 \sum_i E_i$$

-f

Négyük ennek időbeli átlagát:

$$\frac{1}{t} \int_{t_0}^{t+t} \dot{A}(t') dt' = \overline{A(t)} \rightarrow \text{időbeli átlag definíciója}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t+t} \dot{A}(t') dt' = \frac{1}{t} [A(t_0 + t) - A(t_0)]$$

\hookrightarrow ha A körülöz, és hosszú ideig növekszik:

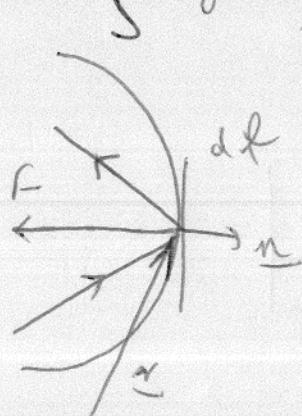
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t+t} \dot{A}(t') dt' = 0 \quad (A(t) \text{ véges})$$

ez most teljesül, mert $|r| \leq L$, és az összenergia állandó
 (edénybe von
 szántva) \uparrow
 \Downarrow \mathbf{r}_i is körülöz

$$\boxed{\sum_i \overline{(E_i \mathbf{r}_i)} + 2 \sum_i \overline{E_i} = 0}$$

initial - total

utaz. előre edény



2. rész

viszletétel alk.: (P: nyomás)

$$\int_S -P(\underline{n}, \underline{r}) \cdot d\underline{S} = -P \int_S (\underline{n}, \underline{r}) d\underline{S} =$$

Gauss-tétel

$$= -P \int_V \operatorname{div} \underline{r} dV \quad (\text{mn.: } \operatorname{div} \underline{r} = 3)$$

$$\int -P \cdot (\underline{r} \cdot \underline{v}) d\lambda = -3 \frac{(2 \cdot \text{dm})}{PV}$$

$$3PV = 2 \sum_i \bar{\epsilon}_i$$

$$PV = \frac{2}{3} \sum_i \bar{\epsilon}_i = \frac{2}{3} N \bar{\epsilon}$$

Kötösönhetettség:

$$f_i = \sum_j f_{ij} \quad \begin{matrix} j \\ i \\ i+j \end{matrix}$$

$$f_{ji}$$

$$f_{ij} = -f_{ji}$$

$$f_{ij}$$

(minimális kölcsönhetettségek)

$$\sum_i \left(\sum_{\substack{j \\ i \neq j}} f_{ij} \bar{r}_i \right) = \sum_{ij} (f_{ij} \bar{r}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left[(f_{ij} \bar{r}_i) + (f_{ji} \bar{r}_j) \right] =$$

ha negatívak az indexek a függvényben
remekül tökéletes kölcsönhetettség

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} f_{ij} (\bar{r}_i - \bar{r}_j) = \phi$$

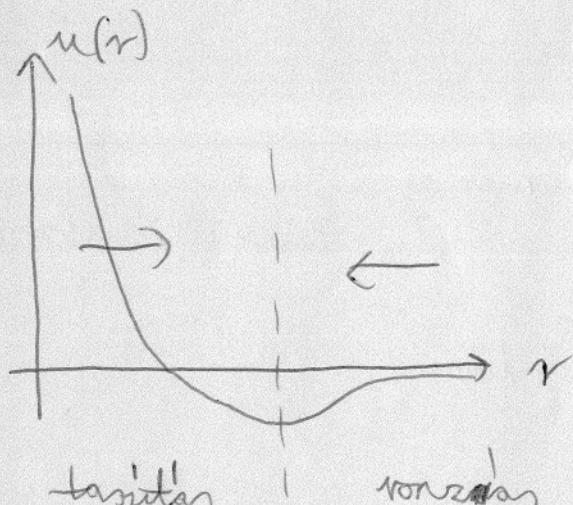
||

$$-3PV + \phi = -2 \sum_i \bar{\epsilon}_i$$

fállal egymás
való k.h. köötti
 k.h.

$$PV = \frac{2}{3} N \bar{\epsilon} + \frac{\phi}{3}$$

$u(r)$ kölcsönhatás, potenciál



ha nincs a gáz, átlagosan csak vanak egymástól
a részecskék \Rightarrow vonzás, de elegendő kicsi a kölcsönhatás

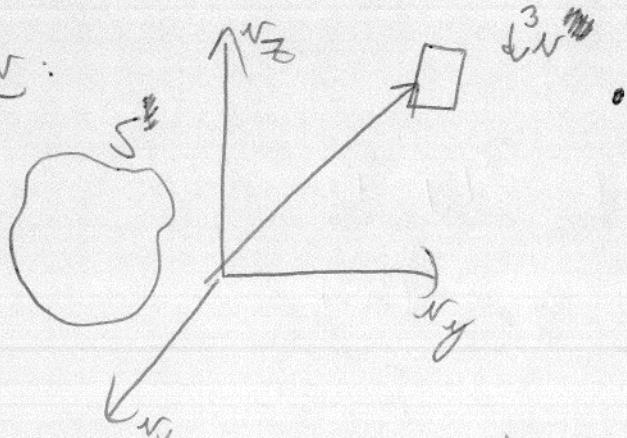
"



Ellenegyoldalúan a k. h-

3) Sebességtérrelás

sebessége, műs vektor, és sebesség abszolút értéke külön
statisztikai események

a) v : 

• arra a val. -e, hogy az atom sebessége v köüli d³v területen van:

$$f(v) d^3 v \#$$

• egről S térfogatra leszve: $\int f(v) d^3 v$

+ normalis: $\int d^3v f(\underline{v}) = 1$
teljes ter

$$P(n) \cdot \binom{N}{n} g^n (1-g)^{N-n}$$

Bernoulli-eloszlás

↑ n atom \underline{v} körül d^3v területen

$$\text{jelek: } g = f(\underline{v}) d^3v$$

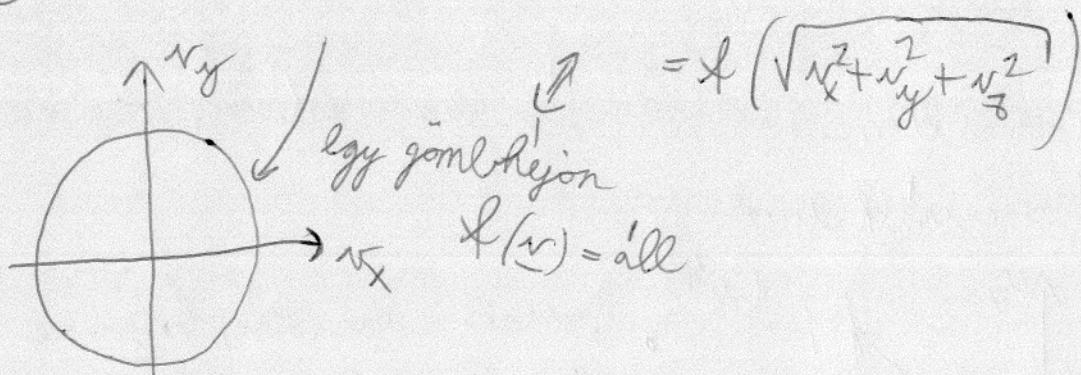
$$\text{vátható érték: } \bar{n} = Ng = \frac{Nf(\underline{v})d^3v}{\text{(Helyes módon)}}$$

($f(\underline{v})$ megadja az ilyen tel. részecskék arányát)

$$f(\underline{v}) = ?$$

Maxwell-féle gondolatmenet:

$$\textcircled{1} \text{ nincs különtetts iány: } f(\underline{v}) = f(v) = v = |\underline{v}|$$



\textcircled{2} v_x, v_y, v_z függetlenek egymástól
(v_x -re több színk. független v_y, v_z -től)

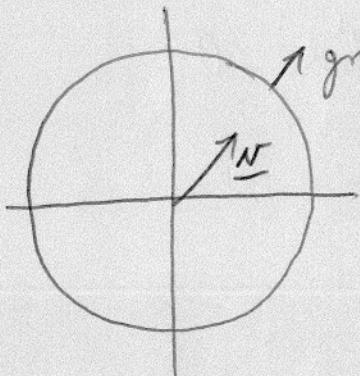
$$f(\underline{v}) = g(v_x) \cdot g(v_y) g(v_z)$$

Normaler:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(v) dv = 1 \quad \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) v^3 dv = 1$$

(hasonlóan $y_1 = -v$)

$$\int g(v_x) dv_x \cdot \int g(v_y) dv_y \cdot \int g(v_z) dv_z$$



most $f(v) = \text{all } v \text{ görbhejor}$

$$\frac{\partial f(v)}{\partial v_x} = \frac{df(v)}{dv} \cdot \frac{dv}{\partial v_x} = \frac{df(v)}{dv} \cdot \frac{v_x}{v}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\frac{dv}{dv_x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{v_x}{v}$$

hasonlóan $v_y \approx -v$

$$\frac{1}{v_x} \frac{\partial f(v)}{\partial v_x} = \frac{1}{v_y} \frac{\partial f(v)}{\partial v_y} = \frac{1}{v_z} \frac{\partial f(v)}{\partial v_z} = \frac{1}{v} \frac{df}{dv}$$

a függetlenesegből adódan: ($f(v) = g(v_x) \cdot g(v_y) \cdot g(v_z)$)
nincs ang. szintű derivált

$$\frac{1}{v_x} g'(v_x) g(v_y) g(v_z) = \frac{1}{v_y} g(v_x) g'(v_y) g(v_z) = \frac{1}{v_z} g(v_x) g(v_y) g'(v_z)$$

$$\frac{1}{v_x} \frac{g'(v_x)}{g(v_x)} = \frac{1}{v_y} \frac{g'(v_y)}{g(v_y)} = \frac{1}{v_z} \frac{g'(v_z)}{g(v_z)} = -\alpha \quad (\text{konstans})$$

$$\frac{1}{v_x} \frac{g'(v_x)}{g(v_x)} = -\alpha$$

$$\int \frac{dg}{g} = -\alpha v_x dv_x$$

legyen $v_x > 0$, $g(v_x) > 0$ (most

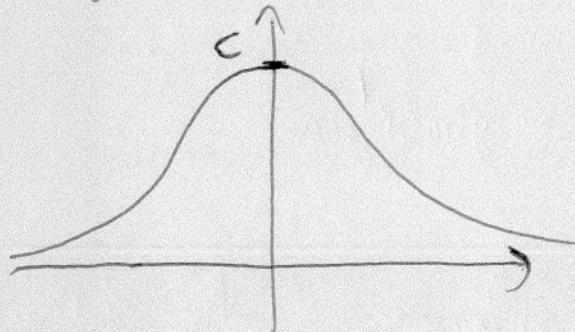
val. növekvő), $g'(v_x)$ is > 0 , most a

0-nál nagyobb \rightarrow h. mon. csökkenő

$$\ln g = -\frac{\alpha}{2} v_x^2 + \ln C$$

$$g(v_x) = C \cdot e^{-\frac{\alpha}{2} v_x^2}$$

Gauss-eloszlás



legval. értéke 0
→ v_x eloszlás

C és α meghatározása:

műz!

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(v_x) dv_x = 1 \quad (\text{normaliz.}) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \begin{cases} \text{! minden} \\ \text{! tudni} \end{cases}$$

$$\overline{v_x^2} \quad \text{a Bernoulli-eloszlásból} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{d}{da} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = -\frac{d}{da} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \frac{1}{a}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(v_x) dv_x = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha}{2} v_x^2} dv_x = C \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\alpha/2}} = C \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} = 1$$

$$\overline{v_x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 g(v_x) dv_x = C \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\frac{\alpha}{2} v_x^2} dv_x = \underbrace{C \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha/2}}} \cdot \frac{1}{\alpha/2} = \frac{1}{2} \frac{2}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

$$C = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}$$

$$\omega = ? \neq \sqrt{\nu_x^2}$$

$$PV = \frac{2}{3} N \bar{\epsilon} = \cancel{\frac{2}{3} N m} \cancel{\frac{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2}{3}} = N \cdot \cancel{\bar{v}_x^2} \cdot m$$

$$PV = N k_B T = \cancel{N} \bar{v}_x^2 \cdot m \quad \bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2$$

$$\boxed{\frac{1}{\alpha} = \frac{k_B T}{m}} = \bar{v}_x^2$$

$$\boxed{g(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2k_B T}}}$$

Gondolatmenet:

v_x, v_y, v_z független és nincs kitüntetett irány \rightarrow Gauss-eloszlás

normális

$\frac{1}{\sqrt{v_x^2}}$ Bernoulli tövényű

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} = \boxed{\left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}}$$

↓

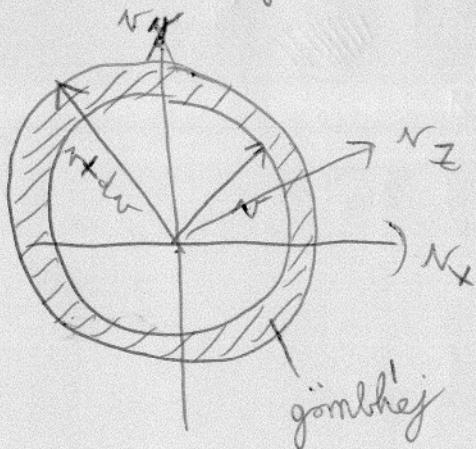
↙

Maxwell-féle sebességeloszlás

b) $F(v)$: abszolút értékkel függő eloszlás

- $f(v) dv$ annak a valószínűsége, hogy $(v, v+dv)$ intervallumban van a sebesség abszolútértéke

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



dv infinitesimal kicsi

$$F(v) dv = f(v) \cdot \underbrace{4\pi v^2 dv}_{\text{gömbhj. területe}}$$

gömbhj. területe
(ha dv kicsi)

$$\xrightarrow{\text{más:}} \frac{4\pi}{3} (v+dv)^3 - \frac{4\pi}{3} v^3 =$$

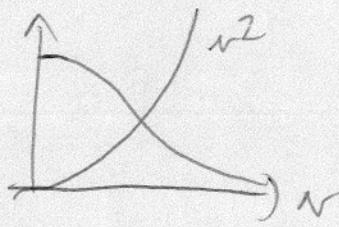
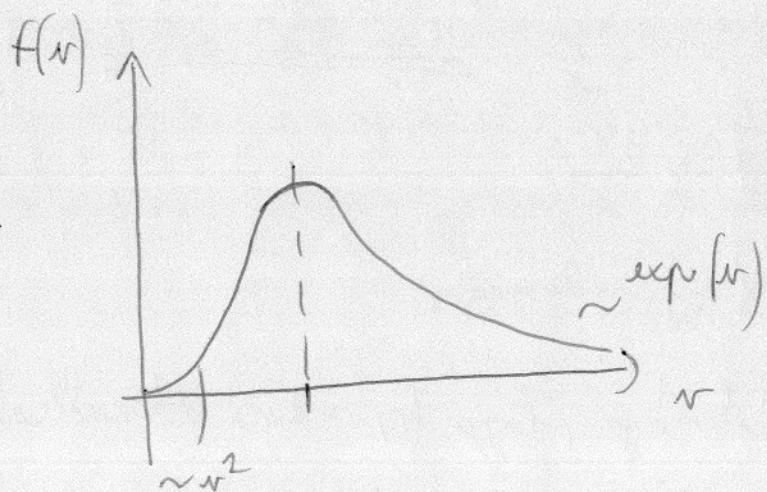
$$= \frac{4\pi}{3} \left(v^3 + 3v^2 dv + 3v dv^2 + dv^3 - v^3 \right) = 4\pi v^2 dv$$

nagyon kicsik

$$f(v) = 4\pi v^2 \cdot f(v)$$

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \cdot 4\pi v^2$$

(vz Maxwell - fele sebességelemezés)



$\langle v \rangle$ ~~egyszerűbb~~ értéke véges ($\neq 0$!!!)

legvalószínűségeség: $f(v) = \max$

$$-\frac{mv^2}{2k_B T} + \ln v^2 = \max \leftarrow \ln F(v) \text{ max. -a rész van} \\ / \frac{\partial}{\partial v^2}$$

$$-\frac{m}{2k_B T} + \frac{1}{v^2} = 0$$

$$\underline{\underline{v^*}} = \underline{\underline{\frac{2k_B T}{m}}} \quad \underline{\underline{v^*}} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

$\underline{\underline{v^2}}$
• várható érték:

$$\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2} = \underline{\underline{\frac{3k_B T}{m}}} \quad \underline{\underline{\overline{v^2}}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

$$\overline{v} = \int_0^\infty f(v) v \cdot dv$$

$$\overline{v} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right) \cdot 4\pi \cdot \int_0^\infty dv e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \cdot v^2 \cdot v = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right) \cdot 4\pi \cdot \frac{1}{2! \cdot \frac{m^2}{(2k_B T)^2}}$$

meg.:
(Broustejn) $\int_0^\infty x^{2l+1} \cdot e^{-ax^2} dx = \frac{l!}{2a^{l+1}}$

$$\underline{\underline{\overline{v}}} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi \cdot m}}$$

(dimenzióanalízis: az elosztásban
csak 3 paraméter van ~~m, k_B, T~~
elből kell egy dimenzió ~~l~~ alján
kombinációt kihozni)

$$\bar{v^2} = 3 \frac{k_B T}{m} = 3 \frac{N_A \cdot k_B T}{N_A \cdot m} = \frac{3 RT}{M}$$

pl. $R = 8,314 \text{ J/mol K}$ $T = 273 \text{ K}$ (0°C)

$$\text{H}_2: M = 2 \text{ g/mol} = 0,002 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$$

$$\sqrt{\bar{v^2}} = 1845 \text{ m/s}$$

$$\text{O}_2: M = 0,032 \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \quad \sqrt{\bar{v^2}} = 461 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(ereklettikus általánosítás, de relativisztikus kisikról ismertetve → elhangolható a rel. effektusokat)

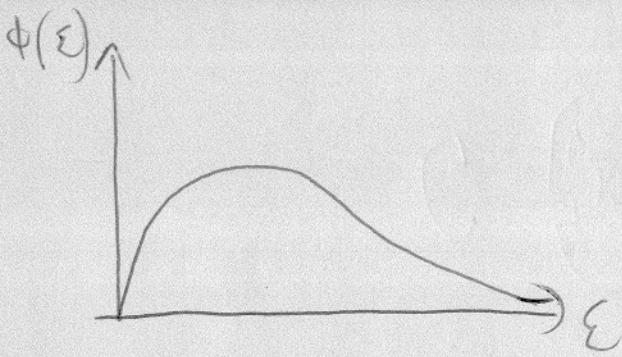
• Változókre:

$$\epsilon = \frac{mv^2}{2} \quad d\epsilon = mv dv$$

$$f(v) dv = \phi(\epsilon) d\epsilon$$

$$\left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \underbrace{4\pi v^2 dv}_{\frac{v \cdot v \cdot dv}{m}} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} \cdot \cancel{4\pi} \cdot \cancel{\sqrt{\frac{2\pi}{m}}} \cdot \cancel{T} \cdot \frac{d\epsilon}{m} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{2\pi}{\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}}_{\phi(\epsilon)} \cdot \cancel{\left(\cancel{4\pi} \cdot \cancel{\sqrt{\frac{2\pi}{m}}} \cdot \cancel{T} \right)} \cdot \sqrt{\epsilon} d\epsilon$$



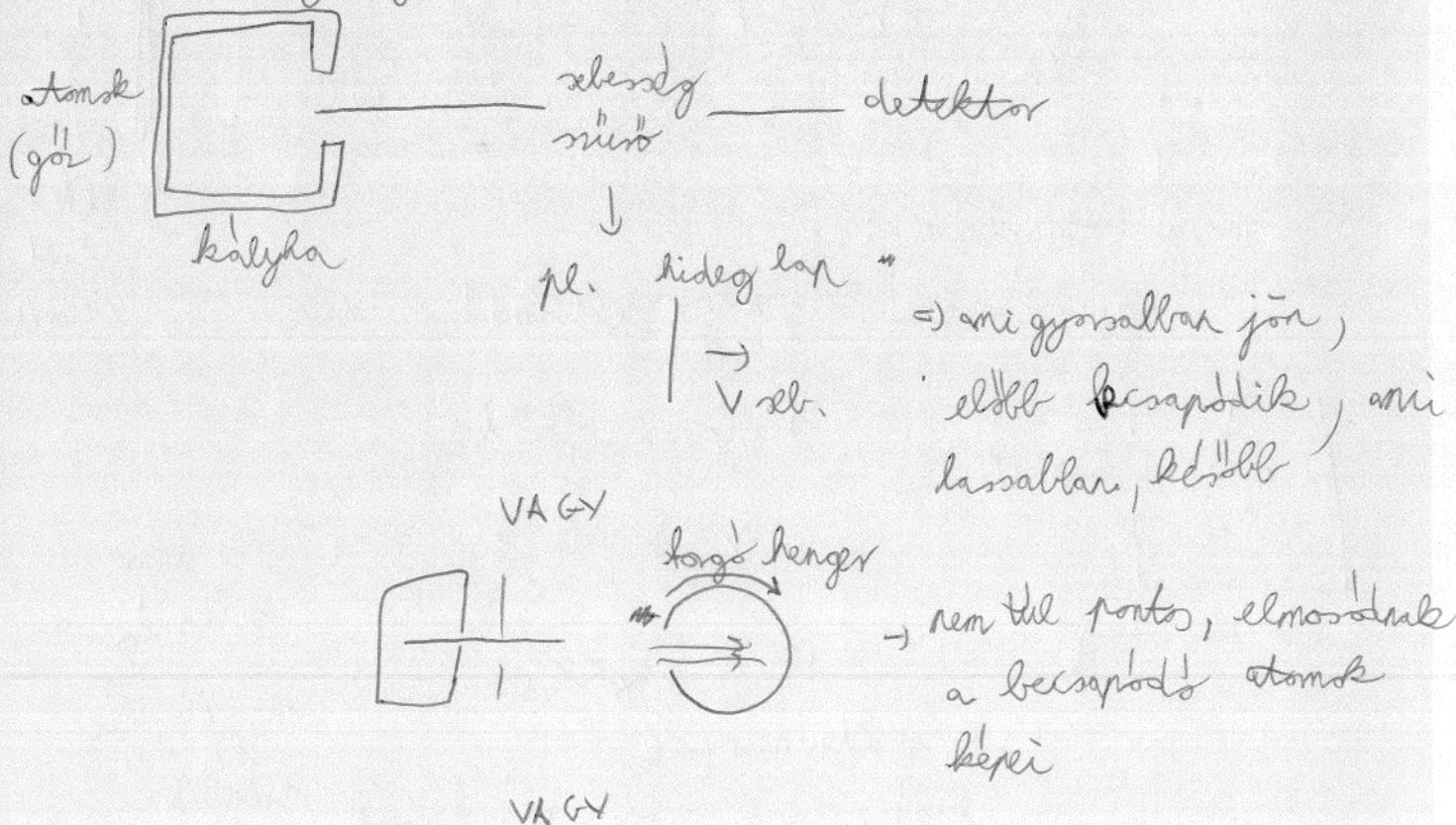
3. óra

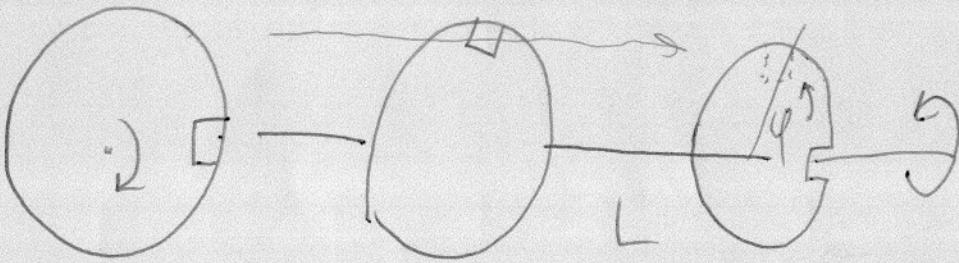
a) Sebességtörölközők (előző óra):

$$\delta(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2mk_B T}}$$

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2mk_B T}} \cdot 4\pi v^2$$

1) Kérdés: Tehátleg ilyen elosztás mutatnak az atomok?





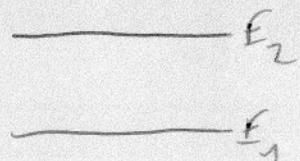
csak akkor érlelnek az atomok, ha a pozitív töltés haladni minden irányon \Rightarrow pozitív irányú idő alatt

$$q = w \cdot t \quad L = vt \quad \text{tegy meg a } L \text{ teljesígtettségi,}\\ \text{míg a röggel } \frac{\text{eltolódás}}{\text{fordul}} \text{ fordul}\\ \text{a második rész}$$



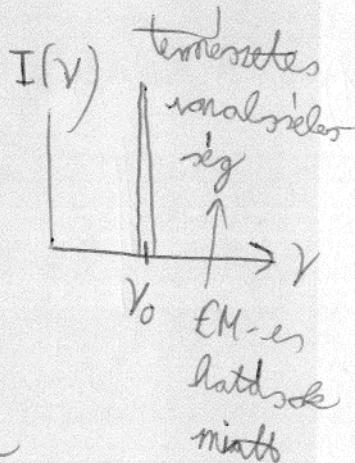
Követlenül meg lehetséges a sebességek eltolódása, és eppen a Maxwell-félel! ✓

2) Spektumrönökök Doppler-szélesedése:



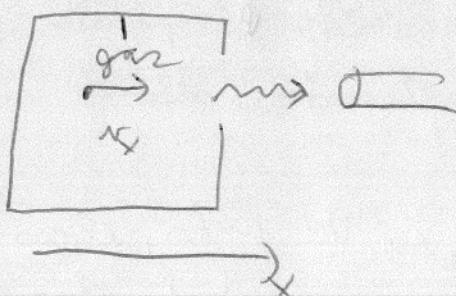
$$\Delta\nu = E_2 - E_1$$

\rightarrow álló atomoknál



Megőtatomoknál:

a sugárzásnak Doppler-eltolódása van



Doppler-effektus

$$v = v_0 \left(1 + \frac{v_x}{c}\right)$$

$$v_x \ll c$$

a spektrumrönök

kiszélesedik, mert a sebességek eltolódása

- 20 - miatt nincs sűrű. frekvenciájú sugárzás kipunk

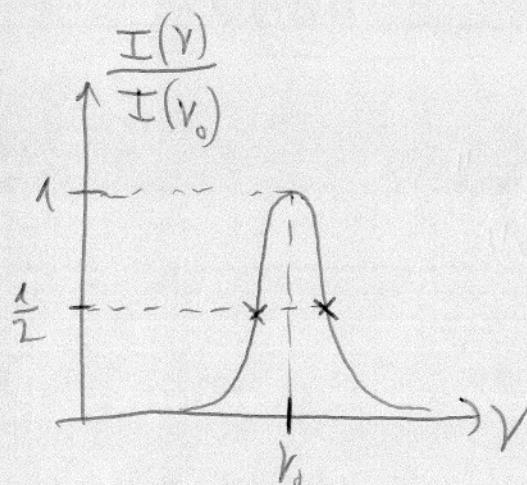
gyengestetts atomok nélkül

$$I(v) \sim \underbrace{N_g \cdot g(v_x)}_{\text{a valószínűsége, hogy megijedt atom lesz } dv_x \text{ tartománya}} dv_x$$

$$v_x = \frac{c}{V_0} (v - v_0) \quad dv_x = \frac{c}{V_0} dv$$

$$I(v) dv \sim N_g \cdot \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \cdot e^{-\frac{m(v-v_0)^2}{2k_B T}} \cdot \frac{c}{V_0} dv$$

$$\frac{I(v)}{I(v_0)} = e^{-\frac{mc^2}{2V_0^2 k_B T} (v-v_0)^2}$$



$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{mc^2}{2V_0^2 k_B T} \cdot \left(\frac{\Delta v_0}{2}\right)^2} / h$$

$$-\ln 2 = -\frac{mc^2}{2V_0^2 k_B T} \left(\frac{\Delta v_0}{2}\right)^2$$

$$\boxed{\Delta v_0 = 2 \frac{V_0}{c} \sqrt{2 \ln 2 \frac{k_B T}{m}}}$$

Δv_0 : felvertelkesítés
az adott spektrális vonalak

es működésben
kell a homogénképletek,
de ekkor csökken az
atomok intenzitása is

ha no a felvertelkesítés
és ezen a spektrális vonalak
tudásában felel meg, összefügg
a vonalak

pl. Na-D vonal (singa)

$$\nu_0 = 5109 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$\Delta\nu_D = 1,7 \cdot 10^9 \text{ Hz}$ → meg nem érkezik össze a vonalak
de a természetes spektrum részességekkel jóval nagyobb

↓
a finom EM hatások elmondanak

töredő is lehet vizsgálni a dologtól:

(spektrumvonalak
profilvizsgolása → Maxwell-féle zsb. eloszlás)

Egysebű rendszerek állapotai

1) pl. lineáris oscillator (nem tölök nagy enő)
lineáris rezonálás

$$m\ddot{x} = -Dx = -m\omega^2 x$$

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \delta)$$

kerdőfázis ← KF (keretidőbeli)

$$\omega^2 = \frac{D}{m}$$

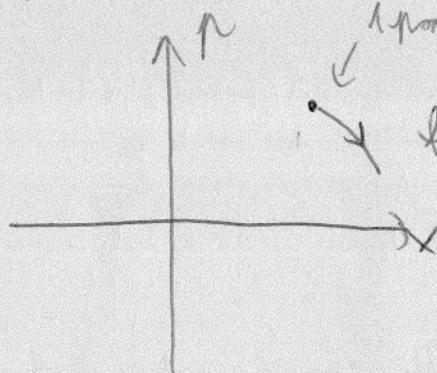
energiamegmérés:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Dx^2 = E (\text{állandó}) (>0)$$

impulsus: $p = m\dot{x}$ átpármérés

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = E$$

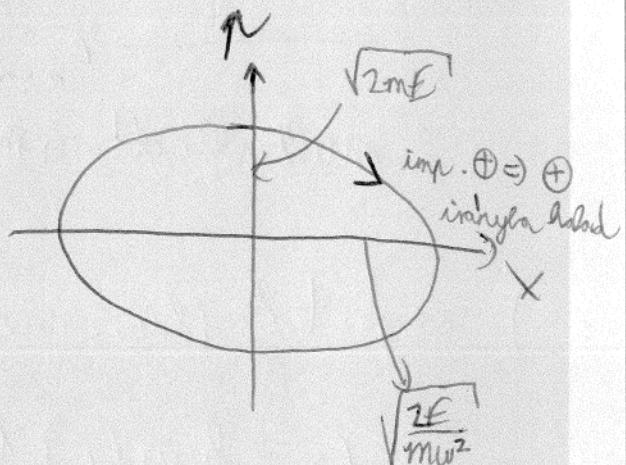
faristér:



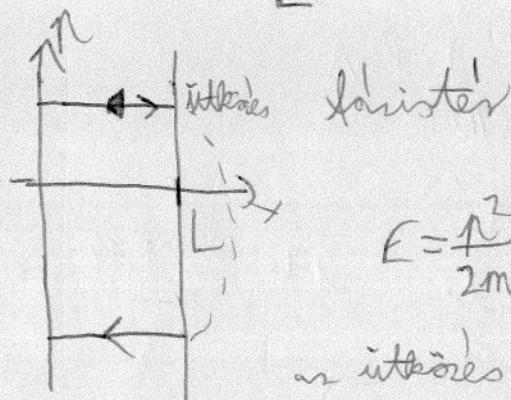
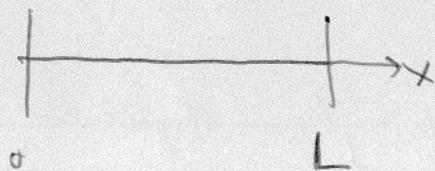
1 pont meghat. a rendszer 'elliptikus'

faristébeli trajektória

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{\left(\frac{2E}{mw^2}\right)} = 1 \quad \text{ellipsis}$$



2) reszervek 2. fel köötö "potlog":



$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (\text{felbontás})$$

az ittközös "singuláris" \rightarrow faristébeli
szabály

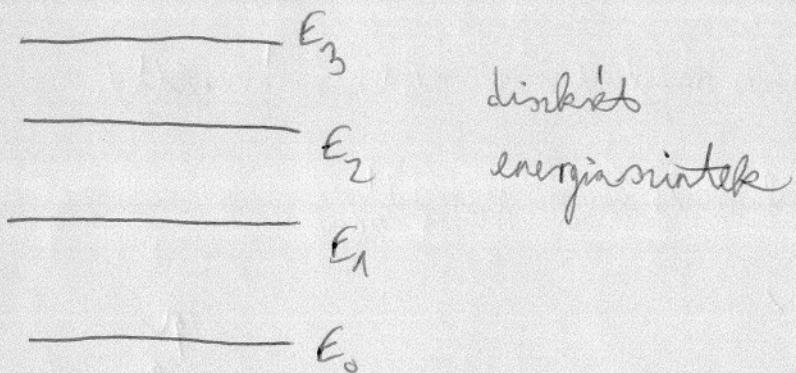
3) gar jellemzése:

N atom, $p+x \rightarrow {}_6^6N$ abb adat

\downarrow
 6 dim. téren N pont

4) kvantummech. rendszeri:

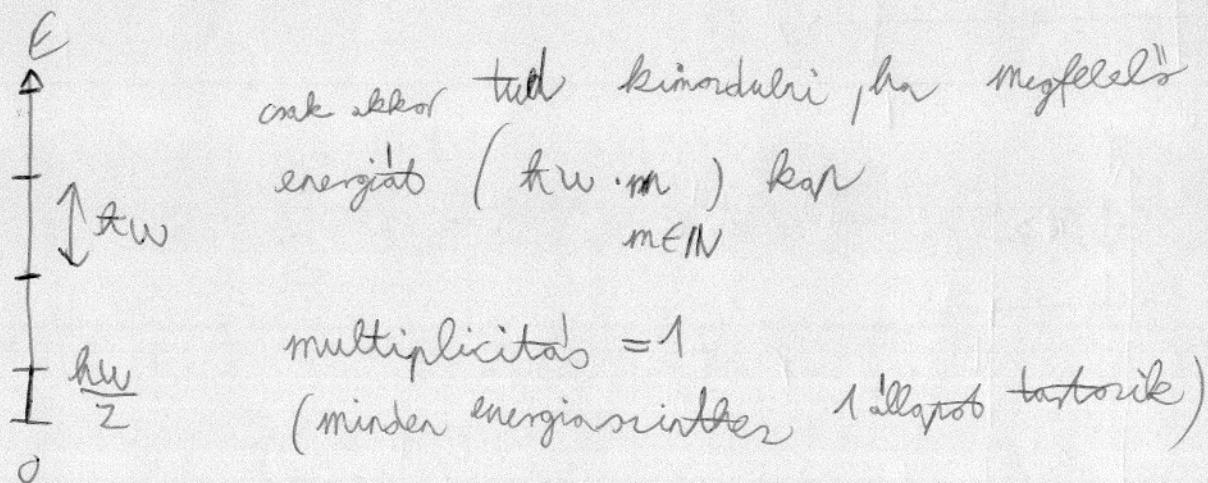
- diskretek energiák köötök alapján esetek



multiplicitás: minden degenérált egy energiaszint

a) ergo tézis (lin. oscillator):

$$E_n = \underbrace{\hbar\omega}_{\text{h}\nu} (n + \frac{1}{2}) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



b) többi ergo tézis:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) =$$

$$= \underbrace{\frac{p_x^2}{2m}}_{\text{egymásnak független}} + \underbrace{\frac{1}{2} m \omega^2 x^2}_{\text{egymásnak független}} + \underbrace{\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 y^2}_{\text{egymásnak független}} + \underbrace{\frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 z^2}_{\text{egymásnak független}}$$

3 egymásnak független oscillatora bonthatók szét

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \hbar \omega \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar \omega \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) + \hbar \omega \left(n_3 + \frac{1}{2} \right)$$

↓

1 adott energiaszintekről 3 részre kell megadni

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \hbar \omega \underbrace{\left(n_1 + n_2 + n_3 + 3j_2 \right)}_{n=0,1,2,\dots}$$

az energiaszintek jellemzi, de
adott energiaszintek több db. tartalék

n	n_1	n_2	n_3	E_n	g_n (multiplicitás)
-----	-------	-------	-------	-------	-----------------------

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad E_0 = \frac{3}{2} \hbar \omega \quad 1$$

$$1 \quad \begin{cases} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \hline \end{array} \right\} \hbar \omega \cdot \frac{5}{2} = E_{n=1} \quad 3$$

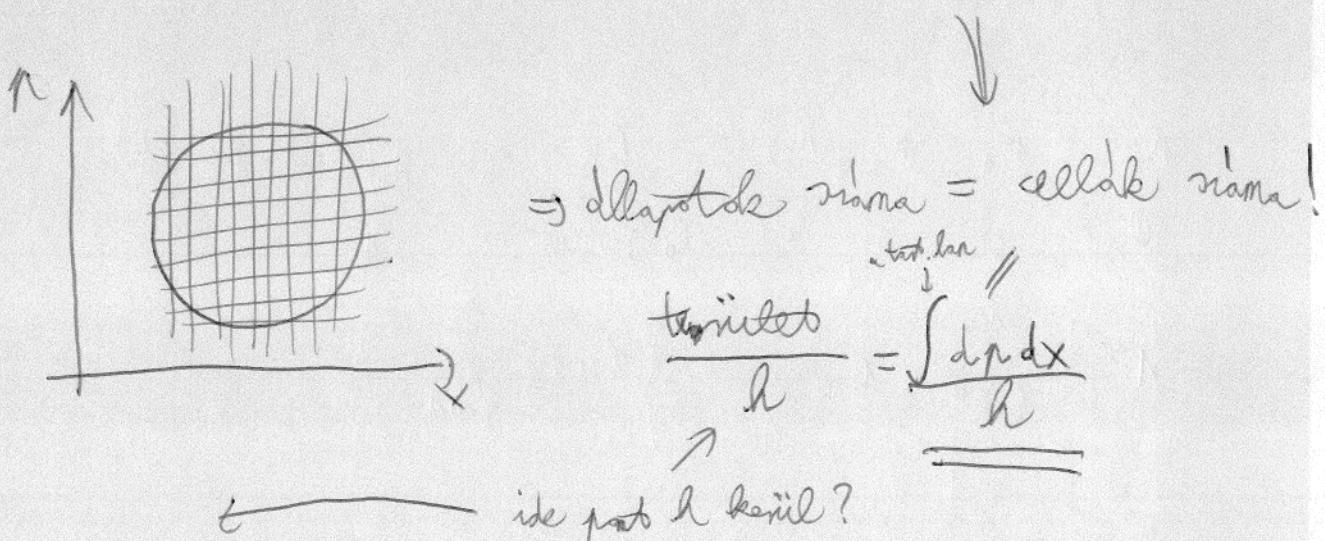
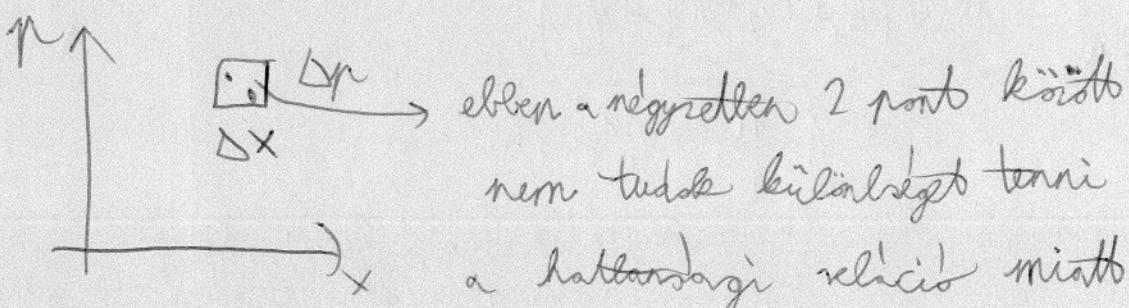
$$2 \quad \begin{cases} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \hline \end{array} \right\} \frac{7}{2} \hbar \omega = E_{n=2} \quad 6$$

$$3 \quad \begin{cases} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ \vdots & & \end{cases} \quad E_3 = \frac{9}{2} \hbar \omega \quad 10$$

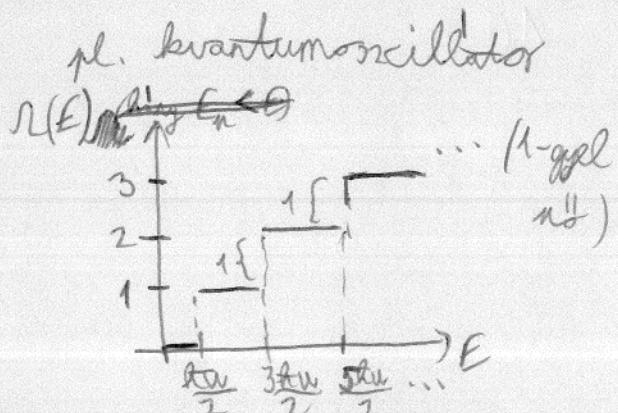
$$3 \quad \begin{cases} 3 & 0 & 0 \\ \vdots & & \end{cases}$$

hogy lehet klasszikus esetben állapotokat számolni?

5) Állapotszámlálás klasszikus rendszereben
határoncsgáj reláció: $\Delta x \Delta p \sim h$

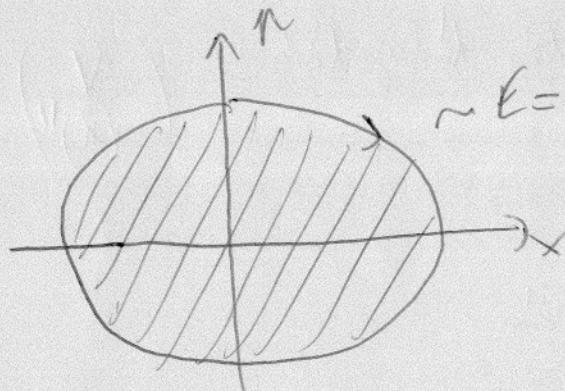


- Formális határtörés: $\boxed{h \rightarrow 0}$, ilyenkor a cella mérete pontosan megadódik \rightarrow klasszikus mechanikai közelítés
- DE $h = \text{all}$, ezt egy konkrét példán részük meg, hogy ezt hogyan kell érteni:



$$R(E) = \sum_n g_n \quad (E_n < E)$$

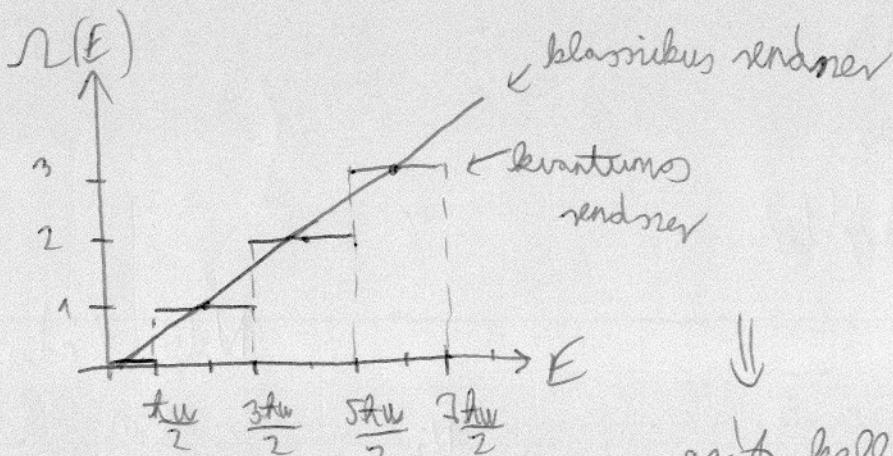
klasszikus oszcillátor



$$\sim E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$N(E) = \frac{\text{ellipsis területe}}{h} =$$

$$= \frac{\pi \sqrt{2mE} \cdot \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}}{h} = \frac{2\pi E}{h\omega} = \frac{E}{\hbar\omega}$$



azt kell $\frac{1}{\alpha}$, mert egyikben a 2 fv. elszárolható nem lenne jól közelíthető

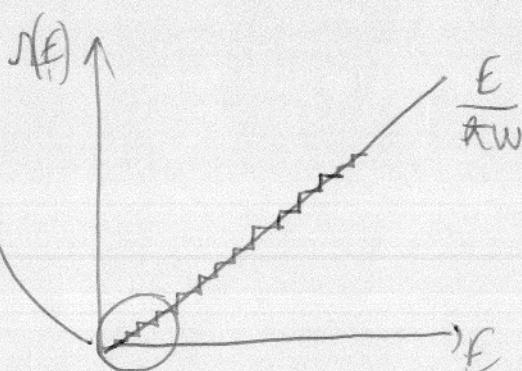
ha lensz az energiakeltő

(elyan nagy $\hbar\omega$ energiadobat visz) -

bár $\hbar\omega \gg \frac{\hbar\omega}{2}$) \Rightarrow a lecsök. fv. jól közelíthető

az egynel

\rightarrow formalisan ez " $\hbar \rightarrow 0$ "



ha több koordináta van, koordinátaiból kell

~~2~~ $\frac{N}{2}$ -val leírni a forrástereléget

$$\left(\frac{V}{\lambda} \right)^N$$

6) "Bináris atomok" tulajdonságai:

2 állapot van: alap - és gerjesztett állapot

$+\varepsilon$ gerjesztett áll.

$-\varepsilon$ alapáll.

energia

eredetből rendszert építik:

$$\begin{array}{ccccccc} +\varepsilon & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{Ndb bináris} \\ -\varepsilon & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{atom} \\ & 1. & 2. & 3. & \dots & N. & \end{array}$$

ha megmondan N atomot, hogy milyen állapotban van
az egészben jellemzi a rendszert

$$E = N_+ \varepsilon - N_- \varepsilon = (N_+ - N_-) \varepsilon = M \cdot \varepsilon$$

\uparrow \uparrow
 $-\varepsilon$ állapotban

$+\varepsilon$ állapotban
lévő atomok
száma

$$M: -N, -N+2, \dots N$$

\uparrow
mindegyik
alapállapotban van

\uparrow
mindegyik
gerjesztett állapotban van
-2d

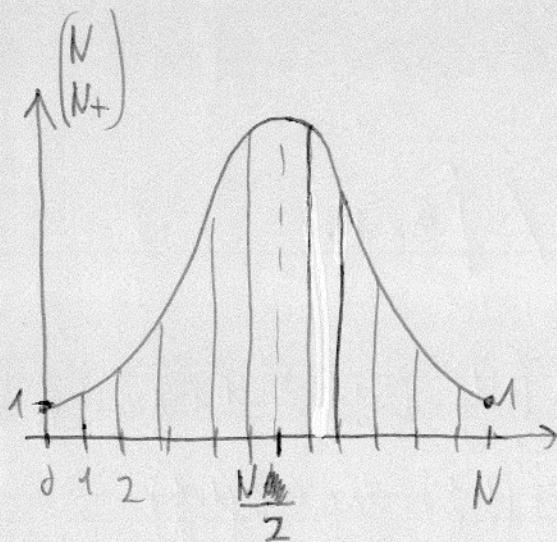
multiplicitás: (háromfelén tudunk 1 energiát megtárolni)

$\Rightarrow N_+$ egységekben meghat. $E=6$

$$g(M, N) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{energia} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{hár. atom} \end{matrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} M = N_+ - N_- \\ N = N_+ + N_- \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} N+M = 2N_+ \\ N_+ = \frac{N+M}{2} \end{array} \quad N_- = \frac{N-M}{2}$$

$$\underline{\underline{g(M, N)}} = \binom{N}{N_+} = \frac{N!}{N_! (N-N_!)!} = \underline{\underline{\frac{N!}{N_! N_-!}}}$$



(binomialis együttható
~Gauss-eloszlás ↑)

Pascal Δ

az a legvalószínűbb, hogy mennyi van + es - állapotban

{ 4. óra

Termodynamikai hatások: $N \rightarrow \infty$

(nem mind 1, hogy a többi parameter mit csinál!)

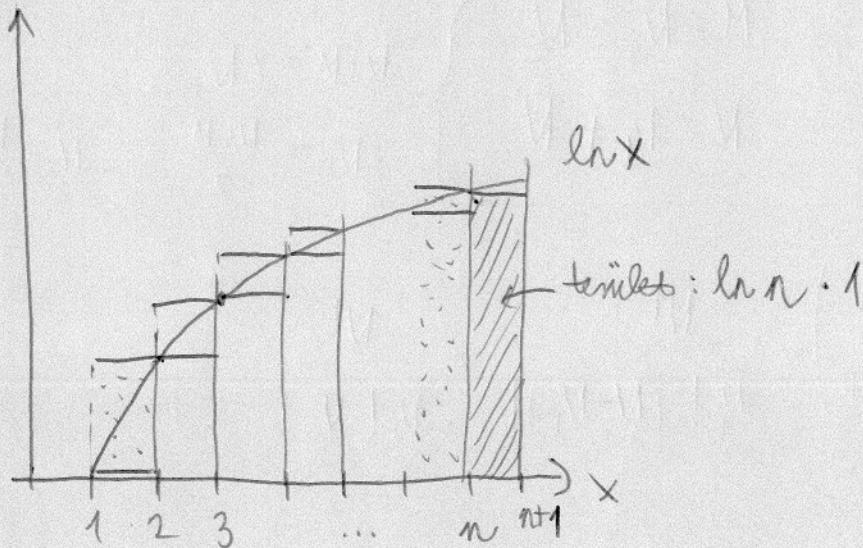
$$\frac{E}{N} = \text{dell} \quad \frac{M}{N} = \text{dell.}$$

(1 atomra jutó
átlagenergia)

) ejtőre működ.

Stirling - formula

$$\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n$$



$$\text{I} \quad \int_1^{n+1} \ln x \, dx > \ln n! \quad \text{II} \quad \int_1^n \ln x \, dx < \int_1^{n+1} \ln x \, dx$$

$$\begin{aligned} \int_1^{n+1} \ln x \, dx &= \left[x \ln x - x \right]_1^{n+1} = (n+1) \underbrace{\ln(n+1)}_{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})} - (n+1) - n \cdot \ln n + n = \\ &= \cancel{n \ln n} + \ln n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cancel{n \ln n} - 1 = \end{aligned}$$

Más:

$$\ln(1+x) \approx x \quad \text{ha } x \ll 1$$

$$= \ln n + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - 1 \quad \sim \ln n \quad \text{j.o.} \quad \text{b.i.o.} \quad (\ln n! - \int_1^n \ln x \, dx)$$

$O(\ln n)$: $\ln n$ Nagyságrendű a különbség

$$\int_n^{n+1} \ln x \, dx = \ln n + \text{vegs ményiségek} = O(\ln n)$$

$\ln n \gg 1$

$$\ln n! = \int_1^n \ln x \, dx + O(\ln n)$$

$\overbrace{[x \cdot \ln x - x]}_1^n$

$$\boxed{\ln n! = n \cdot \ln n - n + O(\ln n)}$$

Stirling-formula

ha $n \gg 1$

pontosabban alak:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right)$$

$n \rightarrow \infty \rightarrow$ (^{ne.} Arryndos-műam naggigazendre) ez elég jó becsles

Kiszámítva a bináris atomok

$$\ln g(M, N) = \ln \frac{N!}{N_+! N_-!} = N \ln N - N - (N_+ \ln N_+ - N_+) - (N_- \ln N_- - N_-) + O(\ln N) =$$

↑ ↑ ↗

$$-N + N_+ + N_- = 0$$

$$= N \ln N - N_+ \ln N_+ - N_- \ln N_- + O(\ln N) = N \ln N - \frac{N+M}{2} \ln \frac{N+M}{2} - \frac{N-M}{2} \ln \frac{N-M}{2} +$$

$$+ O(\ln N) =$$

$$N = \frac{N+M}{2} + \frac{N-M}{2}$$

$$= -\frac{N+M}{2} \ln \left(\frac{N+M}{2N} \right) - \frac{N-M}{2} \ln \left(\frac{N-M}{2N} \right) + O(\ln N) = N \underbrace{\left[\frac{1+N/N}{2} \ln \left(\frac{1+M/N}{2} \right) - \frac{1-N/N}{2} \ln \left(\frac{1-M/N}{2} \right) \right]}_{\Phi} \quad \diamond$$

$$\stackrel{\circlearrowleft}{\downarrow} \ln g(N, M) = N \cdot \underbrace{\Phi\left(\frac{M}{N}\right)}_{\text{matematikai } \& \text{ rendszere multiplikatívan fülfeszítek, hogy ilyen alakú}} + O(\ln N)$$

$$\Phi(x) = -\frac{1+x}{2} \ln \left(\frac{1+x}{2} \right) - \frac{1-x}{2} \ln \left(\frac{1-x}{2} \right)$$

matematikai $\&$ rendszere multiplikatívan fülfeszítek, hogy ilyen alakú

tel.-ski:

$$N \rightarrow \lambda N$$
$$M \rightarrow \lambda M \quad (E \rightarrow \lambda E)$$

$$\underline{\ln g(\lambda N, \lambda M)} = \lambda N \phi\left(\frac{\lambda M}{\lambda N}\right) + O(\ln N) = \lambda N \phi\left(\frac{M}{N}\right) = \underline{\lambda \ln g(M, N)} + O(\ln N)$$

homogen elsofokú fv.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$$

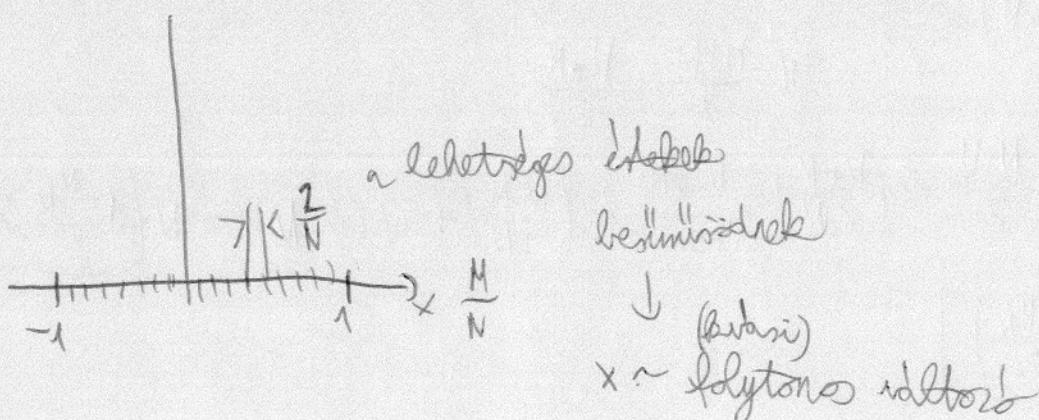
↓
extensív mennyiségek
 ⇒ 2x akkor rendben 2xakkor lezene
 ~ mennyiségek

$$\phi(x) \geq 0 \quad (N > 1)$$

$$x = \frac{M}{N} \quad -1 < x < 1 \quad (-N < M < N)$$

N diszkrét élehetőségei vannak

$$-\frac{N}{N}, -\frac{N-1}{N}, \dots, \frac{2}{N}$$



$$\phi(x=1) = -\underbrace{\ln 1}_0 - 0 \cdot \ln 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$\phi(1) = 0 \quad \phi(-1) = 0 \quad (\text{paros füg.})$$

$$\phi(-x) = \phi(x)$$

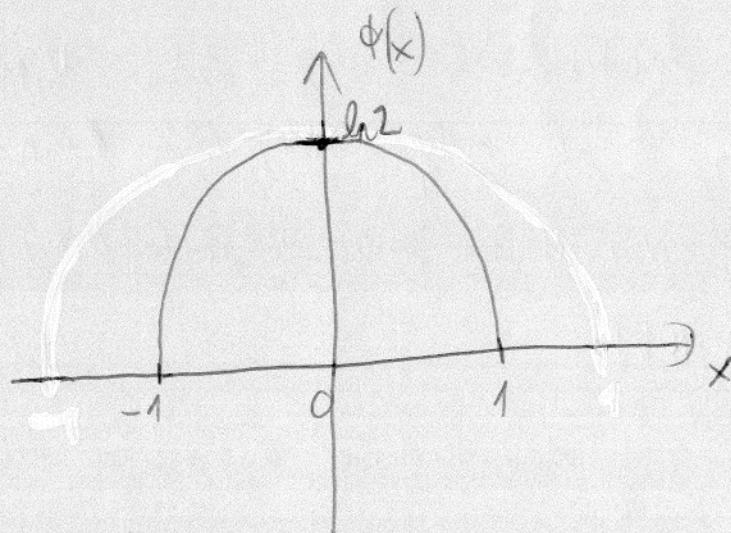
$$\phi(0) = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \ln 2$$

$$\phi'(x) = \underline{-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{2}\right)} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{2}\right) = \cancel{\frac{1+x}{2} \cdot \frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1-x}{2} \cdot \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\phi'(0) = 0$$

$$\phi'(1) \rightarrow -\infty$$

$$\phi'(-1) \rightarrow +\infty$$



meglepső:

$$g = \underbrace{N \cdot \ln 2}_{\phi(0)} = \ln 2^N$$

szisz 'alapoz záma

0 energiában lenne az összes alkotó \rightarrow ez az elhangzadás ($O(\ln N)$)

miatt jött ki

\rightarrow pontosabb formulában:

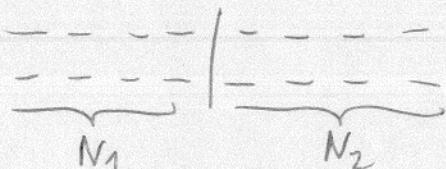
$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}, \text{ esetben}$$

$$\frac{N!}{N_1! N_2!} = \frac{\left(\frac{N}{e}\right)^N \cdot \sqrt{2\pi N}}{\left(\frac{N_1}{e}\right)^{N_1/2} \left(\frac{N_2}{e}\right)^{N_2/2} \sqrt{2\pi N_1/2} \sqrt{2\pi N_2/2}} = \frac{\frac{N^N}{e^N} \cdot \sqrt{2\pi N}}{\left(\frac{N_1}{e}\right)^{N_1} \left(\frac{N_2}{e}\right)^{N_2} \cdot 2\pi^{N/2}} =$$

ha $N_1 = N_2$ ($x=0$)

$$= 2^N \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \quad (\ln N pontossággal a több meggyeri)$$

- Feltételezünk, hogy egy bázis energián, amelyen állapotok megtalálhatóak, azok megtalálására valószínűsége ugyanannyi.
- Mikroállapot: teljes állapotleírás
- makroállapot: részleges -II- (csak bázis jellemzőkkel foglalkozunk)
 - pl. bináris rendszerek részleges leírás N, M meghatározása; teljes leírása, hogy melyik milyen állapotban van.
 - \rightarrow makroállapotot M -mel adan meg ($E=M \cdot E$), akkor a mikroállapotok száma $\mathcal{Z}(M, V)$.
- Postulatum, hogy két rendszer egysülyi állapotában az E rögzítésével kapott makroállapotot megtalálható mikroállapotok arányosan elosztják (az részecskék, makroskopikus rendszerek, termodynamikus hatásokban)
- Teljesítik a bináris atomok rendszerét:



• teljes rendszer atomjainak száma $N_1 + N_2 = N$

• energia: $E = M \cdot E$. (fesz.)

• gyorsított állapotok száma:

$$N_4 = \frac{N+M}{2}$$

$$E = E_1 + E_2 \quad (\text{két rész energiájának összege})$$

$$M = M_1 + M_2$$

Annak a valószínűsége, hogy M_1 van az egyik oldalon (ez meghatározza a másik oldalon $M_2 - t$):

$$P(M_1) = \frac{\left\{ M_1-\text{es megalakított áll.} \right\}}{\left\{ \text{összes állapot} \right\}} = \frac{g(M_1, N_1) \cdot g(M_2, N_2)}{g(M, N)}$$

• legvalószínűbbek keressük:

$$P(M_1) = \max$$

$$\ln P(M_1) = \max$$

$$M_2 = M - M_1$$

$$\ln P(M_1) = \ln g(M_1, N_1) + \ln g(M_2, N_2) - \ln g(M, N)$$

• termodyn. határeset ($N \rightarrow \infty$, $\frac{M}{N} = \text{áll}$, $\frac{N_1}{N} = \text{áll}$, $\frac{N_2}{N} = \text{áll}$)

$$\ln P(M_1) = N_1 \phi\left(\frac{M_1}{N}\right) + N_2 \phi\left(\frac{M_2}{N}\right) - N \phi\left(\frac{M}{N}\right) + O(\ln N)$$

Dérivelés:

$$\frac{\partial}{\partial M_1} \ln P(M_1) = 0 \quad (\text{melyetek áll})$$

(M most konstans, nem függ M_1-tl)
(addig élték)

$$\frac{\partial}{\partial M_1} \ln P(M_1) = \frac{\partial}{\partial M_1} \ln g(M_1, N_1) + \frac{\partial}{\partial M_2} \ln g(M_2, N_2) \cdot \frac{\partial M_2}{\partial M_1} = 0$$

$$\overbrace{-1}^{} \leftarrow M_2 = M - M_1$$

$$\frac{\partial}{\partial M_1} \ln g(M_1, N_1) = \frac{\partial}{\partial M_2} \ln g(M_2, N_2)$$

- Boltzmann: entropia definíciója:

$$S := \ln g(M, N) \cdot k_B$$

↑
ez most önkényesen tűnik, de később látni fogjuk,
hogy a mértékegyiségek és az univ. állapotok helyes
állapotok kell ez a tényező

- homogénebb definíció: $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$

legalacsonyabb energia-elosztással:

$$S_1(E_1, N_1) + S_2(E_2, N_2) = \text{max.}$$

$$\frac{1}{T_1} = \frac{\partial S_1(E_1, N_1)}{\partial E_1} = \frac{\partial S_2(E_2, N_2)}{\partial E_2} = \frac{1}{T_2} \Rightarrow \underline{\underline{T_1 = T_2}}$$

a homogénebbek kiegészítője szükséges feltétel \Rightarrow a legalacsonyabb állapot (egységes)
kialakulásához, de nem elég széges

↗
masodik derivate > 0 kell legyen

(megj.:

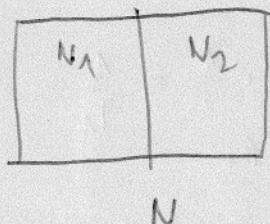
látni fogjuk ~~figyj~~: az elosztási sűrűsége jellemzi a minden
mennyiségek arányát, azonban termodynamikában a homogénebbek
tipikusan nincs nagy aránya

↓
T-re illes elosztási-t kell kapnunk)

5. Jör

0) Bázis:

$$\text{bindisz. atomok} = \frac{\epsilon}{-\epsilon}$$



$$P(M_1) = \frac{g(M_1, N_1) \cdot g(M_2, N_2)}{g(M, N)}$$

addit. energ.
ill. val.-e

↑
multiplicitás

$$M_1 + M_2 = M$$

$$E_1 = M_1 \epsilon = (N_{+1} - N_{-1}) \cdot \epsilon$$

$$P(M_1)_{\max} = ?$$

Tudjuk: $\ln P(M_1)_{\max}$ műth van

$$\underbrace{\ln g(M_1, N_1) + \ln g(M_2, N_2)}_{\max} = \max$$

(M_1, N_1 ugyan disszkittek, de sok atomot rendelnek az energiaminték nagyon közel vannak, kiszálytatók)

$$\frac{\partial}{\partial M_1} \ln g(M_1, N_1) + \frac{\partial}{\partial M_2} \ln g(M_2, N_2) \left(\frac{\partial M_2}{\partial M_1} \right)_{-1} = 0$$

||

$$\frac{\partial}{\partial M_1} \ln g(M_1, N_1) = \frac{\partial}{\partial M_2} \ln g(M_2, N_2)$$

↓
(Legál. eset)
egyensúly feltételei

emlékeztet minket^{az} entropiára (egy.-ban max.) és ill. -re
(egy. ban kiegészítődik)
||

$$\text{Boltzmann: } S = k_B \ln g(E)$$

$$S_1 = k_B \ln g(M_1, N_1) = k_B \ln \left(\frac{E_1}{\varepsilon} \right) N_1$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T(E)}$$

$$\text{I. } \underline{S_1(E_1) + S_2(E_2) = \max} \quad (\text{egy. ketetlen})$$

$$\text{és } E_1 + E_2 = E \text{ (áll) } (\text{alapfetővel})$$

Megj:

nem használunk
ki, hogy mennyi
a rendszer multiplicitása

↓
Iltalános elvénnyük töltek

$$\text{II. } \frac{\partial S_1}{\partial E_1} = k_B \frac{\partial \ln g(M_1, N_1)}{\partial M_1} \Big|_{M_1 = \frac{E_1}{\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{T_1}$$

$$\text{és } \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} \Rightarrow \underline{T_1 = T_2} \quad (\text{egy. ketetlen})$$

Kérdések:

- Termodynamikában megszoktuk, hogy T jól meghatározott \rightarrow
→ ekkor nagyon jók eloszlásainak kell lennie T -nek
- most csak részleteket nézzünk \rightarrow tényleg max.?

↓

$$1) \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial M_1^2} \ln g(M_1, N_1)}_{<0} - \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial M_2^2} \ln g(M_2, N_2)}_{<0} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial M_2}{\partial M_1} \right)}_{-1} ? < 0$$

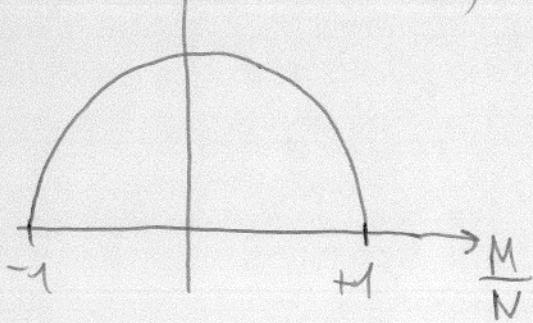
$$\ln g = N \cdot \phi \left(\frac{M}{N} \right)$$

↑ ↑

b.o. < 0 ✓

$$\frac{\partial^2 \ln g}{\partial M^2} < 0$$

tényleg maximumot
kaptunk



(l. előző oldal)

T elosztása:

$$2) S = k_B \ln g(M, N) = k_B N \cdot \phi\left(\frac{M}{N}\right) \quad \phi(x) = \frac{1}{2} (1+x) \ln \frac{1+x}{2} -$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = k_B \cdot N \cdot \phi'\left(\frac{M}{N}\right) \cdot \underbrace{\frac{1}{N}}_{M=\frac{E}{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{k_B}{\varepsilon} \cdot \phi'\left(\frac{M}{N}\right) - \frac{1}{2}(1-x) \ln \left(\frac{1+x}{2}\right)$$

termodyn.

határesetben ez áll.

minel $\frac{M}{N} = \text{áll.}$ (1 részecskéje jut energia)

$$\frac{\partial}{\partial E} \frac{1}{T} = \frac{\partial^2 S}{\partial E^2} = \frac{k_B}{\varepsilon} \cdot \phi''\left(\frac{M}{N}\right) \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow 0$$

termodyn határesetben $N \rightarrow \infty \quad \frac{1}{N} \rightarrow 0$

a többi tagok is $0-\infty$ tartanak, és egységesen elosztanak

$$\begin{aligned} \ln P(M) &= \ln g(M_1, N_1) + \ln g(M_2, N_2) - \ln g(M, N) = \\ &= N_1 \cdot \phi\left(\frac{M_1}{N_1}\right) + N_2 \cdot \phi\left(\frac{M_2}{N_2}\right) + \text{const} \end{aligned}$$

M_1^*, M_2^* a legvalószínűbb érték (maximum):

$$\left(\text{akkor: } \phi'\left(\frac{M_1^*}{N_1}\right) = \phi'\left(\frac{M_2^*}{N_2}\right) \right. \\ \left. \text{és } \left(\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} \right) \right]$$

szabálytűnk a max. könyl: $\phi''\left(\frac{M_1^*}{N_1}\right)$ term. határesetben konst. \downarrow maximumban

$$\begin{aligned} \ln P(M_1) &= N_1 \phi\left(\frac{M_1^*}{N_1}\right) + N_2 \phi\left(\frac{M_2^*}{N_2}\right) + \underbrace{\left(N_1 \phi'\left(\frac{M_1^*}{N_1}\right) \frac{1}{N_1} - N_2 \phi'\left(\frac{M_2^*}{N_2}\right) \frac{1}{N_2} \right)}_{\text{maximumban}}. \\ &\cdot (M_1 - M_1^*) + \frac{1}{2} \left[\underbrace{\phi''\left(\frac{M_1^*}{N_1}\right) \frac{1}{N_1}}_{:= -\frac{a}{N_1}} \times \underbrace{\phi''\left(\frac{M_2^*}{N_2}\right) \frac{1}{N_2}}_{:= -\frac{b}{N_2}} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial M_1} \cdot (1) \right] (M_1 - M_1^*)^2 + \dots \end{aligned}$$

további deriváltakban egyre kisebb tagok jelentkeznek meg

+ const

$$\text{pl. 3. deriv.-ban } = \frac{1}{N_1^2} \cdot \frac{1}{N_2^2}$$

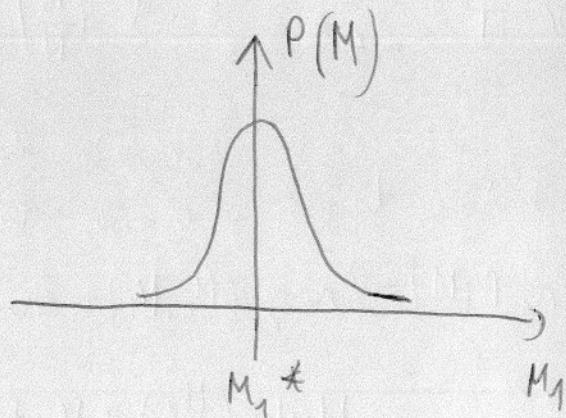
\hookrightarrow a 2. tagban többé nem kell menni, ha $N \rightarrow \infty$ (természetes)

~~$P(M_1) = N_1 \cdot \left(\frac{M_1^*}{N_1} \right)^2$~~

$$\ln P(M_1) = -\frac{1}{2} \left(\frac{a}{N_1} + \frac{b}{N_2} \right) (M_1 - M_1^*)^2 + \text{const}$$

$$P(M_1) = C \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{a}{N_1} + \frac{b}{N_2} \right) (M_1 - M_1^*)^2}$$

Gauss-eloszlás!



$$\overline{M_1 - M_1^*} = 0$$

$$\sigma^2 = \overline{(M_1 - M_1^*)^2} = \frac{1}{\frac{a}{N_1} + \frac{b}{N_2}}$$

termódin. határeset:

$$\frac{N_1}{N} = \text{all} \quad \frac{N_2}{N} = \text{all} \quad (\text{így növeljük a rendszert, pl. lehet})$$

$$N_1 = \frac{N}{2} = N_2$$

$$\overline{(M_1 - M_1^*)^2} = \overline{\left(\frac{1}{\frac{aN}{N_1} + \frac{bN}{N_2}} \right) \frac{1}{N}} = N \cdot \left(\frac{1}{\frac{aN}{N_1} + b \frac{N}{N_2}} \right)$$

\hookrightarrow a tipikus érték (0 százalékos) \sqrt{N} -el arányos!

$$\frac{M_1}{N} = \text{all} \quad \frac{M_1^*}{N} = \text{all.} \quad M_1^* \sim N$$

Itt nagy, de az energia is nagy

$$\overline{(M_1 - M_1^*)^2} \sim N$$



$$\frac{\sqrt{(M_1 - M_1^*)^2}}{M_1^*} \sim \frac{\sqrt{N}}{N} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$$

az energia legal. értékhez
való eltérés az
energiához viszonyítva

$$1 \text{ eV} \cdot N \cdot 10^{22} \quad \frac{1}{\sqrt{N}} = 10^{-11}$$

a legal. érték és a mérő

2 rendszerrel a 2 rendszer → érték közötti eltérés nagyon
egymás köztől ~~elég~~ állandónak nincs
energiától, mivel az energiája
de lyan kis mértéken, hogy makroskopikus
mérőkben a legal. érték közelében lesz mindenkor az energia,
és a kidörzsölés elhangzott!

↓

Ö. f.: $g(E, N)$ multipl.

$$S(E, N) = k_B \ln g(E, N)$$

$$\frac{1}{T(E, N)} = \frac{\partial S(E, N)}{\partial E}$$

} definíció (entropia, hőmérséklet)

Egyensúlyban: $S_1 + S_2 = \text{max.}$

$$T_1 = T_2$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial E^2}(E, N) = \frac{1}{T(E)} < 0 \quad \text{Eredm.}$$

$$-\frac{1}{T^2} \frac{\partial^2 S}{\partial E^2} < 0$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial E} > 0}$$

A rendszer hőmérséklete az
energia monoton növekvő függvénye

$$S(E, N) = k_B \ln g(M, N) = k_B \cdot N \cdot \phi\left(\frac{M}{N}\right) =$$

whol:

$$\phi(x) = -\frac{1+x}{2} \ln \frac{1+x}{2} -$$

$$-\frac{1-x}{2} \ln \frac{1-x}{2}$$

$$= N k_B \left(-\frac{1+M/N}{2} \ln \frac{1+M/N}{2} - \frac{1-M/N}{2} \ln \frac{1-M/N}{2} \right)$$

termal. Hotaussetzen
in all.

$$\phi' = \frac{d\phi}{dx} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{2} +$$

$$+\frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{2} =$$

$$=\frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$$

$$S \sim N$$

$\rightarrow T(E):$

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = N k_B \phi'\left(\frac{M}{N}\right) \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{E} = \frac{k_B}{E} \cdot \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-M/N}{1+M/N} \right)$$

$$E(T): e^{\frac{2E}{k_B T}} = \frac{1-M/N}{1+M/N}$$

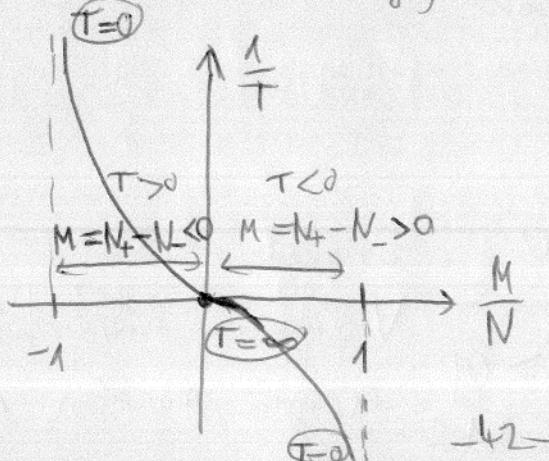
$$e^{\frac{2E}{k_B T}} \cdot \left(1 + \frac{M}{N} \right) = \left(1 - \frac{M}{N} \right)$$

$$\frac{M}{N} = \frac{1 - e^{\frac{2E}{k_B T}}}{e^{\frac{2E}{k_B T}} + 1} = -\frac{e^{\frac{2E}{k_B T}} - 1}{e^{\frac{2E}{k_B T}} + 1} = -\text{th} \left(\frac{E}{k_B T} \right)$$

\sim 1 reservsked
jitts' energia

$$\frac{e^{\frac{2E}{k_B T}} - e^{-\frac{2E}{k_B T}}}{e^{\frac{2E}{k_B T}} + e^{-\frac{2E}{k_B T}}}$$

$$E = M \cdot \varepsilon = -N \cdot \varepsilon \cdot \text{th} \left(\frac{E}{k_B T} \right)$$

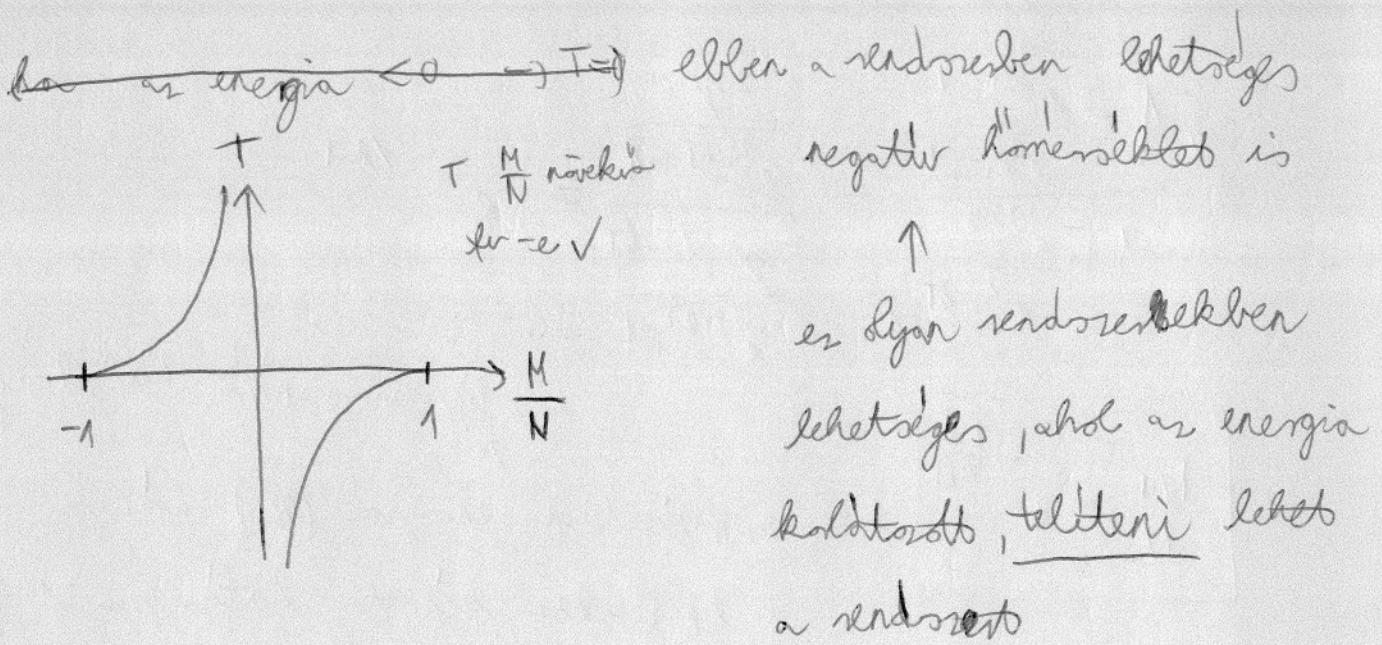


$T > 0$, ha $\frac{M}{N}$ (energia) < 0

(több atom van az alapállapotban)

$T < 0$, ha $\frac{M}{N} > 0$ (több atom

van a gyorsodott állapotban)



DE. lehetségek ilyen rendszer \leftarrow (azt. van fiz. rendszerekben nincs nem lehets teltén)

pl. $\pm \frac{1}{2}$ -es mágnesin

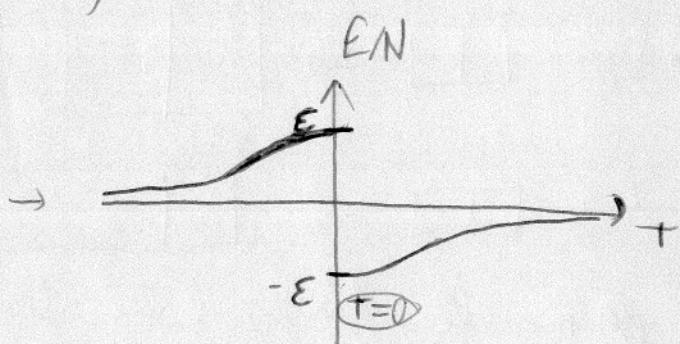
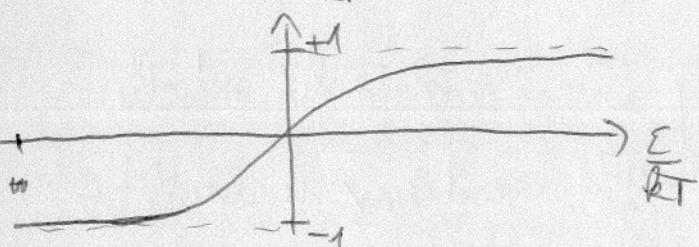
\downarrow

$\rightarrow V_{\text{magnal}}$
 en
az állapot lehets mágnes tétlen

a mágneses tétel

beállítva a spinket, majd megfordítva a mágneses tétel, rövid ideig nemrégie egysélyi rendszer alkotnak a magok negatív homoképet (ami k. k. mégis lez a külvilággal egy idő után)

$\text{th}\frac{\epsilon}{kT}$



$$M = N_+ - N_- \quad N = N_+ + N_-$$

$$N_{\pm} = \frac{N \pm M}{2}$$

$$\frac{N_+}{N_-} = \frac{N+M}{N-M} = \frac{(1+\frac{M}{N})}{(1-\frac{M}{N})} \quad \frac{1+\frac{M}{N}}{1-\frac{M}{N}} =$$

$$= \frac{1 - \frac{e^{\frac{-2\epsilon}{k_B T}} - 1}{e^{\frac{-2\epsilon}{k_B T}} + 1}}{1 + \frac{e^{\frac{-2\epsilon}{k_B T}} - 1}{e^{\frac{-2\epsilon}{k_B T}} + 1}} = \frac{\cancel{e}^{\frac{-2\epsilon}{k_B T} + 1}}{\cancel{e}^{\frac{-2\epsilon}{k_B T} + 1}} = e^{-\frac{2\epsilon}{k_B T}}$$

$$\boxed{\frac{N_+}{N_-} = e^{-\frac{2\epsilon}{k_B T}}}$$

a két energianívó különbsége

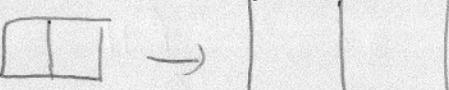
a gerjesztett energia (2ϵ) aránya
a $k_B T$ -hez képest határozza meg

a gerjesztett és az alapállapotban lévő atomok arányát
(ha 2ϵ nagy, kevés atom lesz gerjesztett áll.ban)

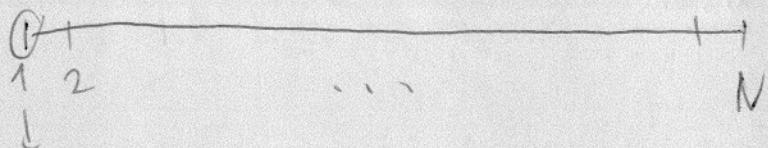
$\hookrightarrow k_B T$ egy jellemző termikus energiatérítés

$$\boxed{k_B T : \text{termikus energia}}$$

Másféléle termikus határozat

(Eddig:  \rightarrow  a részrendszerek aránya átl.)

Most:  az egysik részről mérhető
a ~~modell~~ modell leírása: fix atomból átl rendszer növekedést
visszalijuk, mikorben a kömpsett növeljük (kömpsettel
nálunk R.h.)



teljes rendszerek:

$$E = M \cdot \varepsilon \cdot (N_+ - N_-) \varepsilon$$

1 atomos részr.

$$\begin{aligned}
 p(\varepsilon) &= \frac{1 \cdot \cancel{\binom{N-1}{N_+ - 1}}}{\binom{N}{N_+}} = \frac{(N-1)!}{(N-1)!(N-N_+ + 1)!} = \frac{1}{N} \cdot N_+ \\
 &\text{felső "allapotban van az elso" } \\
 &\text{az elso }
 \end{aligned}$$

$$p(\varepsilon) = \frac{(N-1)!}{N!} \cdot \frac{N_+!}{(N_+-1)!} = \frac{N_+}{N}$$

$$p(\varepsilon) = \frac{N_+}{N} \quad p(-\varepsilon) = 1 - p(\varepsilon) = 1 - \frac{N_+}{N} = \frac{N-N_+}{N} = \frac{N_-}{N}$$

$$\frac{p(\varepsilon)}{p(-\varepsilon)} = \frac{N_+}{N_-} = e^{-\frac{2\varepsilon}{k_B T}} \rightarrow \text{erősen ultrahűtőkkel rögzítés}$$

$$p(+\varepsilon) + p(-\varepsilon) = 1$$

$$p(\varepsilon) = \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}}{e^{\frac{\varepsilon}{k_B T}} + e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}}$$

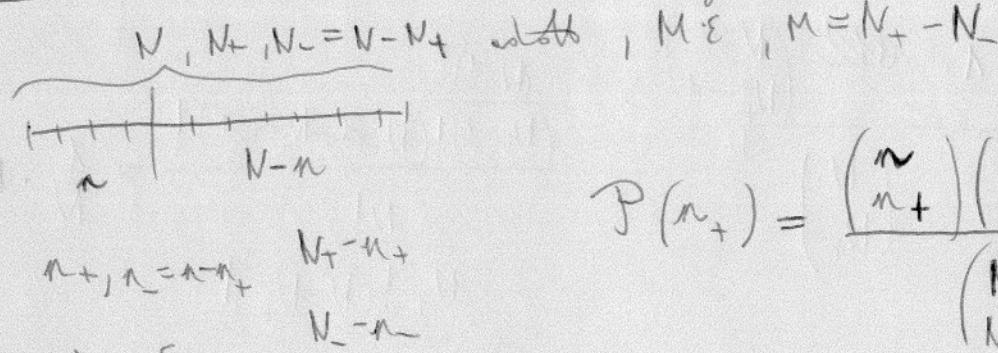
$$p(-\varepsilon) = \frac{e^{\frac{\varepsilon}{k_B T}}}{e^{\frac{\varepsilon}{k_B T}} + e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}} \quad \checkmark$$

normalizáció tény:

$$p(\varepsilon) = \frac{e^{-\frac{\text{energia}}{k_B T}}}{\text{normalizáció tény.}}$$

6. ora

10) Bm.: bináris atomok:



energia: $m\varepsilon$

$$m = n - n_- \quad \text{energia} = (M - m)\varepsilon$$

$$\begin{aligned} P(n_+) &= \frac{\binom{n}{n_+} \binom{N-n}{N-n_+}}{\binom{N}{N_+}} = \\ &= \binom{n}{n_+} \frac{(N-n)!}{(N-n_+)(N-n_-)!} \cdot \frac{N_+! N_-!}{N!} = \\ &= (N-n-(N-n_+))! \end{aligned}$$

$$= \frac{(N-n)!}{N!} = \frac{1}{N(N-1)\dots(N-n+1)} \underset{\uparrow}{\approx} \frac{1}{N^n}$$

termodyn. hatásra \rightarrow N mellett n elhangyolható

$$N \rightarrow \infty, \frac{N_+}{N} = \text{all}$$

$$\frac{N_+!}{(N_+ - n_+)!} = N_+ (N_+ - 1) \dots (N_+ - n_+ + 1) \approx N_+^{n_+}$$

$$\frac{N_-!}{(N - n)_+!} = N_- (N_- - 1) \dots (N_- - n_- + 1) = N_-^{n_-}$$

$$P(n_+) = \binom{n}{n_+} \cdot \frac{N_+^{n_+} N_-^{n_-}}{N^n}$$

$$\frac{N_+}{N_-} = e^{-\frac{2\varepsilon}{k_B T}}, \quad N_+ + N_- = N \quad \left. \right\} \Rightarrow \frac{N_+}{N} = \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}}{e^{\frac{\varepsilon}{k_B T}} + e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T}}}$$

$$\frac{N^-}{N} = \frac{e^{-\frac{\epsilon}{kT}}}{e^{\frac{\epsilon}{kT}} + e^{-\frac{\epsilon}{kT}}}$$

$$\text{mn.: } N^n = N^+ \cdot N^-$$

$$P(n_+) = \binom{n}{n_+} \cdot \frac{(e^{-\frac{\epsilon}{kT}})^{n_+} \cdot (e^{\frac{\epsilon}{kT}})^{n_-}}{(e^{\frac{\epsilon}{kT}} + e^{-\frac{\epsilon}{kT}})^n}$$

↑

a körvendőzött energiájának a teljes rendszer homoszélektetől

függ

$$P(n_+) = \binom{n}{n_+} \frac{e^{-\frac{(n_+ - n_-)\epsilon}{kT}}}{(e^{\frac{\epsilon}{kT}} + e^{-\frac{\epsilon}{kT}})^n} = \binom{n}{n_+} \cdot \frac{e^{-\frac{n\epsilon}{kT}}}{(e^{\frac{\epsilon}{kT}} + e^{-\frac{\epsilon}{kT}})^n}$$

↑

$P(n_+) \approx e^{-\frac{\text{energia}}{kT}} \cdot \text{energiállapot multiplicitása} \cdot \frac{1}{\text{normalizáló tényező}}$

$$\sum_{n_+=0}^n \binom{n}{n_+} \cdot e^{-\frac{n_+\epsilon}{kT}} \cdot e^{\frac{n_-\epsilon}{kT}} = (e^{\frac{\epsilon}{kT}} + e^{-\frac{\epsilon}{kT}})^n$$

• $P_{(+)} = \binom{n}{n_+} \frac{e^{-\frac{n\epsilon}{kT}}}{Z}$

\Downarrow ← additív energiák állapot valószín. = $1 m \cdot \epsilon$ en. ill.
z: normalizáló tényező val.-e \cdot állapotba rátáma

• eggyel m·ε energiájú állapot valószínűsége:

$$\frac{e^{-\frac{n\epsilon}{kT}}}{Z}$$

Általánosítás

1 fix rendszer állapotai

$$0, 1, 2, \dots, n, \dots$$

$$E_0, E_1, E_2, \dots, E_n, \dots \quad (\rightarrow \text{szerepel a multiplicitásra most 1})$$

nuk. állapot valószínűsége \propto hőm. könyezetben

$$P(n) = \frac{e^{-\frac{E_n}{k_B T}}}{Z}$$

Z : normaláris tényező
állapotösszeg

$$Z = \sum_n e^{-\frac{E_n}{k_B T}}$$



adott hőm. könyezetben ~~ki~~ ki tudjuk lépni egy energiaállapot megalakulásának val.-egyenlőségeit

{ kömpset: nagy valószágú fokú rendszer \rightarrow statisztikai kiegészítésre van

er jobb, mint egy fix energiaáll. vizsgálata, mert általában

nem E visz. rendszer, hanem $k_B T = \text{áll}$

így jöhet: $\beta = \frac{1}{k_B T} \rightarrow P(n) = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}$

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$$

2) Bináris atomok \propto hőm. könyezetben

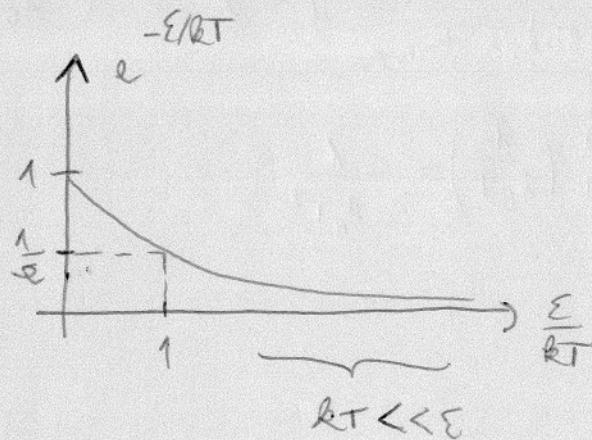
$$\begin{array}{c} \text{--- } \varepsilon \\ \text{--- } -\varepsilon \end{array}$$

$$Z = e^{-\beta \varepsilon} + e^{\beta \varepsilon} = 2 \operatorname{ch}(\beta \varepsilon)$$

$$P(\varepsilon) = \frac{e^{-\beta \varepsilon}}{2 \operatorname{ch}(\beta \varepsilon)}$$

$$P(-\varepsilon) = \frac{e^{\beta \varepsilon}}{2 \operatorname{ch}(\beta \varepsilon)}$$

ha $kT \ll \varepsilon$, $P(\varepsilon) = e^{-\varepsilon/kT} \approx 0 \rightarrow$ nem jelenik meg
gyakrabban állapot



$$\begin{aligned}\bar{E} \text{ (energia valószínűsége értéke)} &= \frac{e^{-\varepsilon/kT}}{2\ln(\beta\varepsilon)} \cdot \varepsilon + \frac{e^{\varepsilon/kT}}{2\ln(\beta\varepsilon)} \cdot (-\varepsilon) = \\ &= -\varepsilon \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \ln(\beta\varepsilon)}{\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \ln(\beta\varepsilon)} = -\varepsilon \cdot \text{tanh}(\beta\varepsilon)\end{aligned}$$

3) Általános "recept" az energia valószínűsége értékére:

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} \quad P(n) = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}$$

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \sum_n P(n) \cdot E_n = \frac{\sum_n e^{-\beta E_n} \cdot E_n}{Z} = -\frac{\frac{\partial Z}{\partial \beta}}{Z} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \\ &\equiv\end{aligned}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \sum_n e^{-\beta E_n} (-E_n)$$

$$\begin{aligned}\text{pl. bin. atomok } \stackrel{1 \text{ db}}{\sim} : \quad Z &= 2 \ln(\beta \cdot \varepsilon) \quad \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln(2 \ln(\beta \cdot \varepsilon)) = \\ &= -\frac{\frac{\partial \ln(\beta \cdot \varepsilon)}{\partial \beta}}{\frac{\partial \ln(\beta \cdot \varepsilon)}{\partial \beta}} \cdot \varepsilon = -\varepsilon \cdot \text{tanh}(\beta \cdot \varepsilon) \quad \checkmark\end{aligned}$$

4) C adakapacitás :

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} \leftarrow \text{inhardt által}$$

$$\uparrow = -\varepsilon \frac{1}{(\alpha(\beta\varepsilon))^2} \cdot \varepsilon \cdot \left(-\frac{1}{k_B T^2} \right)$$

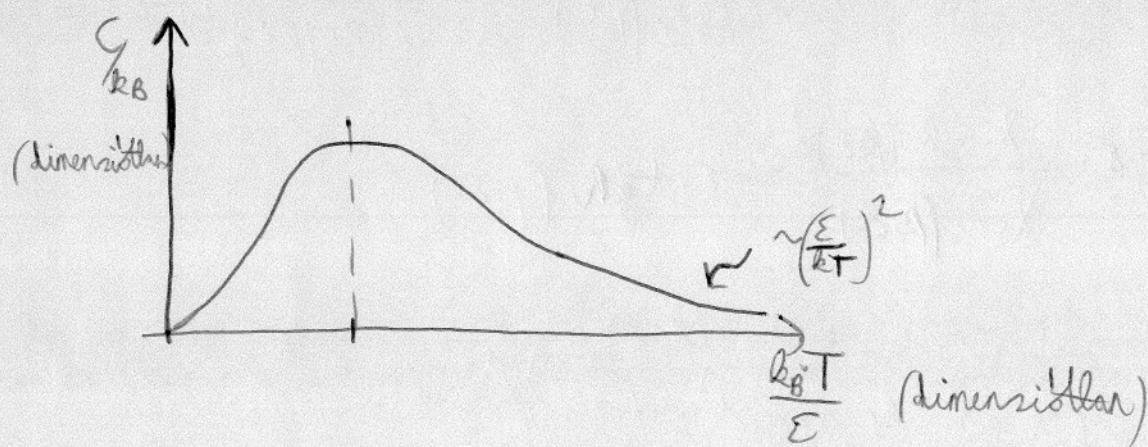
bindisz atomra

$$\frac{\partial \beta}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{k_B T} \right) = -\frac{1}{k_B T^2}$$

$$C = k_B \cdot \frac{(\varepsilon)^2}{\alpha(\beta\varepsilon)^2}$$

\downarrow

$C \rightarrow k_B$ egységekben megyük!



$$\beta\varepsilon \ll 1$$

$$\alpha x \approx 1$$

$$\text{ha } \beta\varepsilon \gg 1$$

$$\alpha x \approx \frac{e^x}{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{k_B T} \ll 1$$

$$x \ll 1$$

$$\frac{\varepsilon}{k_B T} \gg 1$$

$$x \gg 1$$

~~$$\frac{\varepsilon}{k_B T} \left(\frac{\varepsilon}{k_B T} \right)^2$$~~

Maximum helye:

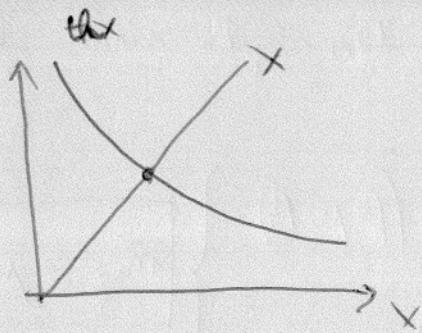
$$\frac{C}{k_B T} = \frac{\varepsilon^2}{k_B T} \cdot 4 \cdot e^{-\frac{2\varepsilon}{k_B T}} = \left(\frac{2\varepsilon}{k_B T} \right)^2 \cdot e^{-\frac{2\varepsilon}{k_B T}} \rightarrow 0$$

$$x = \frac{\varepsilon}{k_B T} \quad \left(\frac{x^2}{(\alpha x)^2} \right)' = \frac{2x (\alpha x)^2 - 2 \alpha x \cdot \alpha x \cdot x^2}{(\alpha x)^4} =$$

$$= \frac{2x (\alpha x)^2 \left(1 - \frac{\alpha x}{\alpha x} \cdot x \right)}{(\alpha x)^4} = 0$$

$$1 - \tanh x \cdot x = 0$$

$$x = \tanh x$$



$$x_0 = 1$$

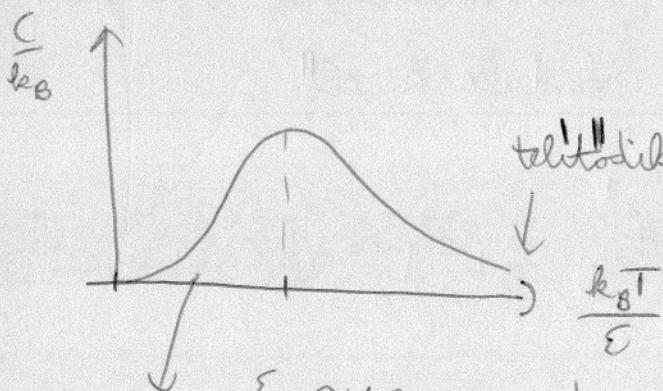
$$x_1 = \tanh 1$$

jitterkis

$$x_2 = \tanh x_1$$

:

$$x \approx x_{1,2}$$



telítőleg a rendszer az energiához nem lesz minden határon túl növelni

$$\frac{\epsilon}{k_B T} \approx 1/2 \rightarrow \text{egyéb nagyságrendű!} \leftarrow \text{max. } \Delta E \text{ adott } \Delta T \text{-hez}$$

kis energiához.

- ha nagy ~~ΔT~~ ΔT kell \rightarrow nem lehet megtenni a rendszer

5) $1/2$ spin mágneses terben:

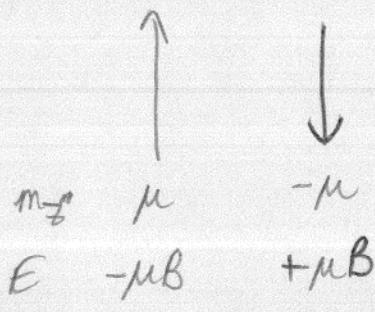
- mágneses mom. \neq komponense $m_z = \pm \mu$

- \underline{B} mágneses terben: $E = -\underline{m} \cdot \underline{B} = -m_z \cdot B$



legyen $\underline{B} \parallel z$

-51-

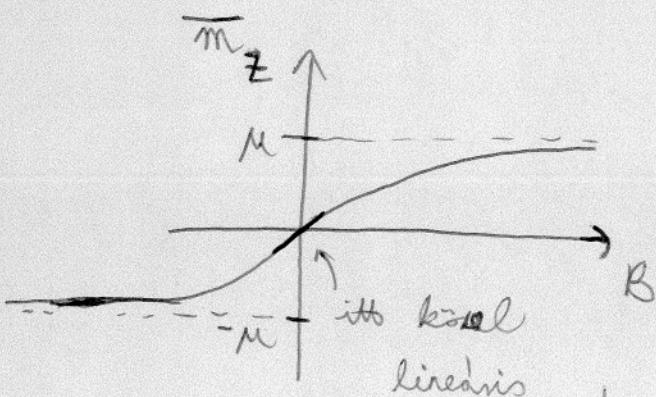


pl. működik testen, ha nincs k.h., 1 ion a magn. téren

$$\begin{aligned} \bar{E} &= -\mu B + \beta (\mu B) \\ \bar{E} &= -\bar{m}_z \cdot B \end{aligned} \quad \left. \right\} \boxed{\bar{m}_z = \mu \tanh(\beta \mu B)}$$

a magneses mom. változó értéke

ez függ a $\beta \mu B$ -től!



$\tanh \approx 1$

$\times \gg 1$

nagy magn.
ter esetén a spin
beall a magn. térré irányába

ha $B=0 \rightarrow$ a két áll. energián
nem különbözik \rightarrow nincs val. el.
fordulnak el"

hatások:

$$\frac{\mu B}{k_B T} \gg 1 \quad \bar{m}_z \approx \mu$$

$$\frac{\mu B}{k_B T} \ll 1 \quad \bar{m}_z \approx \frac{\mu^2 B}{k_B T}$$

Susceptibilitás:

$$\overline{m}_z = X \cdot B \quad (B \rightarrow 0)$$

$$X = \frac{\mu^2}{k_B T}$$

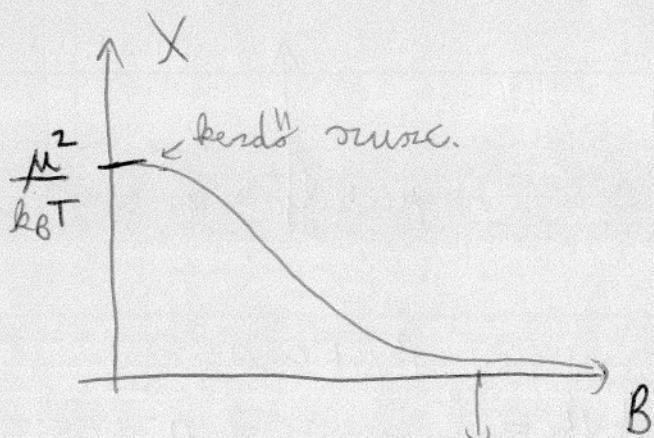
→ minden nagyobb T , annál kisebb a susc.

↑ Curie-törvény ($\frac{1}{T}$ minden időben.)

(kereső susceptibilitás)

áll. definíció:

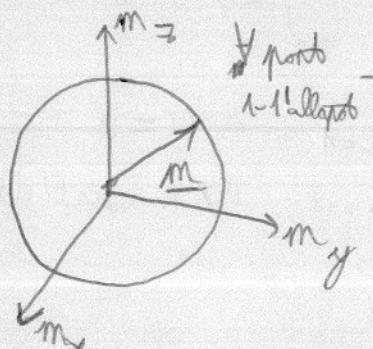
$$X = \left(\frac{\partial \overline{m}_z}{\partial B} \right)_T = \mu \cdot \frac{1}{(k_B (\beta \mu B))^2} \cdot \frac{\mu}{k_B T} = \frac{\mu^2}{k_B T} \cdot \frac{1}{(\text{ch}(\frac{\mu B}{k_B T}))^2}$$



telítődik a rendszer

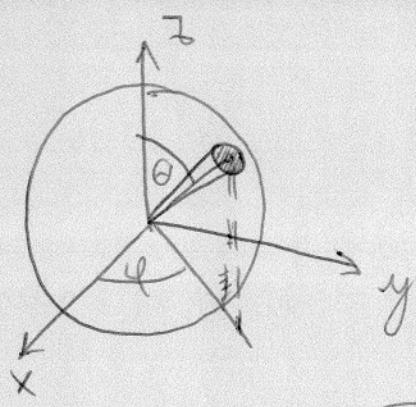
6) Klasszikus mágneses momentum:

\underline{m} → mágneses vektor $|m| = \mu$

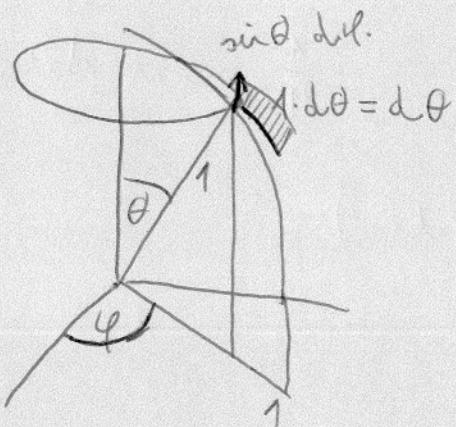


$m_z = \underline{m} \cdot \hat{n}$ \hat{n} ponti irányba → fázisbeli: többi irányba megfordí

~~az~~ kis felületdarabokra osztjuk a gömbfelületet



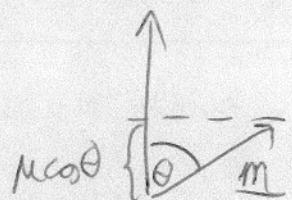
$$dR = \sin \theta d\theta dr$$



$f(R) dR \rightarrow$ valóz. százeg

$$F = -m \underline{B} = -m_z B = -\mu \cos \theta$$

legyen $\underline{B} \parallel \underline{z}$



$$f(R) dR = \frac{e^{-\beta(-\mu \cos \theta)}}{Z} dR = \frac{e^{\beta \mu B \cos \theta}}{Z} dR$$

a val.-e, hogy dR térségén
lesz μ végpontja (ez ~~hossz.~~ meg az energiat)

$$\text{Z normaláisi tény.: } Z = \int dR e^{\beta \mu B \cos \theta} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \theta e^{\beta \mu B \cos \theta} =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 dx e^{\beta \mu B x} = 2\pi \cdot \left[\frac{e^{\beta \mu B x}}{\beta \mu B} \right]_{-1}^1 =$$

$$= \frac{e^{\beta \mu B} - e^{-\beta \mu B}}{\beta \mu B} \cdot 2\pi = 4\pi \frac{e^{\beta \mu B}}{\beta \mu B} - 54$$

$$\theta = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \cos \theta = x$$

$$\theta = \pi \Rightarrow x = -1 \quad dx = -\sin \theta d\theta$$

$$\bar{E} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left[\ln(\text{th}(\beta \mu B)) - \ln(\beta \mu B) + \ln 4\pi \right] =$$

$$= -\frac{\text{ch}(\beta \mu B)}{\text{sh}(\beta \mu B)} \cdot \mu B + \frac{1}{\beta \mu B} \mu B$$

$$\bar{E} = -\mu B \left(\text{coth}(\beta \mu B) - \frac{1}{\beta \mu B} \right) = -\bar{m}_z \cdot B$$

$$\bar{m}_z = \mu \cdot \left[\text{coth}(\beta \mu B) - \frac{1}{\beta \mu B} \right] = \mu L(\beta \mu B)$$

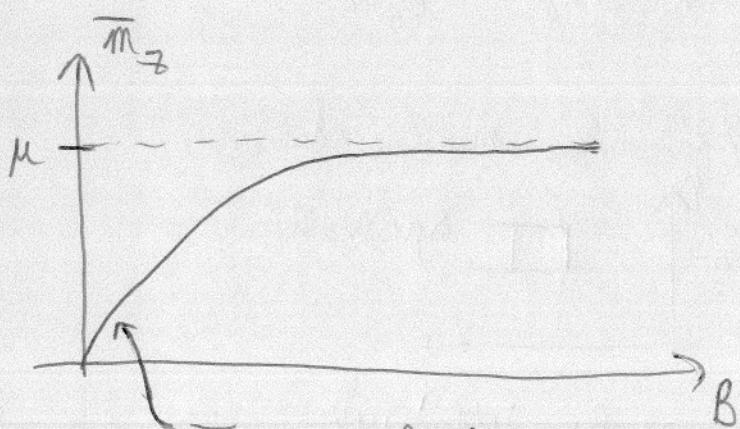
Langevin - fv.
[klassöver]

$$L(x) = \text{coth} - \frac{1}{x}$$

$$x \ll 1 \quad \text{coth } x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + \dots$$

$$L(x) \approx \frac{x}{3}$$

$$x \gg 1 \quad \text{coth } x \approx 1 \quad L(x) \approx 1$$



$$\bar{m}_z \approx \mu \frac{B \mu B}{3} = \frac{\mu^2}{3k_B T} \cdot B$$

$X = \frac{\mu^2}{3k_B T}$ klassiskusval $\frac{1}{3}$ mons a kvantumosor körös

7. öra

1) T hőm., könyezetben, egysélyben

- n-ik energianálás (E_n) $P_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n}$, ahol $\beta := \frac{1}{k_B T}$ $Z := \sum_n e^{-\beta E_n}$
- $E = \sum_n P_n E_n = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} \cdot E_n = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$

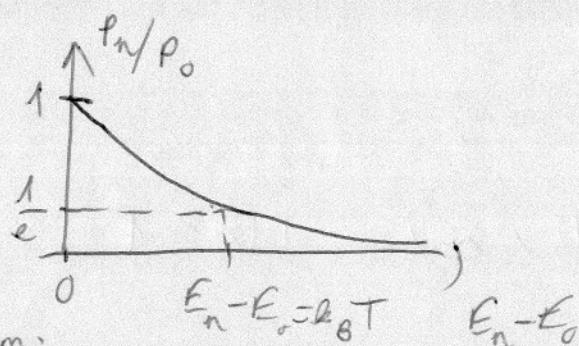
"lokális": $C = \frac{\partial E}{\partial T}$

- pl. $1\text{eV} = k_B T$
- $1\text{eV} = 1 \cdot \frac{3}{C_B} \cdot 1,6 \cdot 10^{19} \text{J} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{J}$ $\frac{1\text{eV}}{k_B} = 11600 \text{K}$

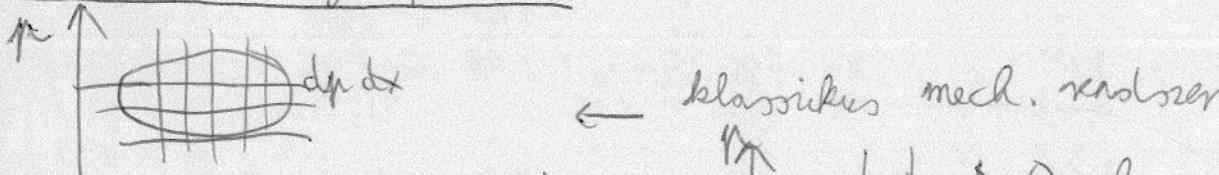
karakteristikus energia: $k_B T$ $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$

- pl. működés: $T = 293 \text{ K}$ $k_B T = 4 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,025 \text{ eV}$

$$\frac{P_n}{P_0} = e^{-\beta(E_n - E_0)}$$



2) Folytonos energiaspektrum:



← klasszikus mech. rendszer

stádiumok
felosztás
kis celluláris
atartományok
→ sejtek integrálunk

- Hamilton-fv. (energia)

is xel impulzus
inverszor
széférme

$$Z := \frac{1}{\lambda} \int d\mathbf{p} dx e^{-\beta H(p, x)}$$

$$P = \frac{\frac{dp}{dx} e^{-\beta E(n,x)}}{Z}$$

• A szabadsgági fórum általánosítva:

$$P = \frac{\frac{dp}{dx} e^{-\beta E(n,x)}}{Z} \quad Z = \int \frac{dp}{dx} e^{-\beta E(n,x)}$$

a) pl. klasszikus lin. oscillator

$$f = -\alpha \quad u(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}x^2 \quad D = m\omega^2$$

$$Z = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\beta \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right)} = \textcircled{*}$$

↑
nagy p-re és x-re → nagyon
kis x-re → csak nem befolyásolja az
eredményt, ha eztleg ≈ 0 van egy maximális p és x
→ az ennek növekedésére vett $\int \approx 0$, így hozzáadhatjuk

$$\textcircled{*} = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-\frac{p^2}{2m}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{\beta m\omega^2 x^2}{2}} = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\pi}{(\beta/2m)}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{(\beta m\omega^2/2)}} =$$

$$= \frac{1}{h} \frac{2\pi}{\beta\omega} = \frac{1}{\beta\hbar\omega}$$

$$\overline{E} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = + \frac{\partial}{\partial \beta} \underbrace{\ln(\beta h w)}_{\text{konst}} = \frac{1}{\beta} = k_B T$$

Trükk $\rightarrow \ln \beta + \underbrace{\ln h w}_{\text{konst}}$

$$C = \frac{\partial \overline{E}}{\partial T} = k_B$$

$\hookrightarrow x = r$:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{\beta m w^2}{2} x^2} \cdot x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{\beta m w^2}{2} x^2} = 0 \end{aligned}$$

$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{\beta m w^2}{2} x^2}}_{\text{parabola}} = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\beta m w^2}{2} x^2} dx$$

kiezik

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{\beta m w^2}{2} x^2} \leftarrow \text{norm. tényező}$$

$$\frac{\bar{x^2}}{\bar{x}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{\beta m w^2}{2} x^2} \cdot x^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{\beta m w^2}{2} x^2}} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta m w^2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{\beta m w^2}}} = \frac{1}{\beta m w^2} = \frac{k_B T}{m w^2}}$$

$\sqrt{\bar{x^2}} = \text{tipikusan milyen messze van az origótól}$

$$\text{Moz.: } \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2} x^2 = -\frac{1}{da} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{1}{a}$$

ha egy makroskopikus

mag testet viszünk,

$k_B T \ll m w^2 \Rightarrow$ nyugalmban lesz

DE mikroskopikus testeknél a homokszettség növegni fog !!

$$\overline{u(x)} = \frac{1}{2} m w^2 \bar{x^2} = \frac{k_B T}{2}$$

b) harmonik p-x:

$$\bar{p} = 0$$

$$\bar{p}^2 = \frac{m}{\beta} = m k_B T$$

$$K = \frac{\bar{p}^2}{2m} = \frac{k_B T}{2}$$

b) w frekvensiyel kvantum-oscillator:

$$E_n = \cancel{\hbar \omega} + \hbar \omega (n + \frac{1}{2}) \quad n=0,1,2,\dots$$

$$z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega (n + \frac{1}{2})} = e^{-\frac{\beta \hbar \omega}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega n} = \cancel{0}$$

geometriai sz:

$$q = e^{-\beta \hbar \omega} \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{ha } |q| < 1$$

$$\cancel{0} = e^{-\frac{\beta \hbar \omega}{2}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\cancel{\beta \hbar \omega}}}$$

$$\ln z = -\frac{\beta \hbar \omega}{2} = -\ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \pi$$

$$\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln z = \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{-e^{-\beta \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} \cdot (-\hbar \omega)$$

$$\begin{array}{l} \bar{E} = \frac{\hbar \omega}{2} + \frac{\hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}, \text{ másik eljárás: } \\ \cancel{\bar{E}} = \frac{\cancel{\chi \operatorname{ch}(\frac{\beta \hbar \omega}{2})}}{\cancel{\chi \operatorname{sh}(\frac{\beta \hbar \omega}{2})}} = \frac{\hbar \omega}{2} = \end{array}$$

$$\leftarrow \ln z = -\ln \left(2 \operatorname{sh} \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right) = \frac{1}{2 \operatorname{sh} \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\hbar \omega}{2} \operatorname{cth} \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right)}}$$

$$E_n = \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega(n) \quad \leftrightarrow \quad \bar{E} = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

$\pi = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$: Műleges vagyadik energiaszinten tartózkodik a test

$$C = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = \hbar\omega(-1) \frac{e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} \cdot \hbar\omega \left(-\frac{1}{k_B T^2} \right) \quad \leftarrow \beta = \frac{1}{k_B T}$$

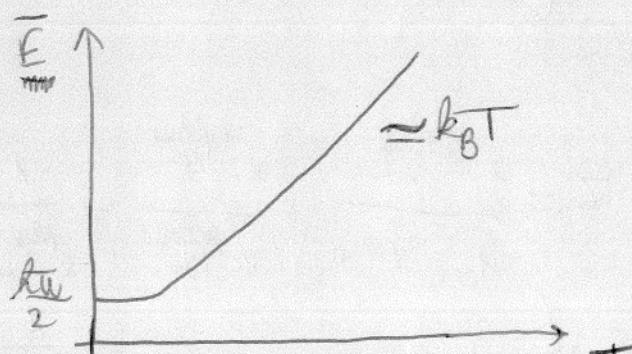
$$\underline{C = \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)^2 \frac{e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} k_B}$$

dimensionthon C természetes egysége k_B

masik módon:

$$(C\hbar x)' = \frac{1}{-\partial x^2} \rightarrow C = \frac{\hbar\omega}{2} (-1) \frac{\frac{\hbar\omega}{2} \left(-\frac{1}{k_B T^2} \right)}{\partial x^2 \left(\frac{\beta\hbar\omega}{2} \right)} = \\ = \underline{k_B \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)^2 \frac{1}{4 \partial x^2 \left(\frac{\beta\hbar\omega}{2} \right)}}$$

↳ elemzés (grafikon felírásához):



$$\frac{\hbar\omega}{k_B T} \quad k_B T \ll \hbar\omega \\ (\beta\hbar\omega \gg 1)$$

$$\downarrow \\ \bar{E} \simeq \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}} + \dots$$

ha $k_B T \gg \hbar \omega$ ($\beta \hbar \omega \ll 1$) \rightarrow energia = nagy lesz, de legyen?
 ↴ sajnos

$$e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} = 1 + \beta \hbar \omega + \frac{1}{2} (\beta \hbar \omega)^2$$

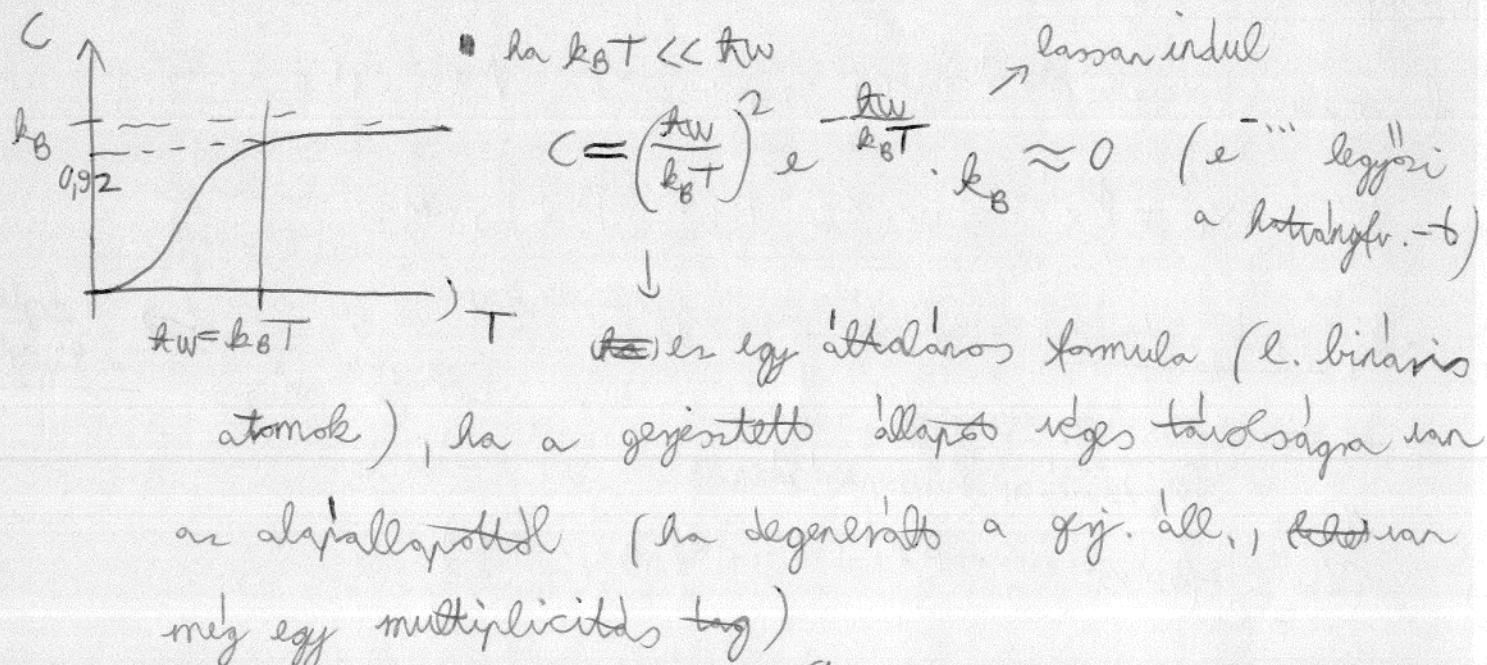
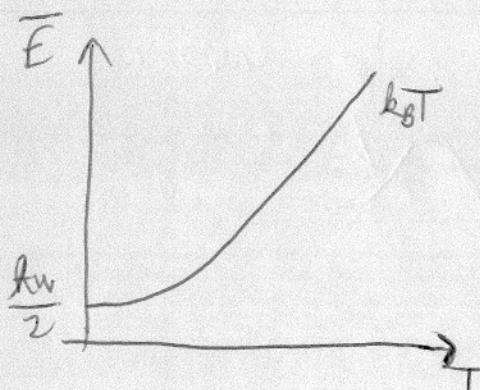
$$e^{\frac{1}{\beta \hbar \omega}} - 1 \approx \frac{1}{\beta \hbar \omega}$$

$$\bar{E} = \frac{\hbar \omega}{2} + \underbrace{\frac{\hbar \omega}{\beta \hbar \omega}}_{\frac{1}{\beta} = k_B T} \approx k_B T \sim \text{lineáris}$$

← legyenek kaptak
klasszikusan

↑ ha $k_B T \gg \hbar \omega$
sz energiasztárok
 $k_B T$ intervalumon

↓
~ folytonos eloszlás



ha $k_B T \gg \hbar w$

$$\frac{(k_B)^2}{(k_B T)^2} \frac{1}{(\beta \hbar w)^2} k_B \approx C$$

klasszikus er. $C = k_B$

$$C \mid_{\hbar w = k_B T} = k_B \frac{e}{(e-1)^2} = 0,92$$

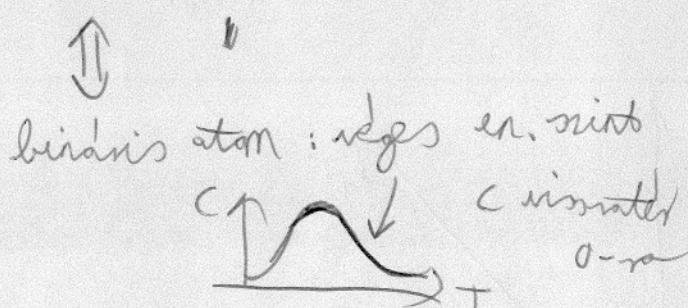
$\hbar w = k_B T \rightarrow$ ekkor tudjuk gijesszük a rendszeret
(addig igazabban nem \rightarrow kicsi a hőmag, nem ragyon
tudunk átadni a rendszerek energiáját)

ha nagy az energia \Rightarrow ~ energiaszint van, ekkor is
tudunk energiát átadni, de C-telítődik

fürdő

lin. oscill. nál a

klasszikus közelítés jó ✓



3) Ekipartitio tétel

• f szab. fokú rendszer, $x_1, \dots, x_f, p_1, \dots, p_f$

• ha $H = \alpha x_1^2 + H' (x_2, \dots, x_f, p_1, \dots, p_f)$, azaz

• x_1 negyzetesen szerepel az egyik tagban $\rightarrow x_1$ fölfelé a többi

• a többi másik tag H'-ban az összes többi tagg
a függetlenleg mint separálódhat

$$\Rightarrow e^{-\beta H} = e^{-\beta \alpha x_1^2} \cdot e^{-\beta H' (x_2, \dots, x_f, p_1, \dots, p_f)}$$

$$\overline{\alpha x_1^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \alpha x_1^2 e^{-\beta \alpha x_1^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 e^{-\beta \alpha x_1^2}} = \alpha \frac{1}{2\beta\alpha} = \frac{k_B T}{2}$$

ha a feltételek teljesülnek, akkor $\overline{x_1^2} = \frac{k_B T}{2}$

• ha

$$R = \exp(-\epsilon p_1^2 + \epsilon l^1(x_1 \dots x_f) p_2 \dots p_f)$$

$$\Rightarrow \overline{\alpha p_1^2} = \frac{k_B T}{2}$$

\Rightarrow ha egy koordináta/impulusz négyzetén reagál H-ban, a többivel függetlenül $\Rightarrow \frac{k_B T}{2}$ energia jut az adott szab. felra

- pl. $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

$$\overline{E} = \frac{k_B T}{2} + \frac{k_B T}{2} = k_B T \quad \leftarrow \text{azat kaptak előbb is}$$

- szabad testek molhöje:

$\hookrightarrow 3N$ független harmonikus rezgés a vibrációkban

tfa.

\leftarrow az atomok függetlenül rezgnak, 3 irányban

$$\overline{E} \approx 3N \cdot k_B T \quad C = 3Nk_B$$

$$\text{molhö: } C_{\text{mol}} = \underbrace{3N_A}_{R} k_B = 3R$$

\hookrightarrow a modell hiba:

• ~~az atomok nem függetlenül rezgnak~~, ott. ban 1 modusan az összes atom reagál játszik



\Rightarrow rezesszi módszer néma:

3 transláció, ami nem rezess } merev test

3 fogás, - II - mágnesek

a többihez az atomok távolsága meghatározik

$$3N-6 \approx 3N, ha N \text{ nagy}$$

az a rezesszi módszernak elterjedt ^{teljesíti} ~~ezredik~~ művek

lásd a másik részeken művek az energiasűrűségek,

DE ha $k_B T \gg \Delta E$, ez nem igazán működik (folytonos

körülítés $\rightarrow \frac{k_B T}{2}$ jobb akkor is mindegyikre)

$\hookrightarrow \Rightarrow$ Dulong - Petit - Szilády \leftarrow (szabály: nem mindenben tökéletes)

$$C_{\text{mol}} = 3R, R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} = 1,986 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}}$$

$$C_{\text{mol}} = 25 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} = 6 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}}$$

pl.:

fémek

$$\text{N}u \approx 6,7 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}}$$

$$\text{Al} \approx 5,8$$

$$\text{Fe} \approx 6,2$$

$$\text{Cu} \approx 5,8$$

$$\text{Tg} \approx 6,0$$

\uparrow
előkészítés

pl. más nélküli
művek (magneses, ...)

vigetés

$$C(\text{grafit}) \approx 2,6 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}}$$

$$C(\text{gyanta}) \approx 1,4 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}}$$

$$\text{Si} \approx 5,2$$

\uparrow

$$< 6 \leftarrow \Delta E \cancel{>} k_B T$$

nem teljesül (első kötés)

\Downarrow
nagy W)

- elromoltat akkor is, ha a zérés anharmonikus (pl. nagy kitérők)

8. óra

1 atomos ideális gáz:

$$\text{ekipartitcio: } R = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}$$

T hőmérséklettel összefügg a gáz több atomja

$$\text{egy atom: } \bar{\Sigma} = 3 \frac{k_B T}{2}$$

átlagos energiája

$$\text{egész gáz: } \bar{E} = N \cdot \bar{\Sigma} = N \cdot \frac{3}{2} k_B T \quad \text{molhoz: } C_V = \frac{3}{2} N_A \cdot k_B = \frac{3}{2} R$$

$$C_V \approx 3 \text{ cal/mol K}$$

$$R = 1,986 \frac{\text{cal}}{\text{mol K}} \times 2 \frac{\text{cal}}{\text{mole}}$$

$$\text{He } 3,01 \text{ cal/mol K}$$

$$\text{Ne } 3,03 \quad - \text{II} - \quad (\text{szabadhőmérsékleten})$$

$$\text{Kr } 2,96 \quad - \text{II} -$$

2 atomos ideális gáz

merre változó modell



$$\frac{1}{2} \frac{p^2}{m} + \frac{1}{2} \theta (w_1^2 + w_2^2)$$

p: TKP impulusa

m: molekulatömege

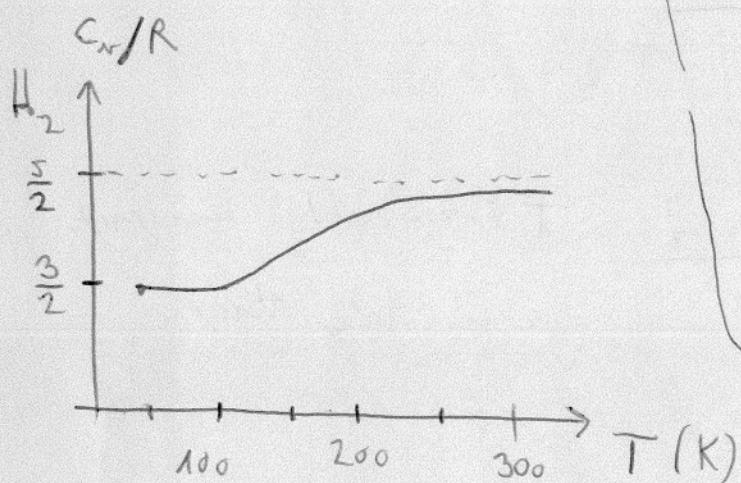
szabadlású fok: 5

3 2
TKP longíoskal kapcsolatos
morgás

$$\text{ekipartitcio: } \Rightarrow 3+2 \quad \bar{\Sigma} = (3+2) \frac{k_B T}{2} \quad \bar{E} = N \cdot \bar{\Sigma}$$

$$\hookrightarrow \text{molhoz: } C_V = \frac{5}{2} N_A \cdot k_B = \frac{5}{2} R \approx 5 \text{ cal/mol K}$$

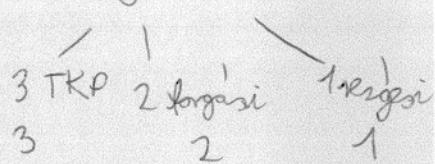
H_2	4,19 cal/moleK	
N_2	4,96 cal/moleK	
O_2	5,01	-



Pontosabb modell (2 atoms molekulára):

Fizikaiabban vonatkozik a rezgésre is:

rezgék: mű. fokok: 6

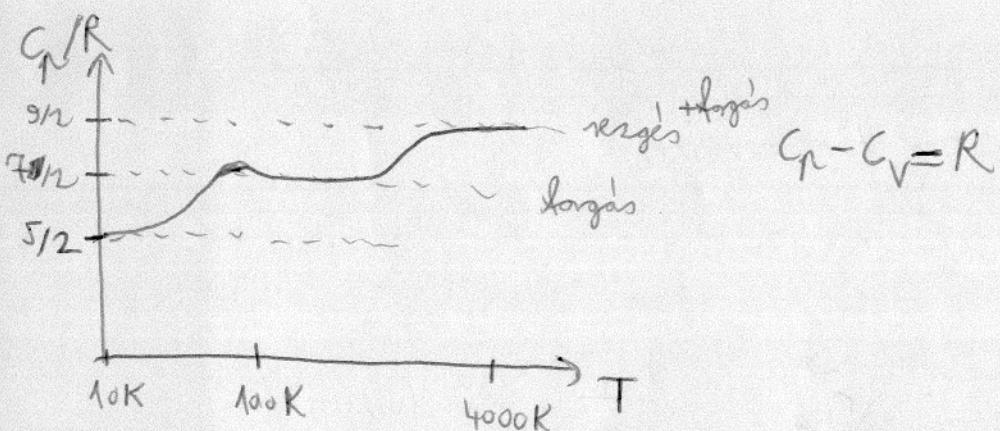


$$H = \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{M} + \frac{1}{2} \Theta (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{2\mu} + \frac{1}{2} k(\Delta\ell)^2$$

μ : redukált tömeg M : össztömeg

$$\bar{\epsilon} = \frac{7k_B T}{2} \quad E = N \cdot \bar{\epsilon} \quad C_V = \frac{7}{2} R \approx 7 \frac{\text{cal}}{\text{moleK}}$$

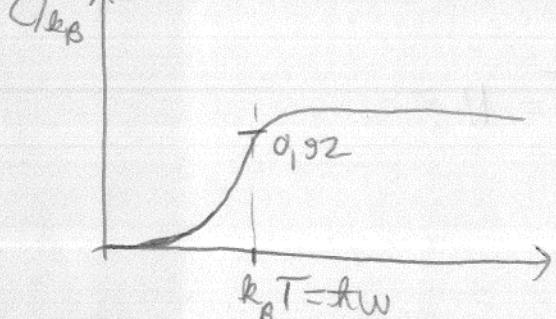
"maradványi fokok belépése": alacsony hőmérsékleteken
a forgási műb. fokok megnőnek



HD \leftarrow a H_2 -ben az egysik atomot deuteriumra cseréljük

Mitől függnek le a műb. fokok?

oscillátor hőkapacitása (l. előző lira)



$$\frac{k_B T}{\hbar \omega} = 0,1$$

$$\frac{C}{k_B} = 0,0045$$

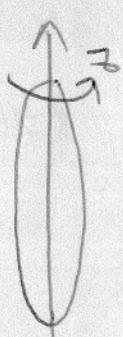
$$C = k_B \left(\frac{\hbar \omega}{k_B T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}}}{\left(e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1 \right)^2}$$

ha $k_B T \ll \hbar \omega$, az elvártatott tétel már nem érvényes,
(nem jól közelít) erős "fagynak be" ezek a rezab. fokok

↓
ha a rezséges frekvencia nagy bárhol kicsi, kvantálás
lesz az energia (l. előző írás)

hasonlóan forgatra:

forgó mágnes elemi kvantálása



$$\text{forgási energia: } \frac{1}{2} \Theta \omega^2 = \frac{L_z^2}{2\Theta}$$

$$L_z = \Theta \omega$$

↑
imp. momentum
(nyomaték)

Bohr-féle kv. feltétel:

$$L_z = \hbar m \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

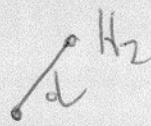
$$0, \frac{\hbar^2}{2\Theta}, \frac{\hbar^2}{2\Theta} \cdot 4, \dots$$

nagy energiákra $\cancel{k_B T} \gg \frac{\hbar^2}{\Theta} \rightarrow$ klasszikus közelítés

kis — — : $\frac{\hbar^2}{\Theta} \lesssim k_B T \rightarrow$ kvantum leírás

nincs gerjesztés: $\frac{\hbar^2}{\Theta} \gg k_B T$ (az ellenőriztethetően leírja el → befolyásolja a függetlenséget)

$$\frac{k^2}{\theta} \text{ kezelése } H_2\text{-re:}$$



$$d \approx 10^{-10} \text{ m}$$

$$m_H \approx 1,7 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$$

$$\theta = 2 m_H \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{m_H d^2}{2}$$

$$\theta \approx 8,5 \cdot 10^{-148} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\hbar = 1 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$\frac{k^2}{\theta} \approx 1,2 \cdot 10^{-21} \text{ J} \rightarrow \frac{k^2}{\theta} \cdot \frac{1}{k_B} = 87 \text{ K}$$

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

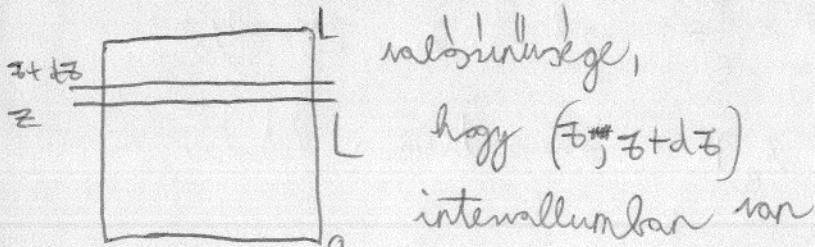
nagyjáradék jól kezelés a
mag. fokok befolyására (~~ellenére~~)

Gáz hőszeregi erőterben:

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgz$$

$$e^{-\beta H} = e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \cdot e^{-\beta mgz}$$

az impulusz és a magasság
szinti eloszlás növekvő
~~erősség~~



norm

$$C \cdot e^{-\beta mgz} dz$$

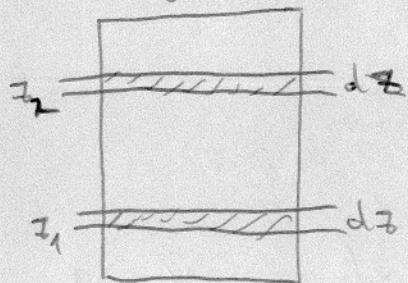
$$C \int_0^L e^{-\beta mgz} dz = 1$$

$$\int_0^L e^{-\beta mgz} dz = \left[\frac{e^{-\beta mgz}}{-\beta mg} \right]_0^L = \frac{1}{\beta mg} (1 - e^{-\beta mgL}) = C^{-1}$$

Hány atom van $(z_1, z_1 + dz)$ intervalumban?

$$\frac{N(z_1 dz)}{N} = C \cdot e^{-\beta mgz_1} \cdot dz$$

2 rétegből használva:



$$\frac{N(z_1 dz)}{N(z_2 dz)} = e^{-\beta mg(z_1 - z_2)}$$

Kolloid részecskék folyadékkal

(1-500 nm)

ülepedési (sedimentáció) egyszerű

effektív ~~légnyomás~~: $\frac{4\pi}{3} r^3 (\rho - \rho_0) = \mu$

(felhalványulás kompenzált)

↑ folyadék színleg

$$\frac{N(z_1 dz)}{N(z_2 dz)} = e^{-\frac{\mu g(z_1 - z_2)}{k_B T}}$$

(Perrin, 1909) → mikroskopon a kolloid-foly. oslop egyes részei elnevezésekkel, a megrámlottak a részecskék:

minimálisan $k_B T$ meg tudtak határan

Közösök a termodinamikával:

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} \quad \bar{E} = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{\sum_n e^{-\beta E_n} \cdot E_n}{\sum_n e^{-\beta E_n}} = - \frac{\frac{\partial Z}{\partial \beta}}{Z}$$

$$\bar{E^2} = \frac{\sum_n e^{-\beta E_n} E_n^2}{\sum_n e^{-\beta E_n}} = \frac{\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}}{Z}$$

$$\overline{\Delta E^2} = \overline{(E - \bar{E})^2} = \bar{E^2} - \bar{E}^2$$

$$\overline{\Delta E^2} = \frac{\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2}}{Z} - \frac{\left(\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)^2}{Z^2} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\frac{\partial Z}{\partial \beta}}{Z} \right) = - \frac{\partial \bar{E}}{\partial \beta} = - \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \beta} =$$

$$C \sim N \quad = k_B T^2 \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = k_B T^2 C$$

$$\overline{\Delta E^2} \sim N \quad \beta = \frac{1}{kT} \quad T = \frac{1}{k\beta} \quad \frac{\partial T}{\partial \beta} = -\frac{1}{k\beta^2} = -k_B T^2$$

↓
átlagos érték
tipikus eltérés

relatív százalék: $\frac{\overline{\Delta E^2}}{\bar{E}} \sim \frac{\sqrt{N}}{N} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$

átlagos való tip. eltérés
az átlaghoz visz. -va

→ nagy N-r es kicsi
(↳ minden atom E

energiáj), nem méhetünk
máss)

pl. 1 atoms id. gáz: $\bar{E} = \frac{3}{2} N k_B T$

$$C = \frac{3}{2} N k_B$$

$$\overline{\Delta E^2} = k_B T \cdot \frac{3}{2} \cdot N k_B$$

$$\frac{\overline{\Delta E^2}}{\bar{E}^2} = \frac{\frac{3}{2} N k_B k_B T}{\left(\frac{3}{2} N k_B T\right)^2} = \frac{1}{\frac{3}{2} N} = \frac{2}{3N}$$

Bináris atomok rendszere

• "Lemma":

$$\textcircled{1} \quad E_m^{(A)} \quad (m=0,1,2,\dots) \quad \textcircled{2} \quad E_n^{(B)} \quad (n=0,1,2,\dots) \quad \rightarrow A \text{ és } B \text{ részrendszerek}$$

$$Z_{AB} = \sum_{m,n} e^{-\beta(E_m^{(A)} + E_n^{(B)})} = \underbrace{\sum_m e^{-\beta E_m^{(A)}}}_{e^{-\beta E_m^{(A)}}} \cdot \underbrace{\sum_n e^{-\beta E_n^{(B)}}}_{e^{-\beta E_n^{(B)}}} = Z_A \cdot Z_B$$

össenergia: $E_m^{(A)} + E_n^{(B)}$

↓

Független rendszerek állapotösszeg összesszámolás!

$$\overline{\overline{1}} \quad \overline{\overline{2}} \quad \overline{\overline{3}} \quad \dots \quad \overline{\overline{N}} + \varepsilon \quad -\varepsilon$$

$$Z = \underbrace{(e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon})^N}_{1 \text{ atom állapotösszeg}} = (2 \operatorname{ch}(\beta\varepsilon))^N$$

^{megj:}
 (akkor azt nem lgy számolunk, mert $e^{-\beta\varepsilon}$ pont a bináris atomkészlet jött ki)

$$\overline{\overline{E}} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial}{\partial \beta} N \ln(2 \operatorname{ch}(\beta\varepsilon)) = -N \cdot \varepsilon \operatorname{th}(\beta\varepsilon)$$

^(ha T adott)

• zart rendszereknek tékinthető: össenergia adott, T ettől függetlenül lesz

$$S = N \cdot k_B \left(-\frac{1+x}{2} \ln \frac{1+x}{2} - \frac{1-x}{2} \ln \frac{1-x}{2} \right), \quad x = \frac{E}{N\varepsilon}$$

$$S = N k_B \left(-\frac{N_+}{N} \ln \frac{N_+}{N} - \frac{N_-}{N} \ln \frac{N_-}{N} \right) \quad \frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$$

$$\frac{N_+}{N} = \frac{e^{-\beta E}}{e^{-\beta E} + e^{\beta E}} = \frac{e^{-\beta E}}{2 \ln(\beta E)}$$

$$\frac{N_-}{N} = \frac{e^{+\beta E}}{e^{-\beta E} + e^{\beta E}} = \frac{e^{\beta E}}{2 \ln(\beta E)}$$

S , mit T függende:

$$S = N k_B \left[- \underbrace{\frac{e^{-\beta E}}{2 \ln(\beta E)} \ln \left(\frac{e^{-\beta E}}{2 \ln(\beta E)} \right)}_{-\beta E - \ln(2 \ln(\beta E))} - \underbrace{\frac{e^{\beta E}}{2 \ln(\beta E)} \ln \left(\frac{e^{\beta E}}{2 \ln(\beta E)} \right)}_{\beta E - \ln(2 \ln(\beta E))} \right] =$$

$$= N k_B \left[\frac{\beta E \cdot e^{-\beta E}}{2 \ln(\beta E)} - \frac{\beta E \cdot e^{\beta E}}{2 \ln(\beta E)} + \frac{e^{-\beta E} \ln(2 \ln(\beta E)) + e^{\beta E} \ln(2 \ln(\beta E))}{2 \ln(\beta E)} \right]$$

$$= N k_B \left[-\beta E \cdot \frac{2 \ln(\beta E)}{2 \ln(\beta E)} + \ln(2 \ln(\beta E)) \right] = - \frac{N \ln(2 \ln(\beta E))}{T} + N k_B \cdot \frac{E}{T}$$

$$\cdot \ln(2 \ln(\beta E)) = \frac{E}{T} + k_B \cdot \ln Z$$

$$\overline{S}(T) = \frac{\overline{E}}{T} + k_B \cdot \ln Z$$

$$-k_B T \ln Z = \overline{E} - T \cdot \overline{S}(T) = F \quad \text{zahldenergia}$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}(k_B T \ln Z) = k_B \ln Z + k_B T \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial T} =$$

$$= k_B \ln Z + \frac{E}{T}$$

↓

Mindig, hogy zárt rendszerekben (álló össen.) vagy állandó hőmérsékletűkben kezlek a bináris atomok rendszereit, az állapotjelzők megvárosak!

Áll.: az -II- más (foton.) rendszere is megvárosnak a keleletekkel összefügg.

Fundamentális összefüggés: (Termodyn.-beli tudnivalók)

$$dF = -S dT - p dV + \mu dN$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = -S$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = -p \quad \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = \mu$$

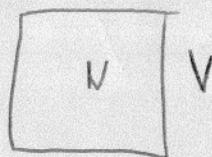
ideális gázra a szabad energiahoz ki tudnunk működni más
 \Rightarrow állapotjegyei letek

9. óra

1) Klasszikus ideális gáz

(szabad energia)

$$F = -k_B T \cdot \ln Z$$



$$\Delta F = -SdT - p\Delta V + \mu\Delta N$$

csökken. energia van

1 részecske állapotfösszeg: $\xi = \frac{1}{h^3} \int d^3p \delta_{\text{r}} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} = \frac{V}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{p} \delta_{\text{r}} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}$

normaliz.

$$e^{-\beta \frac{p_x^2}{2m}} \cdot e^{-\beta \frac{p_y^2}{2m}} \cdot e^{-\beta \frac{p_z^2}{2m}} =$$

$$= \frac{V}{h^3} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dp_x e^{-\beta \frac{p_x^2}{2m}} \right)^3 = \frac{V}{h^3} \left(\frac{\pi}{(\beta/2m)} \right)^{3/2} = V \cdot \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2}$$

gáz (N részecské): az állapotfösszék összeszedváka:

$$Z = \xi^N \quad F = -k_B T \cdot \ln Z = -Nk_B T \cdot \ln \xi = -Nk_B T \ln \left[V \cdot \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \right]$$

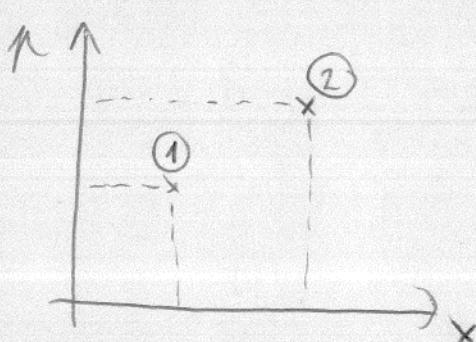
→ log van, mert nem extenzív mennyiségek kapunk

$$(2 \times N, 2 \times V \neq 2 \times F)$$

↓ 4xF jött ki

(Gibbs-paradoxon) → $\frac{1}{N!}$ kell

megkülönbségettetlen arányos részecskék (kvantummechanika)



→ ① és ② részecske felcserélése nem külön állapot!

mi viszont klasszikus leíráshoz nem voltuk figyelembe

(Korespondencia):

- helyes módon: $\Xi = \frac{1}{N!} \xi^N$

$$F = -k_B T \ln \Xi = -N k_B T \ln \xi + k_B T \ln N!$$

↳ termodynamikai határokkal:

$$F = -N k_B T \ln \xi + k_B T \cdot (N \ln N - N)$$

$$F = -N k_B T \left(\ln \frac{\xi}{N} + 1 \right) = -N k_B T \left(\ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \right] + 1 \right)$$

extensív!

ha megduplázom a rendszert
($V_1 N \rightarrow 2x$), $\frac{V}{N}$ nem változik

$$\underline{\underline{p}} = \left. \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right) \right|_{T, N=\text{all}} = N k_B T \cdot \frac{\partial}{\partial V} \ln V = N k_B T \cdot \underline{\underline{\frac{1}{V}}}$$

$$\underline{\underline{S}} = \left. \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right) \right|_{N, V=\text{all}} = N k_B \left(\ln \left(\frac{\xi}{N} \right) + 1 \right) + N k_B T \underbrace{\frac{\partial}{\partial T} \ln \left(\frac{3}{2} T \right)}_{= \frac{3}{2} \frac{1}{T}} \ln \left(\frac{3}{2} T \right)$$

$$\underline{\underline{S}} = N k_B \left(\ln \frac{\xi}{N} + 1 + \frac{3}{2} \right) = N k_B \left(\ln \frac{\xi}{N} + \frac{5}{2} \right) = N k_B \left(\ln \left(\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \right) + \frac{5}{2} \right)$$

$$\underline{\underline{\mu}} = \left. \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right) \right|_{T, V} = \cancel{-N k_B T} - k_B T \left(\ln \frac{\xi}{N} + 1 \right) + N k_B T \underbrace{\frac{\partial \ln N}{\partial N}}_{= \frac{1}{N}} = -k_B T \ln \frac{\xi}{N}$$

$$\boxed{e^{-\frac{\mu}{k_B T}} = \frac{\xi}{N}}$$

2) a klasszikus leírás eredményeiről

delymérés pontatlansága: Δx
 impulsusmérés - II - : Δp

$$\Delta p \Delta x > h$$

$$R = \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$$

↳ 1 részecskére jutt "tartományhoz"
 1 részecské
 jutt Hilfsges

$R \gg \Delta x > \frac{h}{\Delta p}$: esikor külön látom a részecskéket

$$\Delta p \ll \hbar T$$

jellemző impulsus: $\frac{\hbar^2}{2m} := k_B T$ (elvárt, reális $\frac{k_B T}{2}$
 lenne, de mi csak nagyobbra lefelé
 megnézni adni)

$R \gg \Delta x > \frac{h}{\Delta p} \gg \frac{h}{\hbar T} = \frac{1}{\lambda_T}$ termikus de-Broglie -
 hullámhoz

$$\underline{R \gg \lambda_T}$$

(A részecskék átlagos hullámsága legyen sokkal nagyobb,
 mint a részecskék de-Broglie hullámhoza)

$$\Rightarrow R^3 \gg \lambda_T^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{V}{N}} \gg \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2m k_B T}}\right)^3 = \left(\frac{\lambda^2}{2m k_B T}\right)^{3/2}$$

- 46 -

$$\frac{V}{N} \left(\frac{2m k_B T}{\pi^2} \right)^{3/2} \gg 1$$

klassikus leírás feltétele

- adott T esetén N -nek bizonyk bell lenne \rightarrow
 \rightarrow bisztró
- adott "színű" esetben máras hőmérséklet kell

p. H_2 gáz $273 K$ $10^5 N/m^2$

$$\frac{V}{N} = \frac{k_B T}{\pi} \quad m_{H_2} = 2m_p = 2 \cdot 1,7 \cdot 10^{-24} \text{ kg}$$

$$\frac{k_B T}{\pi} \left(\frac{2m k_B T}{\pi^2} \right)^{3/2} \approx \quad \hbar = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

$$\approx 16550$$

(O_2 gáz $\rightarrow m_{O_2}$ nagyobb \rightarrow meg klasszikusabb)

$$e^{-\frac{\mu}{k_B T}} = \frac{1}{N} \sum = \frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m k_B T}{\pi^2} \right)^{3/2}$$

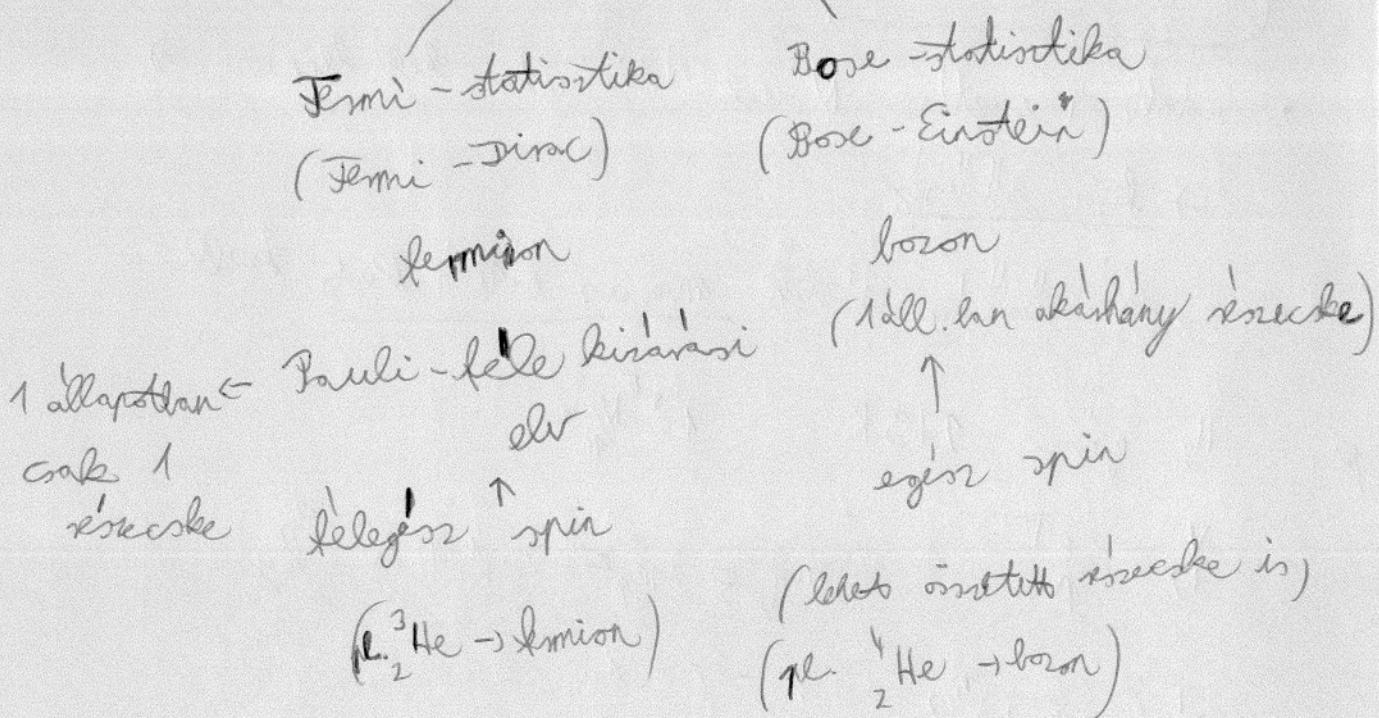
$$e^{-\frac{\mu}{k_B T}} \gg 1$$

- $\mu < 0$ μ minden negatív szám
- $-\frac{\mu}{k_B T} \gg 1$

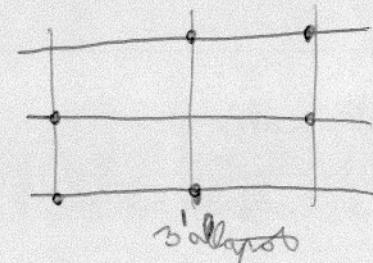
Ra a klassikus leírás feltétele nem teljesül: kvantumjárat

3) Kvantengárok: meghibőlötthetetlenség

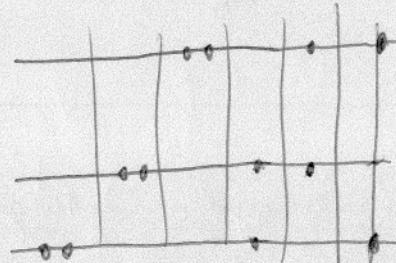
a)



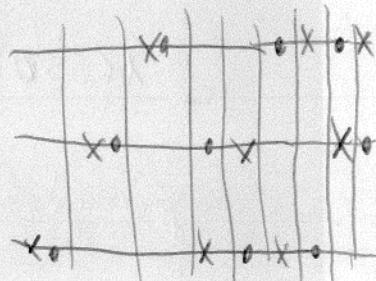
$N=2$



Fermion



boronok



Maxwell - Boltzmann -
statisztika

(meghibőlötthetetlenségek)

E_n	n_n
:	:
E_2	n_2
E_1	n_1
E_0	n_0

bőltettségi számok

Fermionok: $n_i = 0$ vagy 1

Boronok: $n_i = 0, 1, 2, \dots$

$$E = \sum_i n_i E_i$$

$$N = \sum_i n_i$$

b) betöltési szám miatti töké leírása fermion-gáson (ideális):

$p_i(N)$: csak a valószínűsége, hogy az i -ik állapotban van részecské

N részecské összes állapotba

állapot, amelyekben $n_i=0$

$$G(N,i)$$

-II-, amelyekben $n_i=1$

$$A(N,i)$$

egy állapot

halmoz

$$p_i(N) = \sum_{\alpha \in A(N,i)} \frac{e^{-\beta E_\alpha(N)}}{Z}$$

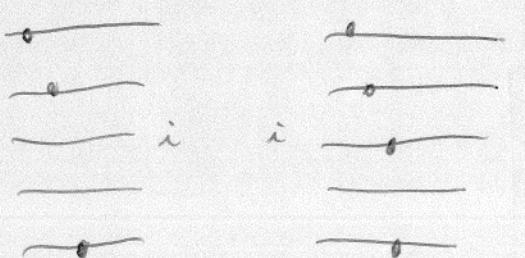
$$Z = \sum_{\alpha \in A(N,i)} e^{-\beta E_\alpha(N)} + \sum_{\gamma \in G(N,i)} e^{-\beta E_\gamma(N)}$$

$$p_i(N) = 1 - \sum_{\gamma \in G(N,i)} \frac{e^{-\beta E_\gamma(N)}}{Z}$$

nincs részecské az i -i áll.ban

$$G(N,i)$$

$$A(N+1,i)$$



Erre az állapotba egyszerűen megfelelhetetlen fizikailag
ugyanis ha $G(N,i)$ -nél az i -helyre 1-öt tennék (1 felén)

tudom az megtartottakat a $A(N+1, i)$ -től kezdve

\downarrow
azaz megtartottakat

$$g_{E_G(N,i)} = \sum_{\alpha \in A(N+1,i)} e^{-\beta E_\alpha(N+1)} \quad \text{mivel enyelő többet az energia}$$

$$\downarrow$$

$$p_i(N) = 1 - \sum_{\substack{\alpha \\ \alpha \in A(N+1,i)}} \frac{e^{-\beta E_\alpha(N+1)}}{Z_N} \cdot e^{\beta E_i} =$$

$$= 1 - \frac{Z_{N+1}}{Z_N} \underbrace{\sum_{\substack{\alpha \\ \alpha \in A(N+1,i)}} \frac{e^{-\beta E_\alpha(N+1)}}{Z_{N+1}} e^{\beta E_i}}_{p_i(N+1)}$$

$$p_i(N+1) \quad \text{l. 29. old}$$

más:

$$f = -k_B T \cdot \ln Z$$

$$e^{-\frac{F}{k_B T}} = Z$$

$$\frac{Z_{N+1}}{Z_N} = \frac{e^{-\frac{F_{N+1}}{k_B T}}}{e^{-\frac{F_N}{k_B T}}} = e^{-\frac{F_{N+1} - F_N}{k_B T}} = e^{-\frac{\mu_N}{k_B T}}$$

$$F_{N+1} - F_N = \frac{\delta F}{\delta N} \cdot \frac{\delta N}{\lambda} = \mu_N$$

$$p_i(N) = 1 - p_i(N+1) e^{\beta E_i} \cdot e^{-\mu_N \cdot \beta}$$

(4)

termodynamikai határeset: $N \rightarrow \infty$

$$p_i(N) = p_i(N+1)$$

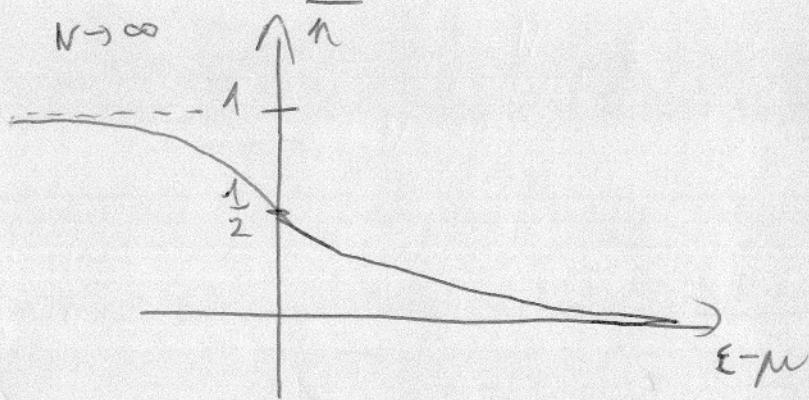
$$\mu_N \approx \mu$$

$$p_i = 1 - p_{i,l}^{\beta(\varepsilon_i - \mu)}$$

$$p_i = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1}$$

$\bar{n}_i = 1 \cdot p_i + 0 \cdot (1-p_i) = p_i$ ← itt függ a mennyiség
 ~ energia v a kémiai energiatól (potenciálktól)

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}$$

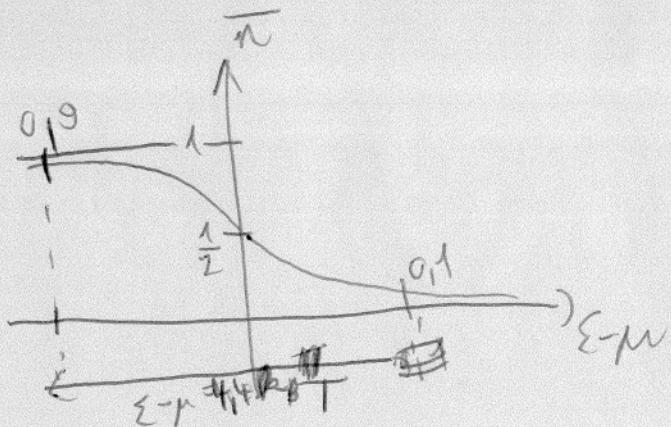


$$T \rightarrow 0 : \beta \rightarrow \infty \quad (\varepsilon \rightarrow \mu) \quad \bar{n}(\varepsilon) \rightarrow 0$$

$$\varepsilon < \mu \quad \bar{n}(\varepsilon) \rightarrow 1$$



$$\mu(T=0) = \epsilon_F \quad \text{Fermi-Energie}$$



$$\frac{1}{e^x + 1} = 0,1 \quad x = 2,2$$

berechnen:

$$\bar{n}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}$$

dm

c) nm: Fermion-gas

$$\begin{array}{c} \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_1 \\ \epsilon_0 \end{array}$$

$$\bar{n}_e = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_e - \mu)} + 1}$$

$$\bar{E} = \sum_{\ell} \bar{n}_e \epsilon_{\ell} = \sum_{\ell} \frac{\epsilon_{\ell}}{e^{\beta(\epsilon_{\ell} - \mu)} + 1}$$

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$\bar{E}(T, \mu) \quad N(T, \mu)$$

↓

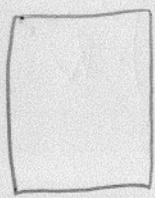
$$M(T, V)$$

$$n_e = 0,1$$

Mit Fermi-Energie

$$N = \sum_e \bar{n}_e = \sum_{\ell} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\ell} - \mu)} + 1}$$

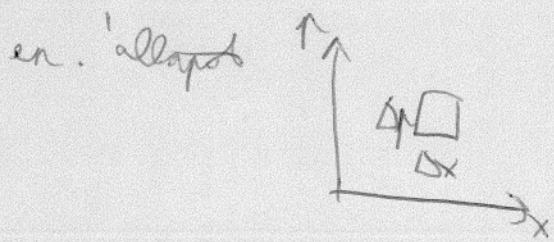
$$\bar{E}(T, W) = \bar{E}(T, \mu(T, N))$$



V törzsgörb

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m}$$

Kváziklasszikus kör



$$\Delta \times \Delta p = h$$

1 cella = 1 állapot
+ spin!

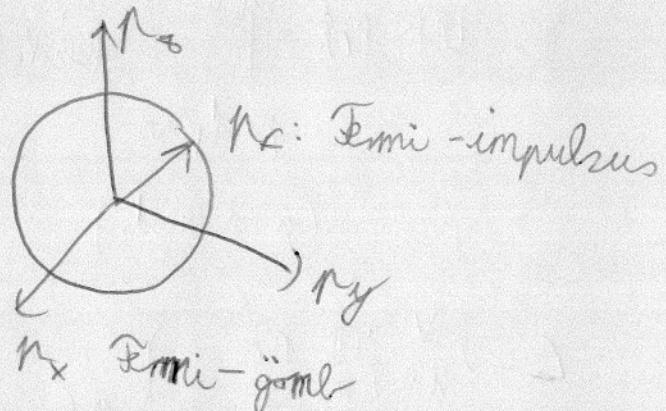
Alapállapot: $T=0$ $\frac{1}{2}$ spin

$$\bar{n} = \begin{cases} 1 & \epsilon < \mu = \epsilon_F \\ 0 & \epsilon > \mu = \epsilon_F \end{cases}$$

befölhető rész

$\epsilon_F = \frac{p^2}{2m} < \epsilon_F$

$$\frac{p_F^2}{2\mu} = \epsilon_F \quad p_F = \sqrt{2\mu\epsilon_F}$$



$$N = \int \frac{d^3 p \cdot d^3 n}{h^3} \cdot 2$$

forrás: törzsgörbön kívül állók száma · spinál.

\uparrow → \curvearrowright

Fermi-gömbben

V törzsgörbön

$$N = \frac{V}{h^3} \int d^3 p = 2 \cdot \frac{V}{h^3} \frac{4\pi}{3} p_F^3$$

$$p_F = \left(\frac{3}{8\pi} \cdot \frac{N}{V} \right)^{1/3} h$$

$$|N| < p_F$$

(Fermi-gömbben)

a Fermi-impulsus

a Fermi-görz szükségtel lügg

$$\epsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3}{8\pi} \frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

$$E = \int \frac{d^3 p}{h^3} \frac{2p^2}{2m} = 2 \frac{V}{h^3} \int d^3 p \frac{p^2}{2m}$$

$$p < p_F$$

$$\text{maz: } \int d^3 p p^2 = \int d^3 p 4\pi p^2 \cdot p^2 = 4\pi \frac{p_F^5}{5}$$

$$|N| < p_F \quad \uparrow^0 \quad \text{felületen}$$

poldában

(p a sugar)

$$E = 2 \frac{V}{h^3} \frac{4\pi}{2m} \frac{p_F^5}{5}$$

$$N = 2 \frac{V}{h^3} \frac{4\pi}{3} p_F^3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E}{N} = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2m} = \frac{3}{5} \epsilon_F \\ \epsilon_F = \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3}{8\pi} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \end{array} \right.$$

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N} \quad F = E - TS$$

(nyomás)

vagy másikról

$$P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S,N}$$

Zérus homogénetetben az entropia független a többi anyagi paramétertől (termodyn. állapot) \rightarrow mindenek között ugyanazt adja

$$\Rightarrow \underset{\text{nyomás}}{P} = \frac{-\frac{\partial E}{\partial V}}{N} = -N \cdot \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3N}{\rho \pi V} \right)^{2/3} \left(-\frac{2}{3} \right) \cdot \frac{1}{V} = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3}{\rho \pi V} \right)^{2/3} = \\ = \underline{\underline{\frac{2}{3} \frac{E}{V}}}$$

$$PV = \frac{2}{3} E \quad \text{Bernoulli - összefüggésből levezethető formula}$$

A termi-gázban csak részecskék vannak impulsusa \rightarrow nem tudnak visszatérni egy adott energiához. Ilyenben Bernoulli \rightarrow viszrapotenciáluk egymással \rightarrow nem nyomásuk.

(n rögzített): e^- gáz

1 elektron/atom \Rightarrow rögzített elektron

$$\rho_{Cu} = 8,96 \text{ g/cm}^3 \quad M = 63,55 \text{ g/mol}$$

$$\frac{8,96 \text{ g/cm}^3}{63,55 \text{ g/mol}} \cdot 6 \cdot 10^{23} / \text{mol} = 8,4 \cdot 10^{22} / \text{cm}^3 = \underbrace{\frac{N}{V}}_{\text{rögzített } 1 \text{ cm}^3}$$

$$m_{el} = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_e = 1,1 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 6,8 \text{ eV} \end{array} \right\}$$

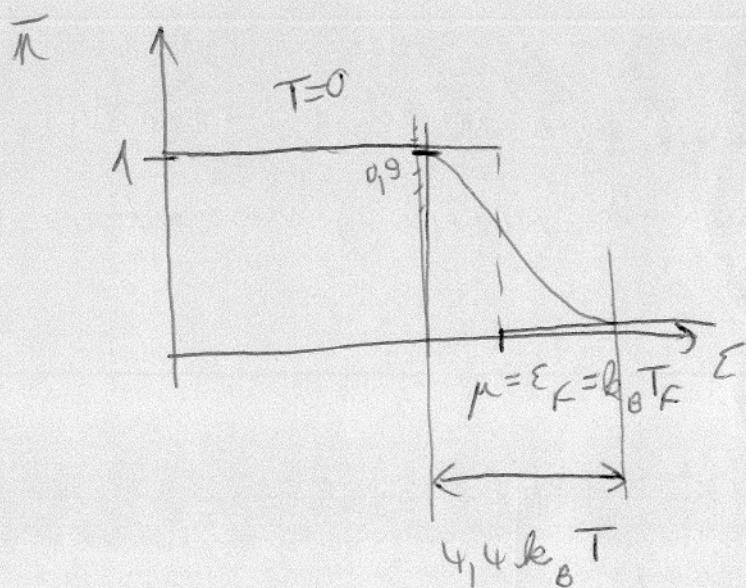
Milyen homogénetetben lesz eközben energia?

$$k_B T_F = \epsilon_F$$

↑
Fermi-homogénezet

$$T_F = 8 \cdot 10^4 \text{ K} \quad (\mu^+ \text{ törégtől Fermi-gáznál } \approx 40 \text{ K})$$

$$\bar{n}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}$$

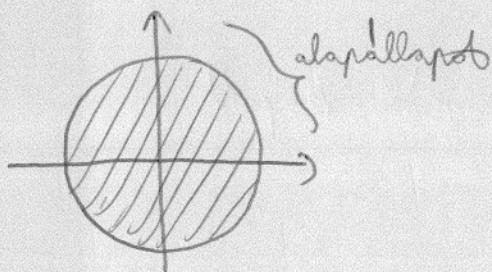


e^- gáznál $T_{\text{mér}} \ll T_F \Rightarrow$ kis kisrelasodás \Rightarrow
 az eloszlásról nem sokan különbözik a 0 homogénekletű
 (alapállapot) eloszlástól \Rightarrow jó közelítés a
 rendszerek az alapállapotban, és az alapállapot
 mennyiségek (pl. függ.).

$$T \neq 0 \quad k_B T \ll \epsilon_F$$

$$T \neq 0 \quad k_B T \ll \epsilon_F \rightarrow \text{nincs kisrelasodás}$$

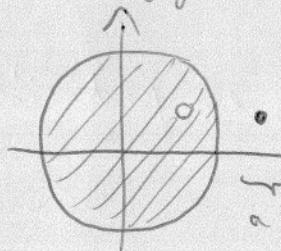
elemi gázokról:



Fermi-gömb

a gázokról
szóval ilyen
visszaképzők
mátrikus kettőnk

első gázokról



a Fermi-gömb belsőjéből

kivesünk (Fermiont)

és a gömbön kívül helyezük)

megvan, mert

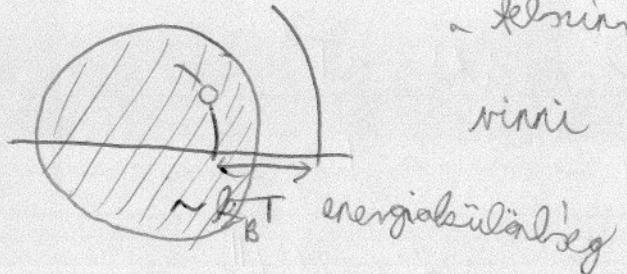
csepa betűben

energiaallá-

pol. voni

körül

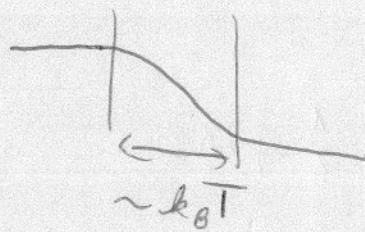
$\Delta E \approx k_B T$ mélységen tudunk kiszámítani részecskék, és
az elosztásnak max $k_B T$ távságra tudjuk



vinni

$\sim k_B T$ energiasűrűség

↓
ez adja a legtöbb kiszáradást)



$$N_{\text{eff}} \approx \frac{k_B T}{E_F} \cdot N$$

effektív

megmagasított visszaképzési mátrix
gyorsítási energia

$$E - E_0 \approx N_{\text{eff}} \cdot k_B T \approx N \cdot \frac{k_B T}{E_F} k_B T \sim T^2$$

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} \approx N \frac{k_B T}{E_F} k_B \sim T$$

$$\text{ekipartitio} : \frac{3}{2} N k_B$$

↓

C nagyon kicsi az ekipartitio ~~száma~~ -ból kapott értékhez képest

megbízhatóbb módon: $C = \frac{\pi^2}{2} \frac{k_B T}{\epsilon_F} k_B N$

↓

az így adta meg a megsagolt becslés

(Től az ekipartitio ~~ból~~ kapott)

pl.

$$\frac{300}{80000} \approx \frac{k_B T}{\epsilon_F}$$

a melegítésekkel kapott hőkapacitás $\sim T^3$

az elektromosságtartással - II - $\sim T$

↳ kis hőmérsékleten utoljára is megfigyelhető

- független $\frac{1}{2}$ spinrel:

$$X = N \frac{M_B^2}{k_B T}$$

de a Pauli-elv miatt mégsem függetlenek

↳ statisztikaius összefüggés (Pauli-elvvel)

$$X = N_{\text{eff}} \frac{M_B^2}{k_B T} \approx N \frac{k_B T}{\epsilon_F} \cdot \frac{M_B^2}{\frac{k_B T}{-\delta E}} = N \frac{M_B^2}{\epsilon_F} = N \frac{\mu_0^2}{k_B T_F}$$

(Pauli-féle paramágneses susceptibilitás)

paramágnes: eleve vanak mágneses momentumuk, melyek a térfelületen megfelelően állnak be, rendszereink

diamágnes: a töltött részecskék atommágnesük hatására könyökön működnek, ami kövérülkönt mágneses tölt indukál (gyorsító +v.)

$$\text{pecsér szimuláció: } \frac{3}{2} N \frac{\mu_0^2}{\epsilon_F} = \chi$$

$$N = \frac{8\pi}{3} \frac{V}{\lambda^3} \rho_f^3$$

$$\frac{V}{N} = \frac{3}{8\pi} \left(\frac{\lambda}{\rho_f} \right)^3$$

$$R = \underbrace{\left(\frac{V}{N} \right)^{1/3}}_{\substack{\text{plánsz} \\ \text{töltőkör}}}, \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} \cdot \frac{\lambda}{\rho_f}$$

klasszikus leírás

\sim
nullamossor

\sim
résekkel
átlagos
tardogája

feltétele: $R \gg \frac{\lambda}{\rho_f}$

$$\frac{\lambda}{\rho_f} \ll \frac{k_B T}{\epsilon_F} \leftarrow \frac{\lambda^2}{2m} = k_B T$$

$$\frac{\lambda}{\rho_f} \gg \frac{\lambda}{\rho_T}$$

$$\rho_f \ll \rho_T \Rightarrow \frac{\rho_f^2}{2m} \ll \frac{\rho_T^2}{2m}$$

$$\underline{\epsilon_F = k_B T_F \ll k_B T}$$

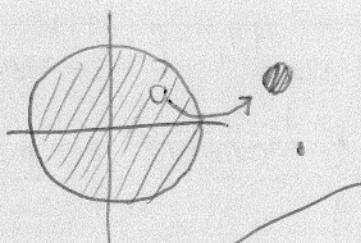
akkor alkalmazható a klasszikus közelítés, ha

$T \gg T_F$ (semi-homogén)

↳ e- gázra nem alkalmazható

↳ de negyed törmege, pl. p^+ vagy ${}^3_2 He$ gázra már igaz

Mi az oka, hogy az e^- -k kötő van L.H., mégis jó valószínűséggel közelítésben a Fermi-gáz lenne?



gyökeres energia: förendelés

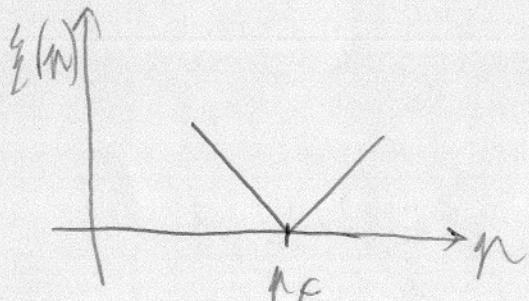
$$\text{lyuk: } \xi(n) = \frac{n_e^2}{2m} - \frac{1}{2m} \quad (n < n_f)$$

• részecskék: $\xi(n) = \frac{n^2}{2m} - \frac{n_f^2}{2m} \quad (n > n_f)$
 a részecskék
 a felszíne visen "összehódítás"
 ("lyukat hozza össze") egy részecskék

$$n_f^2 - n^2 = \underbrace{(n_f + n)}_{2n_f} (n_f - n)$$

$$\xi(n) = \begin{cases} \frac{n_f}{m} (n_f - n) & n < n_f \\ \frac{n_f}{m} (n - n_f) & n > n_f \end{cases}$$

$$\xi(n) = \frac{n_f}{m} |n - n_f|$$



részecské-lyuk
per keltésekkel

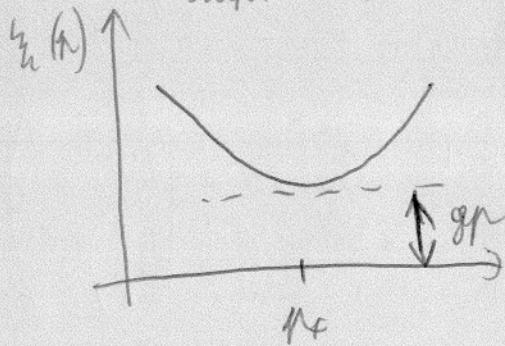


normal
kölcsönhatás Fermion rendszereiben:

$$\xi(n) = \frac{n_f}{m} |n - n_f|$$

→ nagyon jó közelítés a nem
-90- kölcsönhatás Fermion rendsz.

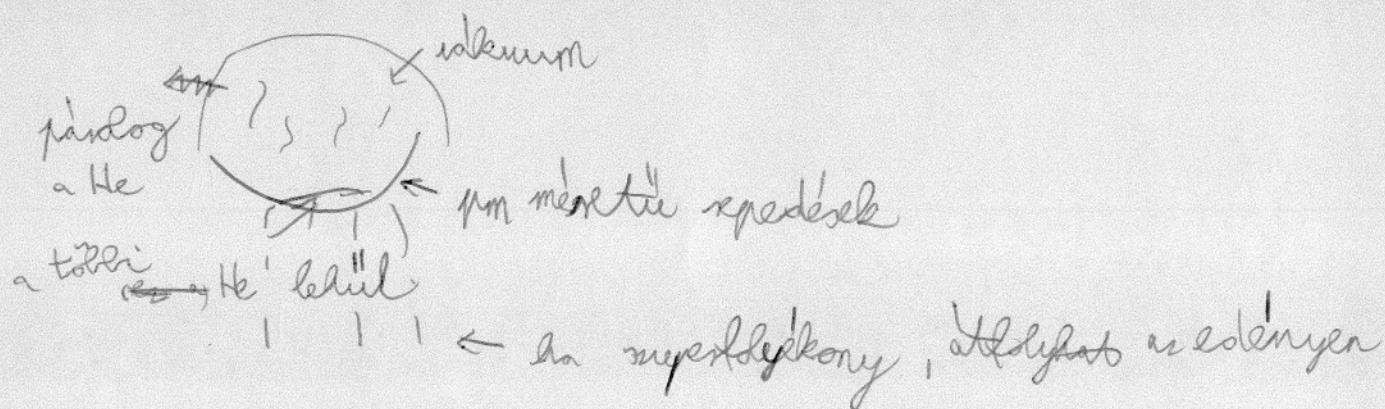
DE "nem normal kölcsönhatás" fermion rendszereben (már nem jó közelítés)
superavantáns



→ kölcsönhatás plenik meg 2 körök között, ami párhuzamos rendíti "kötöt", de emiatt előszeretek a kis energiájú elektronok

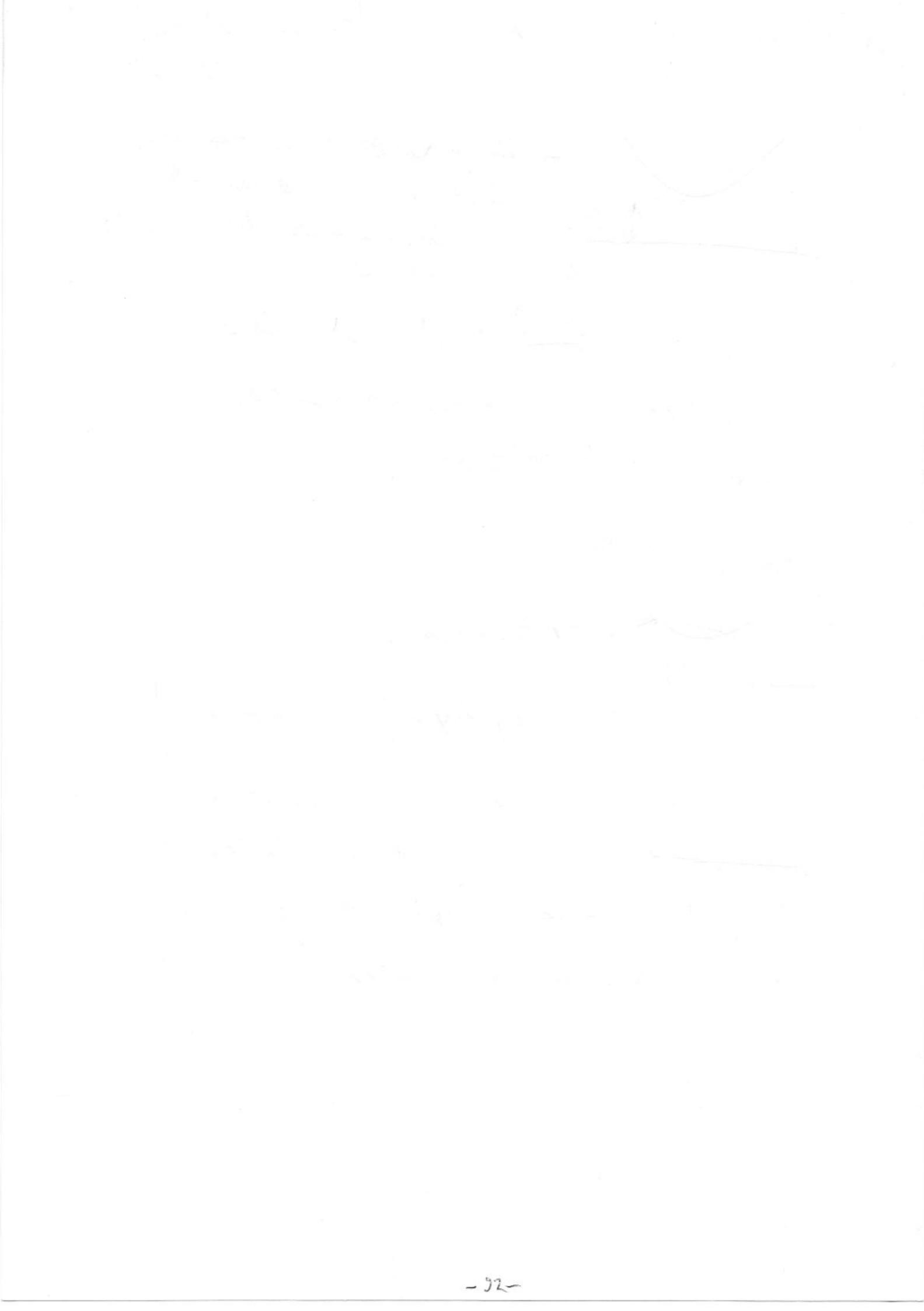
He^3 -ban is van ^{hasznos} plenig (párhuzam "hálók")

↳ superfluiditás lez. alaksony hőmérsékleten
(előszűti a viskozitásat)



(de nem az egész He veszi el a viskozitásot)

(~~He~~ -ban sincs superfluiditás) He-ban a hőmérséklet is működik → azonnal visszajön az egy ~ 11 - hullám a rendszeren, nem általuk ki gradiens)

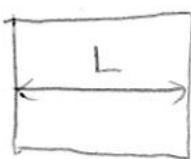


11. Ira

impulzusáramlásig } a részecskék tökéletesek az a mennyiségek
 energia -II- } állandódnak

1) Jellemző idők és távolságok

- makroszkopikus (hidrodinamikai) skála:



ezeken a távolságokon hidrodin. val. igény
 le a gázok, folyadékok áramlássab

- mikroszkopikus skála:

(atom méretű nem trójiki pontossági meghatároz)

→ kölcsönhatás hatótávolsága (r_0)

→ szabad időszak (kölcsönhatástól mentes haladás) (\bar{t})

szab. időszak
 ↓ mennyiség

kinetikai elmélet:

$$L \gg \bar{t} \gg r_0$$

↓ ↓
 egyszerű pillanatnyi tökéletesek
 kiabálva - a szabad mórgás körött
 hat

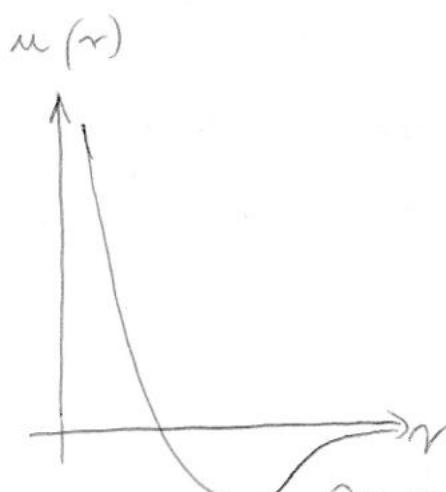
(~ es nem minden érvényes:

$$\text{pl. ritka gáz } \bar{t} \sim L$$

$$\text{nanofizika: } e^- \text{ cs} \ddot{\text{o}}$$

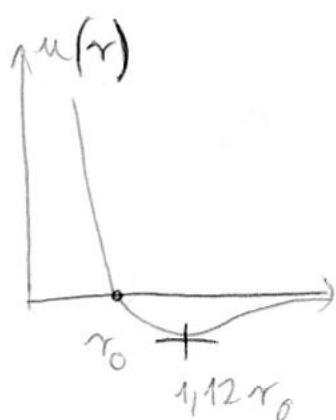
folyadékok, kond. anyagok: $r_0 \sim \bar{t}$)

2) kölcsönhatás:



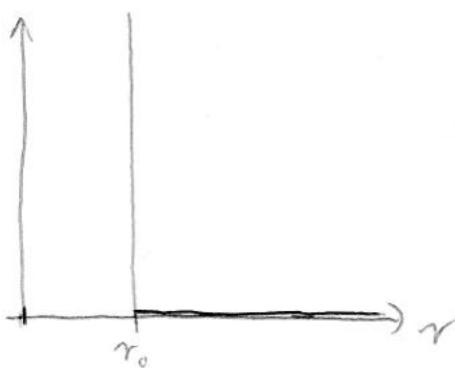
~ Van-der Waals-kölcsönhatás $\sim \frac{1}{r^6}$

- Lennard-Jones-potencial: $u(r) = u_0 \left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^6 \right)$
(feromendogikus közelítés)



kis
távolságban
erős tasztás
nagy távolság
ikon ~ van-der
Waals

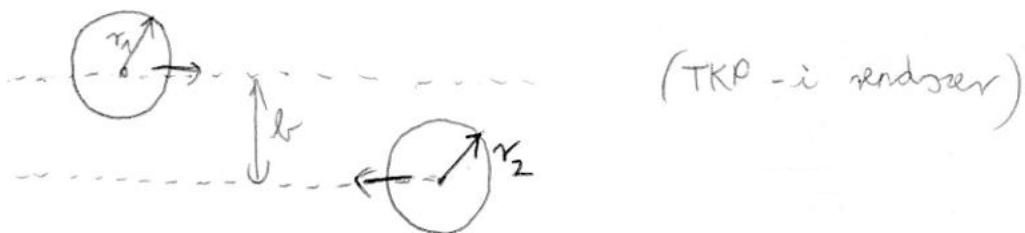
- merev-gömb potencial:



bizonyos jelenségek leírására elég jó alkalmazás

- hatákeretmetszet

- merev gömbök



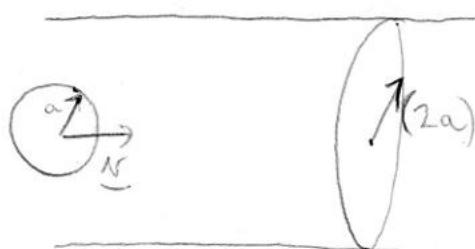
b: ütkölesi parameter

$$\text{ütközés, ha: } b < r_1 + r_2$$

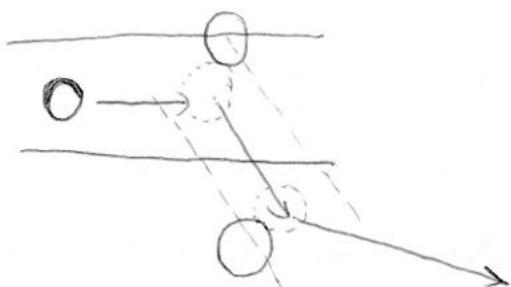
$r_1 + r_2$ sugár hengerben van a köresek

$$\text{hatákeretmetszet: } \sigma = (r_1 + r_2)^2 \pi$$

$$\text{aromas atomok: sugar: } a \rightarrow \sigma = (2a)^2 \pi = 4a^2 \pi$$



- ütközések gyakorisága



Ütleges sebesség: \bar{v}

Δt alatt \bar{b} : $\bar{v} \Delta t$

$$\text{Létező körön: } \bar{v} \cdot \bar{b} \cdot (2a)^2 \pi = \\ = \bar{v} \cdot \bar{b} \cdot \sigma$$

ütközések száma: $\bar{v} \Delta t \sigma \cdot n$

$$-\text{II- gyakorisága: } \boxed{\tau = \bar{v} \Delta t} \stackrel{\uparrow}{\text{atomok száma}} \text{szüksége}$$

(Boltzmann: $Z = \frac{1}{2} \pi r^2 n$, ha a többi atom működését is figyelembe vessük)

is^{II} két ütközés köött:

$$\tau = \frac{1}{Z} = \frac{1}{\pi r^2 n}$$

pl. normal állapotú gáz: $n = \frac{6 \cdot 10^{23}}{2,24 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3} \approx 3 \cdot 10^{25} / \text{m}^3$

$$\bar{r} \approx 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a \approx 1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$$

$$v = 4a^2 \pi$$

$$Z \approx 4 \cdot 10^9 / \text{s}$$

$$\tau = \frac{1}{Z} \approx 2 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

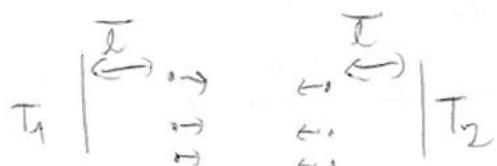
$$\bar{t} = \bar{r}/Z \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

(atomok méretei képest nagyságrendekkel nagyobb)

3) Transportfolyamatok (hővezetés)

- Mekkora energiat visz magaval egy atom?

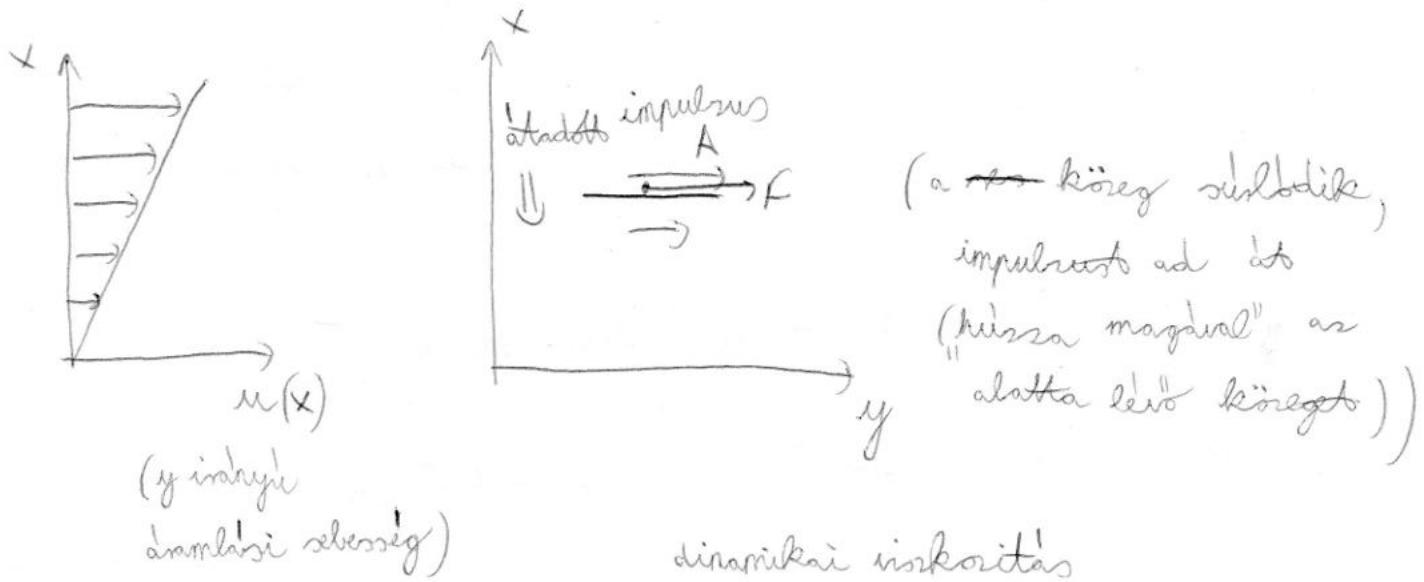
ha feltessük, hogy mindenki egy hőmag energiával rendelkezik, és a hőmérséklet a szabad térfoglalat kepest lassan változik, akkor a falból szabad térfogati területe meg akkor energiával rendelkezik, mint amikor a fal hőmérsékletéhez addig kinetikus energia (még nem ütköztek a falra)



$$\frac{3}{2} k_B T_1$$

$$\frac{3}{2} k_B T_2$$

a) belső részletek - viszkoitás (imp. transport)



$$\text{Newton-féle törvény: } F = A \cdot \eta \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

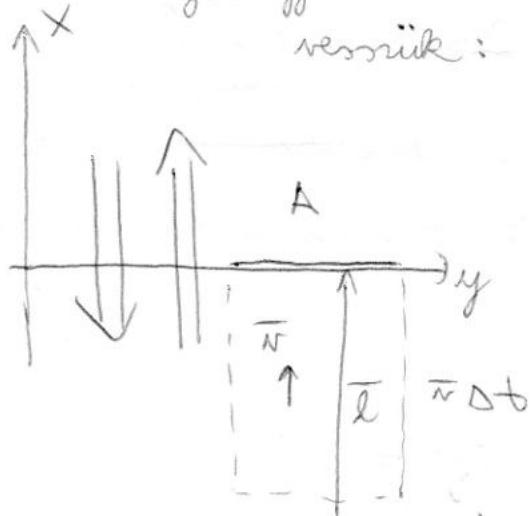
$$[\eta] = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \leftarrow \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \text{ m}^2 \frac{1}{\text{s}}$$

$$1 \text{ Poise: } 1P = 1 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \quad \text{pl. viz: } (20^\circ \text{C}) \quad 0,01 \text{ P}$$

$$\Delta p_y = F \cdot \Delta t = A \Delta t \cdot \eta \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$\underbrace{\eta}$
 p_y áramlásmásság
x irányban

ha a sebességek egyenletesnek
vessük:



$$\Delta t \text{ alatt az átfelületen áthaladó atomok száma: } \frac{n}{6} \cdot A \cdot \sqrt{\Delta t}$$

↓

Síky

- \uparrow átrits impulsus: $\frac{n}{6} \cdot A \cdot \bar{v} \cdot \Delta t \cdot m \cdot u(\bar{t})$

↑
azaz a sebességgel rendelt
terük, amivel a falnak
is

+ \downarrow átrits impulsus: $\frac{n}{6} A \bar{v} \Delta t \cdot m \cdot u(t)$

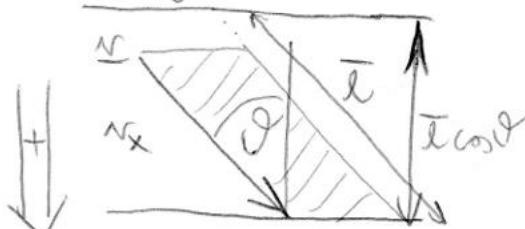
ötörs átrallott impulsus: $\frac{n}{6} A \bar{v} \Delta t \cdot m \underbrace{(u(t) - u(\bar{t}))}_{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot 2\bar{t}}$

$$\Delta p_y = A \Delta t \cdot n \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$n = \frac{1}{3} n \bar{v} m \bar{t} = \frac{1}{3} \frac{m \bar{v}}{\sigma}$$

$$\bar{t} = \frac{1}{\sigma n}$$

• ha a sebesség is változik



átraladó, v sebességgel atomok
száma ($\Delta t, A$):

$$n_x \Delta t \cdot A \cdot n \cdot l(v) d^3 v$$

ezek közül azon atomok sebessége, melyek
sebessége $|v| \rightarrow$ Maxwell-féle eloszlás

\Downarrow átrits impulsus:

$$\int_{v_x < 0} u(\bar{t} \cos \theta) n_x \Delta t \cdot A \cdot n \cdot l(v) d^3 v =$$

a faltól
hort sebesség

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi/2} d\theta \, n(\bar{t} \cos \theta) \underbrace{n \cos \theta}_{\frac{\partial u}{\partial x}} f(v) \sin \theta \cdot v^2 \, dv \cdot A \cdot n =$$

integrálás törzse
mérésesből

adott

$$n(\bar{t} \cos \theta) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \bar{t} \cdot \cos \theta$$

$$= \Delta t \cdot A \cdot n \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot \int_0^{\infty} dv \cdot v^2 \cdot v \cdot f(v) = \Delta t \cdot A \cdot n \cdot \frac{1}{6} \int_0^{\infty} dv \cdot 4\pi v^2 \cdot v \cdot f(v)$$

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos^2 \theta = \left[-\frac{(\cos \theta)^3}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$$

$$\eta = \frac{1}{3} n \bar{v} m \bar{t}$$

\Rightarrow az a feltételezés, hogy az atomok

$\frac{1}{6}$ -a az átlagselbességgel mosog

az egységes irányba, jól eredményt

adott

b) energia áramlás:



$\Delta t, A$ általában energia: $\Delta Q = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot A \cdot \Delta t$

(Fourier-törzny)

hővezetési egysége

$$(\lambda) = \frac{W}{K \cdot m}$$

• transportált mennyiség:

$m \cdot n$ helyett: $\bar{E}(T(x))$; \bar{E} : átlagos egysésekkel energia

$$m \cdot n (\pm \bar{t}) \approx$$

$$\approx m \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot (\pm \bar{t})$$

volt imp. nál

$$\bar{E}(T(\pm \bar{t})) \approx$$

$$\approx \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} (\pm \bar{t})$$

energiával

\rightarrow ennek kell most helyettesíteni
 $m \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot (\pm \bar{t}) \rightarrow$

$$n = \frac{1}{3} \bar{n} \bar{l} n \cdot m$$

atom tömege

$$\lambda = \frac{1}{3} \bar{n} \bar{l} \cdot n \cdot \frac{\partial \bar{e}}{\partial T} = \frac{1}{3} \bar{n} \bar{l} \cdot n \cdot m \cdot c_v$$

1 atomra jutó hőkapacitás

$$\lambda = n \cdot c_v$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{n \cdot c_v} = 1$$

$$\bar{l} = \frac{1}{\sigma \cdot n} \quad \bar{n} = \frac{1}{3} \frac{\bar{n} m}{\sigma} \quad \bar{n} \sim \sqrt{T}$$

a modell minden nem függ a sűrűségtől (így a nyomástól se)

a viskozitás!

CO_2	1 atm.	$1,57 \cdot 10^{-4}$ p
	23,8 atm	$1,69 \cdot 10^{-4}$ p
	100 atm	$4,83 \cdot 10^{-4}$ p

de nagy sűrűségekben a modell rossz, mert kicsi les a szabad utcaossz (örzembetét) a kölcsönhatás hatásáról)

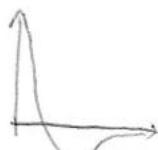
$$\bar{n} \propto \sqrt{T}$$



a meredekség $\sim \frac{1}{2}$, de valóságban nagyobb

ennek oka, hogy a kölcsönhatás nem merev [gömb] szerű

- kontinuális viselkedés } jó
- nagyságrend } jó
- kontinuális egységhatás \rightarrow nem jó



sasvari@caesar.elte.hu

sasvari.web.elte.hu