

## **Statisztikus fizika témaköörök, 2016**

- Termodinamika alapjai, termodinamikai entrópia fogalom, fundamentális egyenletek.
- Mikroszkopikus állapotok fogalma, klasszikus statisztikus fizika. Boltzmann-entropia
- Einstein-modell a Boltzmann-entropia alapján
- Mikroállapotok eloszlása, egyenlő valószínűségek elve
- A kanonikus és nagykanonikus tárgyalásmód általános tárgyalása, az entrópia általános definíciója
- Szabadenergia és nagykanonikus potenciál, a kémiai potenciál: termodinamikai definíció és statisztikus értelmezés

### **Kanonikus tárgyalás alkalmazásai:**

- (i) Einstein-modell kvantumosan
- (ii) Einstein-modell klasszikusan
- (iii) Klasszikus egyatomos ideális gáz

### **Nagykanonikus tárgyalás alkalmazása:**

- Fermi- és Bose-típusú részecskék nagykanonikus állapotösszege
- Az egyrészecske állapotok fogalma
- Azonos részecskékből álló kvantumrendszer hullámfüggvénye: általánosan és független részecskék esetén
- Egyrészecske állapotok a dobozba zárt részecske esetén, az állapotstabilitás-függvény
- Az egyrészecske állapotok átlagos betöltöttségének ( $N_s$  átlag) számolása kanonikus és nagykanonikus esetben az állapotösszegek alapján
- Maxwell-Boltzmann, Fermi-Dirac és Bose-Einstein eloszlások származtatása
- Termodinamikai mennyiségek (kémiai potenciál, belső energia, hőkapacitás és állapotegyenlet) számolása az eloszlásfüggvények alapján (elvileg), hőmérséklet-függések (kémiai potenciál és hőkapacitás)
- A nyomás és a belső energia közti, statisztika-független, összefüggés
- Degenerált Fermi-gáz tárgyalása, Fermi-energia fogalma (delokalizált elektronok fémekben)

## Termodynamika:

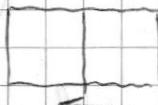
- fenomenológiai
- egysensíly
- állapotjelzők:
  - térfogat  $V$
  - molszám  $n$  vagy  $N$  (utóbbi mindenekkel szemben)
  - hőmérséklet  $T$
  - nyomás  $p$
  - belső energia  $U$  (az I. Törételel definíciója)
  - entropia  $S$
  - kémiai potenciál  $\mu$

## Entropia:

- Clausius nevéhez fűződik
- hőmennyiségek:  $Q$  nem állapotjelző, mérhetetlennégek: hő és entropia
- hő: a termikus energia csere, ami részt vesz a meghőközösségi változásban
- entropia: a rendszert körülvevő hőtől való elszakadása

$$T_1 < T_2$$

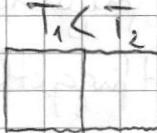
mérhetetlennégek: játék



$$\Delta Q \neq 0$$

Nem állapotjelző, mert csak akkor van jelén, ha folyamat zajlik.

- munka:  $W$  nem állapotjelző, folyamat közben van jelén, itt a mechanikai munka végzetet értjük



$$\delta W$$

{ terfeje ki munkavégzés:  $\delta W = -pdV$

{ surlokész munkavégzés:  $\delta W$

(utóbbi inverzibilis)

- inverzibilis folyamat: nem megfordítható,  
ugyanis entropia változással jár  
(a térfogati művegekben reverzibilis: nem  
jár  $\Rightarrow$  entropia változással)

inverzibilis folyamat  $\Leftrightarrow \Delta S \neq 0$

- Valtozásról csak állapotjelző esetén beszélhetünk;  
ezek csak állapot jelzők esetén

$$\Delta U = U_2 - U_1$$

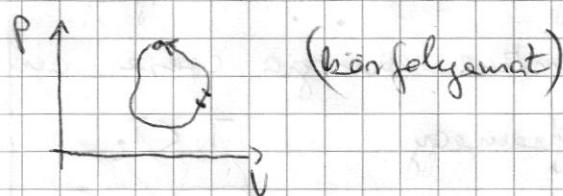
$$\Delta Q = Q_2 - Q_1$$

$\hookrightarrow$  infinitezimális  $dU \rightarrow$  differenciál  $dU$

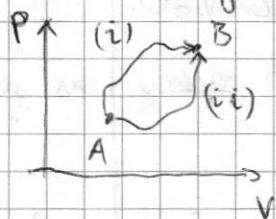
- II. Törételel:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

Tetszőleges anyagra és körfolyamatra igaz!

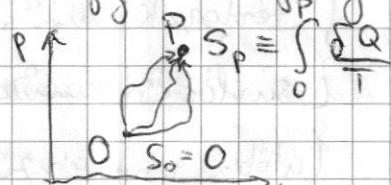


Az integrál utánpöntben.  $\Leftrightarrow \oint = 0$



$$\oint \frac{dQ}{T} = \sum_i \frac{\Delta Q}{T} \quad \int \frac{dQ}{T} = \sum_i \frac{\Delta Q}{T}$$

Ebből következik, hogy horzionálisan elhelyezett  
egy állapot jelzést a folyamathoz.



$\dot{U}$ -független  $\Rightarrow$  az állapot  
tartozik e's nem stánnit hogyan jött  
oda (P: állapot, O: referencia pont)

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

$$S_p = \int_0^P \frac{\delta Q}{T}$$

A referencia pont az abszolút nulla fűr (a termodynamika leírása nem ad magyarázatot)

$$S_{P_1} - S_{P_2} = \Delta S = \int_{P_2}^{P_1} \frac{\delta Q}{T} \Rightarrow dS = \frac{\delta Q}{T}$$

$\oint \delta Q \neq 0$  ez jelenti azt, hogy  $Q$  nem állapotfüz!

Állapotfüz:

- "probléma" hogy mindenkor állapotfüz ki fejehető a többivel; de ekkor minden rendszerni özet

- extenzív

- intenzív

- intenzív állapotfüz: kiegészítődésre töredezhető

$T, P, \mu$

- extenzív állapotfüzök: értelmezik a rendszert mindenivel arányosan

$S, n, U, V$

$2x$	$(1-x)$
<del><math>2x</math></del>	<del><math>(1-x)</math></del>

$X$  áll. füz.

- sima legyűrűségét fogja, ha az alegy megszűnése lehetséges

pl.:  $S_m = \frac{S}{n}$      $U_m = \frac{U}{n}$     (molekula menny.)

- Szabadsági füle: hogy független állapot jelző van a rendszernél

Szereplőihez kell legalább  $\frac{1}{T}$  extenzív mennyiségek

Tisztta rendszer: csak egyfélé alegyvan benne (nem részes)

Tisztta rendszer szabadsági görainak a száma 3.

(Ha megedd a teljes intenzív áll. jelzést, azorból a harmadik már adott pl.  $\mu(T, p)$ )

Képességek esetén minden +1-ppel növekszik a szabadsági füle száma (3+)

A hármas intenzív mennyisége nem lehet független!

$$\cancel{S(\mu, T, p)} \quad S(\mu, V, p) \text{ teljes} \\ \hookrightarrow \text{a trivium extenzív}$$

- Entropia:  $S(u, V, U) \xrightarrow{u \rightarrow N} S(N, V, U)$

- Fundamentális
- a tényai potenciál definíciója ezen alapul (ezért kiemelten fontos)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{N,V} = \frac{1}{T} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{N,U} = \frac{P}{T} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,U} = -\frac{\mu}{T}$$

- az entropia differenciálható lesz a Taylor-sorral csak az első rendű tagot tartva meg, így:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right) dU + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right) dV + \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right) dN = \\ = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN$$

$$dU = TdS - pdV + \mu dN$$

in  
 hőszere      teljes  
 munka          munka  
 anyagmenetiségek  
 megoldásai

Példa:

$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T} = f(N, V, U) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow U(N, p, T)$$

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{p}{T} = g(N, V, U) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow V(N, p, T)$$

Tehát történik ismeretlenes egyszerűen, amit megoldva  
ismerjük a teljes rendszert.

Vell még:

$$pV = NkT$$

A hőkapacitás:

$$C_p = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{p, N} = \left( \frac{\frac{\partial Q}{\partial T}}{\partial T} \right)_{p, N} = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_{p, N}$$

Ez a hőkapacitás  
definíciója

És ezek miatt fundamentális:

$S(N, V, U)$  - bár meghatároz az  $S(N, T, p)$  -t  
de visszafele már nem lehet.  $S(N, T, p) \neq S(N, V, U)$

Keverük a fundamentális egyszerű:

$$S(U, V, N_1, N_2, \dots)$$



$$\frac{\partial S}{\partial U} = \frac{1}{T} \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{p}{T} \quad \frac{\partial S}{\partial N_i} = -\frac{\mu_i}{T}$$

## Termodynamikai entrópia:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \Leftrightarrow dS = \frac{\delta Q}{T}$$

$\delta Q$  hőszáles: folyamat jelző, folyamatra jellemző  
és ezért nem állapotjelző (fizikai értelmezés)

$$\Delta U = \int_1^2 (\delta Q + \delta W)$$

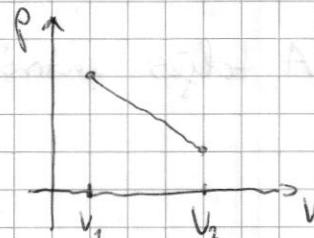
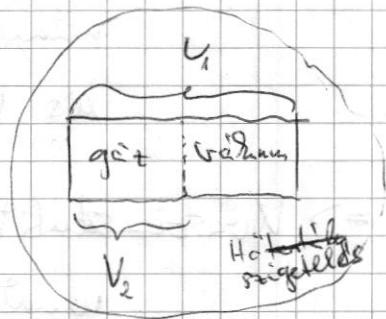
$$dU = \delta Q + \delta W$$

$\hookrightarrow$  Belső energia megtartása: ebben az értelmezésben  
ez nem állapotjelző, hiszen ez is folyamat  
ra jellemző

Gay-Lussac törvény:

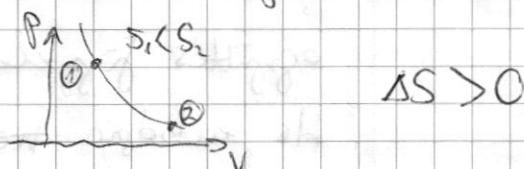
$$\begin{cases} \delta Q = 0 \\ \delta W = 0 \end{cases} \Rightarrow dU = 0$$

$$\Delta U = 0$$



Ideális gáz: a belső energia nem változik és az entrópia nem változás általában.

Izoterminak folyamat: van entalpia változás



Adiabatikus folyamat: nincs entropia változás

Inreverzibilis folyamat: spontán entropia termelődés  
 és az entropia "termelődés" nem feltételezik a  
 hőmérősről függvénye, sőt: izotermás például.

$$dS = dS_{\text{spontán}} \geq 0 \quad \downarrow \text{ez minden}$$

Hő hőközelis is jelén van a folyamatban:

$$dS = dS_{\text{spontán}} + \frac{\delta Q}{T} \quad \downarrow$$

Minimális se csökkenthető, ha a  
 mindenrégész (a rendszer univerzális)  
 minimális se csökken: infinitesimalis  
 his mindenrégész

$\Rightarrow$  Kötzi-statisztikai folyamator: infinitesimalis  
 mindenrégész fel sorozata (idealizált)  
 eset)

A teljes entropia:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + dS_{\text{spontán}} + \frac{\delta W_{\text{int}}}{T} + \dots \geq 0$$

Inreverzibilis mindenrégész:  
 például fűrészési mindenrégész

Reverzibilitás: ahol a folyamat es a rendszer  
 egynél foglyanabb retelelve van entropia  
 Ha entropia törekedés visszaesik van, arról  
 a folyamat inreverzibilis. (mivel minden  $dS_{\text{spontán}} = 0$ )

Ismeretlen a reverzibilitásra vonatkozóan

Statisztikus fizikai entropia:

- Az anyag mikroszkópius szervezetével függőleges magyanszai.
- Mikroszkópius állapot: atomi állapotok, a mikroszkópius állapotot felépítő belső elemi állapotok
- Kvantummechanikai állapot:

$$\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$$

pl.: "Einstein - zst": független lineáris oszcillátorok összesége

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}_i^2 \right)$$

$$E = \sum_{i=1}^N \hbar \omega \left( n_i + \frac{1}{2} \right) \quad \text{Quantumszám: } n_i = 0, 1, \dots$$

$$\underbrace{E_{n_1, n_2, \dots, n_N}}_{\hbar}$$

Microállapotok halmaza: az összes lehetséges kvantumszámok összes lehetséges kombináció halmaza

Teljes zst. hullámfügg.-e: az összes hullámfüggvény szorzatának által elő

$$\Psi_m = \Psi_1(x_1) \cdot \Psi_2(x_2) \cdot \dots \cdot \Psi_N(x_N)$$

Azért ezek szorzata alacsony, mert függhetetlen a lin. oszc.-ról.

Működéskörönkívül stabilisációi főbb részben: hidrogén porz  
mellőzéssel megedné, míg a rez. -t egyszerűen  
nincs megelőzni: f

Ebben a rez. -ben:  $f = N$

Dobdy-modell: Einstein-rez., de Rül.  $w_i \cdot f_i$

Multiplicitás:  $\Omega(E)$  értelmezése, hogy hűtőszektorban  
eljutottak az energiasztintjei a rez. -nál

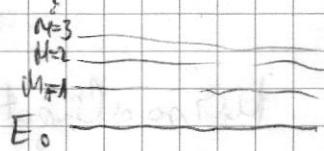
$$E_M = \sum_{i=1}^N \hbar \omega (w_i + \frac{1}{2}) = N \frac{\hbar \omega}{2} + M \cdot \hbar \omega$$

$= E_0$  alapellapot energia,  
mindez a multiplicitás (degenerációsztinták) = 1

$$M = \sum_{i=1}^N w_i \rightarrow E_0$$

adja a degenerációt  
Légyen  $M$  értéke, több  
ellapot halmozabol is megrajtható

$$\Omega(E) = \Omega(M)$$



Hidrogén működéskörönkívül megalapítani  
egy adott energiasztintet.

→ Klasszikus fizikai alapok:

A Hamiltoni formalizmustól indulunk róla.

Hamilton fgv.: az energia definíciója az általános

impulzusok és általános koordináták fgv.-ról:

$$H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$$

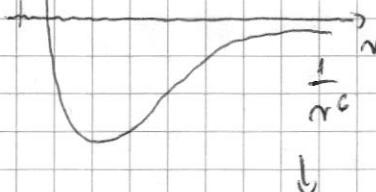
pl.: egymányaos idézéses Hamilton-fgv-e

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} \quad \vec{p}_i^2 = p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2$$

Redliv v. valódi gáz:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \sum_{i=1}^N U(\vec{r}_i - \vec{r}_c)$$

$$U \sim \frac{1}{r^6}$$



Van der Waal vonás: gyenge induktív dipól kölcsönhatás

$$\mathcal{H}(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f) \Rightarrow f = 3N$$

$\downarrow \quad \downarrow$   
 $r_{1x}, \dots, r_{Nz}$

szabadsági feszessége

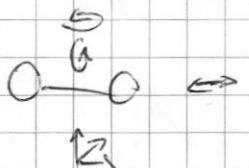
Kétatomos molekula szabadsági feszessége a száma:

- tömegarányt: 3

- forgási: 2

- rezgés: 1

$$\Rightarrow f = 6N$$



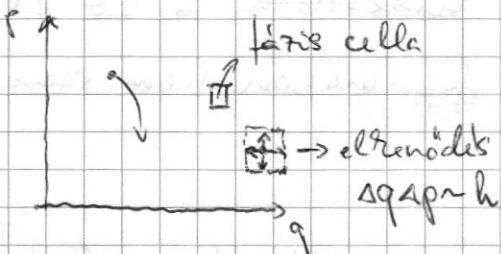
Szabályozásokhoz a rezgés általában elhagyhatatlan: erről:  $f = 5N$

## Klasszikus rendszerek:

$$\underline{u} \Leftrightarrow (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$$

Megosztó párus állapotok  
belincs

## Fázisra ábocozás:



| Klasszikus esetben

A probléma, hogy ez egy  
polifázis halmoz, ezért  
a teret fázis cellákra  
osztjuk.

→ A fázis celláinak a Nagysignifikenciája kell lennie,  
többszöröse pont a Planck-ellenőrönél valamivel nagyobb.  
Az entropia egy transzisz erőjéig meghatározott első  
a fázisellát pont a Planck-ellenőrönél valamivel nagyobb,  
arról ez a transzisz elhúzódik. Ezért felül a hivatalos  
rendszerek határ általánese esik ebben a részesítésben  
megy át a Klasszikus esetbe.

→ Egy adott energiához tartozó hiperfelület dimenziójai  
2 f - 1

$$\text{Hamilton: } \mathcal{H}(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f) = E$$

Multiplicitás meghatározása:

$$\Gamma(E) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \dots dq_f dp_1 \dots dp_f \cdot 1$$

$$\mathcal{H}(\dots) < E$$

$\Gamma(E)$  = adott E energiához tartozó fázis terület  
kisebb energiájú állapotainak a száma

$$\frac{1}{q_f} = \text{elmin fáziscella normális teljesítménye: fels (p_f q_f)} / p_m$$

$$\Omega(E, \delta E) = \frac{1}{\hbar^3} (\Gamma(E + \delta E) - \Gamma(E))$$

↳ Ez a klaszszikus fizikai multiplicitás fogalma

A termodynamikai limeszben a  $\delta E$  eltérőről ezért az entrópia fogalmában nem szerepel a  $\delta E$ .

→ Statisztikus fizikai entrópia fogalma: (Boltzmann)

$$S = k \ln \Omega(E, N, V)$$

$$\hookrightarrow S(E, N, V)$$

Ha ismerjük  $S$ -t a multiplicitás függvényében, akkor ismerjük  $S(E, N, V)$ -t, ami fundamentális egyenlet.

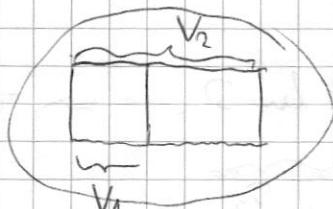
↓ klaszszikus esetre

$$S = k \ln \Omega(E, \delta E)$$

(Ebből felépíthető a termodynamikai statisztikus fizika, bármiféle valószínűségi meghatárolás helyén)

A Clausius - Felle termodynamikai entrópia fenomenológiai törvénye. A fét törvénynevezetben teljes leme, ezt önmagában példára vonatkozóan viszonylag rövid.

Példa:



Eltelítési fal, hőszigetelt rész.  
A multiplicitás függ az energiával, ezért megszorításról kell gondolkodni.

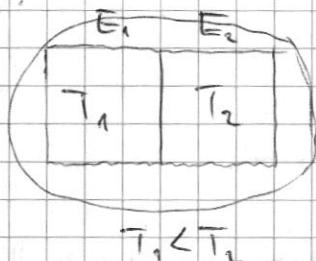
$$1 \text{ db molekulához } \Omega \sim V, N \text{ db molekulához } \Omega \sim V^N$$

$$\Rightarrow S \sim \ln \Omega \sim N \ln V$$

Ez összhangban van azzal, hogy a gáz felvesszi a térfogó méretét. Azaz az entrópia növekedik és csökkenik.

Az  $S$  növekedése az  $\Omega$  növekedésével történik, a logaritmus a vércserezésnek megfelelően kizártja.

Példa:

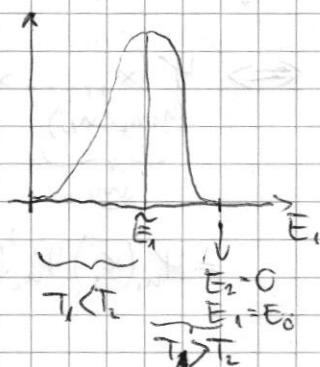


Hogyan vállalja a rész. multiplicitását?

Legyen  $\Omega(E_1)$ , ez elég, mert  $E_1 + E_2 = E_0 = \text{konst.}$

Tehát a teljes rész. multiplicitás:

$$\Omega(E_0) = \Omega_1(E_1) \cdot \Omega_2(E_2) = \Omega_1(E_1) \cdot \Omega_2(E_0 - E_1)$$



$$\frac{d}{dE_1} \ln \Omega > 0 \quad \text{ha } T_1 < T_2$$

$$\frac{d}{dE_1} \left[ \ln \Omega_1(E_1) + \ln \Omega_2(E_0 - E_1) \right] =$$

$$= \frac{d}{dE_1} \ln \Omega_1(E_1) - \frac{d}{dE_1} \ln \Omega_2(E_2)$$

$$\text{Mert: } \frac{d}{dX} \ln \Omega_2(E_0 - X) = \frac{d}{dE_2} \ln \Omega_2 \cdot \frac{d}{dX} (E_0 - X) = -1$$

$$\frac{d}{dE_1} \ln S_1 > \frac{d}{dE_2} \ln S_2 \Rightarrow T_2 > T_1$$

$\underbrace{S_1}_{\text{ }} \quad \underbrace{S_2}_{\text{ }}$

$\frac{1}{T_1} \quad \frac{1}{T_2}$

A röjt példá felét tüntelte le, hogy az entropia növekedés valóban nem áll. (A zárt rendszerre feltétele fontos, ha entropia növekedést vizsgáljuk.)

Einstein-modell: kvantum mechanikai tényezők

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 \right)$$

$\downarrow$

$$\hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad n = 0, 1, \dots$$

Függetlenségek: a helyes Hamilton, a zárt rendszerben összegéreint áll elő

Működőlapotár: energia saját lapotár

$$m : (n_1, n_2, \dots, n_N) \Leftrightarrow \Psi_{(n_1, \dots, n_N)}(x_1, \dots, x_N) =$$

$\underbrace{(n_1, n_2, \dots, n_N)}_{m} \quad \underbrace{\Psi}_{m}$

$$= \Psi_{n_1}(x_1) \Psi_{n_2}(x_2) \dots \Psi_{n_N}(x_N)$$

$$E_m = E_{n_1, n_2, \dots, n_N} = \hbar \omega \sum_{i=1}^N \left( n_i + \frac{1}{2} \right)$$

$$E = \hbar \omega \sum_{i=1}^N \left( n_i + \frac{1}{2} \right) = \underbrace{N \frac{\hbar \omega}{2}}_{E_0} + \hbar \omega \underbrace{\sum_{i=1}^N n_i}_{M}$$

$E_0$ : alaplapotár  
en.

$$M = \frac{E - E_0}{\hbar w} \quad M + N = \frac{E + E_0}{\hbar w}$$

$$\Omega(E) = \binom{M+N-1}{M} \quad \text{igazabolt } \Omega(E, N)$$

Alkalmaszai kell a termodynamikai limit megközelítését, példában  $N$  egy Avogadro szám nagységrendű entetum és  $M$ -et példában a szobahőmérséklet szintet kell relaxálni.

Kell meg a Stirling-formula:  $\ln N! \approx N(\ln N - 1)$

$$\Rightarrow \ln \Omega = \ln (M+N)! - \ln M! - \ln N! = \\ = (M+N) \ln (M+N) - M \ln M - N \ln N$$

$$S(E, N) = k \frac{1}{\hbar w} \left[ (E + E_0) \ln \frac{E + E_0}{\hbar w} - (E - E_0) \ln \frac{E - E_0}{\hbar w} - \right.$$

$$\left. - N \hbar w \ln N \right] =$$

$$= (E + E_0) - (E - E_0) = 2E_0$$

$$E_0 = N \frac{\hbar w}{2}$$

$$= k \frac{1}{\hbar w} \left[ (E + E_0) \ln \frac{E + E_0}{N \hbar w} - (E - E_0) \ln \frac{E - E_0}{N \hbar w} \right] =$$

$$S(E, N) = \frac{k}{\hbar w} \left[ (E + E_0) \ln \frac{E + E_0}{2E_0} - (E - E_0) \ln \frac{E - E_0}{2E_0} \right]$$

$E_0$  egy fundamentális egység.

Felirható még:  $S(E, N) = N s \left( \frac{E}{N} \right)$  általános

és csak így fizikai, hogy minden állapot

$$S(2E, 2N) = 2 S(E, N)$$

(hangolás elso során "fiz.: -e")

A belső energia hőmérőleffgjegese: (foglal oszcillátor részben)

$$S(E, N) = \frac{k}{\hbar \omega} \left[ (E + E_0) \ln \frac{E + E_0}{2E_0} - (E - E_0) \ln \frac{E - E_0}{2E_0} \right]$$

$$E_0 = N \frac{\hbar \omega}{2}$$

(i)  $E(T)$

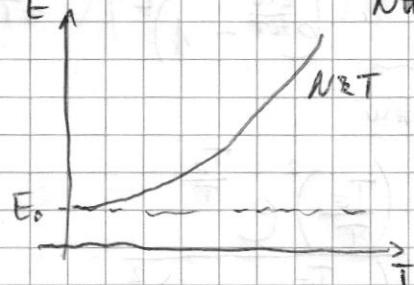
$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= \left( \frac{\partial S}{\partial E} \right)_N = \frac{k}{\hbar \omega} \left[ \ln \frac{E + E_0}{2E_0} - \ln \frac{E - E_0}{2E_0} \right] = \\ &= \frac{k}{\hbar \omega} \ln \frac{E + E_0}{E - E_0} \end{aligned}$$

$$e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} = \frac{E + E_0}{E - E_0} = 1 + \frac{2E_0}{E - E_0}$$

↓

$$\frac{E - E_0}{2E_0} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}$$

$$E(T, N) = E_0 + 2E_0 \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} \stackrel{T \rightarrow 0}{\approx} E_0 + \frac{N \hbar \omega}{\frac{\hbar \omega}{kT} + \dots} \approx N k T$$



$N k T$  viszonylagosan az elvárt értékhöz közelítőleg is.

Karakterisztikus hőmérőleffet:  $\frac{\hbar \omega}{k} = T_E$

Az elvárt érték tételé (szabályozás fiz. tétel) azaz magas hőmérőleffetek teljesül, azzal ha  $T \gg T_E$

Hőkapacitás:  $C \rightarrow \delta Q \sim dT$

$$\underbrace{(\delta U =)}_{= E} \delta Q = C dT$$

$$C = \frac{dE}{dT} = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_N$$

Oszillátor rendszerek fizikai értelmezése:

→ Szilárd testekre (nem felfűtlenül kristályos) vonatkozó modell

→ Erősén csatolt rezgő rendszerek területére a fizikai rendszert. (Kristály esetén még periodikus is.)

→ Ezben belül is a szigetelő szilárd testek, a fémetre nem jó, mert a delorálásból elektronok jelentős járművet adnak a fajhőhöz

→ Iehalt kristályos és amorf szilárd anyagok modellje

→ A hőkapacitás a hőmérséklet függésében:

$$(ii) C = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_N = \partial \left( \frac{2E_0}{\frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}} \right) = -2E_0 \left( \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left( e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^2} \right) \left( -\frac{h\nu}{kT^2} \right)$$

$$C = Nq \cdot \frac{\left( \frac{h\nu}{kT} \right)^2 e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left( e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^2} = Nq \cdot \frac{\left( \frac{T_E}{T} \right)^2 e^{\frac{T_E}{T}}}{\left( e^{\frac{T_E}{T}} - 1 \right)^2}$$

Ez a modell még nem megfelelő, mert még csak független 1D-s oszcillátorról deríti a valós modellt  
3D → Rell:

$$C_{3D} = 3 \cdot C_{1D}$$

Maldnisi hőkapacitás:

$$N = N_A \quad \text{Avogadro-szám}$$

Es mielő N\_A/2 = R    Egységes járalláns!

$$C_m = 3R \cdot \frac{\left(\frac{T_E}{T}\right)^2 e^{\frac{T_E}{T}}}{\left(e^{\frac{T_E}{T}} - 1\right)^2}$$

→ vizsgáljuk a magashőmérsékletű esetet:

$$T \gg T_E \quad C_m \approx 3R \cdot \frac{\left(\frac{T_E}{T}\right)^2 \cdot 1}{\left(1 + \frac{T_E}{T} - 1\right)^2} = 3R$$

Légyenis sorfüggesséssel:  $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$



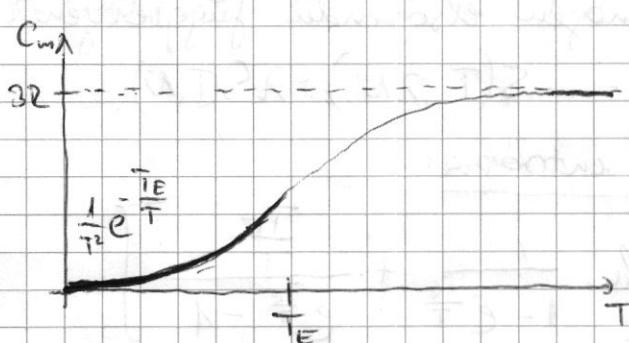
Dulong - Petit szabály:  $C_m = 3R$

Tehát a maldnisi hőkapacitás független az anyagi működésről. (Az összefüggés univerzális)

Ez lényegesen az erősítőkötélnek alkalmazása a gyakran oszcilláló rendszerekre. (Es ez a Deby részre is igaz marad.)

→ vizsgáljuk az alsóbb hőmérsékletű limesszere:

$$T \ll T_E \quad C_m \approx 3R \left(\frac{T_E}{T}\right)^2 e^{-\frac{T_E}{T}} \longrightarrow 0$$



L'Hospital szabály  
szorit

→ A hőkapacitás kísérleti eredményei a 0 földönben  $\sim T^3$  összefüggésre mutatják. Ennek a libáriának az elmeleti komplexiója a Debye-modell.

Entrópia, mint a hőmérséklet függ. e:

$$S(E, N) = \frac{k}{\hbar w} 2E_0 \left[ \frac{E+E_0}{2E_0} \ln \frac{E+E_0}{2E_0} - \frac{E-E_0}{2E_0} \ln \frac{E-E_0}{2E_0} \right]$$

$$\downarrow E_0 = N \frac{\hbar w}{2} \quad \frac{E+E_0}{2E_0} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar w}{kT}} - 1} \quad \frac{E-E_0}{2E_0} = \frac{e^{\frac{\hbar w}{kT}}}{e^{\frac{\hbar w}{kT}} - 1}$$

$$(iii) S(T) = Nk \left( \frac{e^{\frac{\hbar w}{kT}}}{e^{\frac{\hbar w}{kT}} - 1} \ln \frac{e^{\frac{\hbar w}{kT}}}{e^{\frac{\hbar w}{kT}} - 1} - \frac{1}{e^{\frac{\hbar w}{kT}} - 1} \ln \frac{1}{e^{\frac{\hbar w}{kT}} - 1} \right) =$$

$$= Nk \left[ \ln \frac{1}{e^{\frac{\hbar w}{kT}} - 1} + \left( \frac{\hbar w}{kT} \right) \frac{e^{\frac{\hbar w}{kT}}}{e^{\frac{\hbar w}{kT}} - 1} \right] =$$

$$e^{\frac{\hbar w}{kT}} (1 - e^{-\frac{\hbar w}{kT}})$$

$$= Nk \left[ \ln \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar w}{kT}}} - \left( \frac{\hbar w}{kT} \right) + \left( \frac{\hbar w}{kT} \right) \frac{e^{\frac{\hbar w}{kT}}}{e^{\frac{\hbar w}{kT}} - 1} \right]$$

$$S(T, N) = Nk \left[ \ln \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar w}{kT}}} + \frac{\frac{\hbar w}{kT}}{e^{-\frac{\hbar w}{kT}} - 1} \right]$$

→  $S(T, N)$ -nak homogen előrendű függvénye a réll lemeze  $N$ -ről:  $S(T, 2N) = 2S(T, N)$

→ 3D-s működés entrópia:

$$S_m = 3k \left[ \ln \frac{1}{1 - e^{-\frac{T_E}{T}}} + \frac{\frac{T_E}{T}}{e^{\frac{T_E}{T}} - 1} \right]$$

→ Az  $S(E, N)$  fundamentális, amit leveretünk a statisztikus fizika módszerrel és ezután termodynamikai számvitások útján kapunk a többi összefüggést (Visszafele nem műgy, hiszen a többi nem fundamentális.)

→ Magas hőmérsékleti termodynamikai környezetben:

$$T \gg T_E \quad S_m \approx 3R \ln \frac{1}{1 - e^{-\frac{T_E}{T}}} + \frac{\frac{T_E}{T}}{1 - e^{-\frac{T_E}{T}}} = 3R \left[ \ln \frac{T}{T_E} + 1 \right]$$

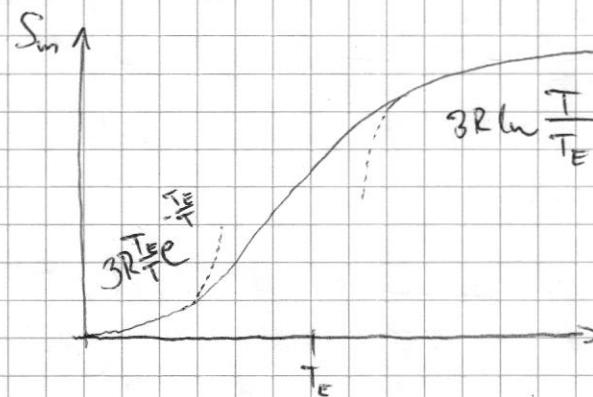
→ Alacsony hőmérsékleti termodynamikai környezetben:

$$T \ll T_E \quad S_m \approx 3R \left[ -\ln \left( 1 - e^{-\frac{T_E}{T}} \right) + \frac{T_E}{T} e^{-\frac{T_E}{T}} \right]$$

$$\begin{aligned} \ln(1-x) &\approx 0 + \frac{-1}{1-x} \cdot x + \dots \approx 0 - x + \dots \approx -x \\ &= x \end{aligned}$$

$$\ln(1-x) \approx 0 + \frac{-1}{1-x} \cdot x + \dots \approx 0 - x + \dots \approx -x \approx e^{-\frac{T_E}{T}}$$

$$S_m \approx 3R \frac{T_E}{T} e^{-\frac{T_E}{T}}$$



→ Az entropia egy konstan sejteig határozatlan, de a statisztikus fizika úgy definiálja, hogy az entropia pozitív és a nulla hőmérséklethez nulla entropia tartozza (abszolút nulla pont). Az entropiának a hőmérséklet monoton növekvő" függvényeire kell lennie.

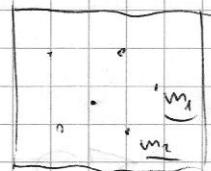
$$T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_N > 0$$

Ez pedig eppen a hőkapacitás, ami minden pozitív definit.

(A klasszikus statisztikai fizikai Szilnoki megszűnt az entropia monotonitását.) Ebben emiatt a fázis állapot a Planck állapotokhoz kell választani, hogy belépjen a termomechanikai modellbe. Itt is az entropia heterogenitáton konszenzál a fázis cella valföltettsége valföltethetősége.)

## Mirroallegatorvalósági segítsélméze

$$m \rightarrow p_{\nu}$$



E, N, U, ...

→ Dinamikai leírás: a rendszer időbeli változása és a rész. az egyes időlejárásban érinti az egyes mirroallegatorat  $m_1 \rightarrow m_2 \rightarrow m_3$

$N_m$  száma jelzi, hogy a rész. energiszer érinti az  $\leftrightarrow$  mirroallegatorat

$N_{\text{össz}}$  az összes érintett mirroallegator száma

Valósági segítség:

$$P_{\nu} = \frac{N_m}{N_{\text{össz}}}$$

→ Tárgyalás módd:

- Mirrokananirus:  $E, N, V$   $S(E, N, V)$  fund. eggy.
- Kananirus:  $T, N, V$   $F(T, N, V)$  fund. eggy.
- Nagykananirus:  $T, \mu, V$   $\Phi(T, \mu, V)$  fund. eggy.

A különböző tárgyalásmodokban a ~~mirrokananirus~~ által mirrokananirus állagjelzők alapjának halvazta különböző.

Minden egyes tárgyalásmóddhoz tartozik egy fundamentális eggyel. A termodynamikai limesz szellem, hogy a különböző tárgyalásmodok eredményei egyszerűen is a termodynamikai limesben egésznek is, ez a termodynamikai elvonalenczia.

→ Ingadozó, fluktuáló mennyiséget az átlagval jellemzi

$$\bar{A} = \frac{\sum_m N_m A_m}{N_{\text{össz}}} = \sum_m P_m A_m$$

Szórás

$$\sigma_A^2 = \overline{(A - \bar{A})^2} = \sum_m P_m (A_m - \bar{A}) =$$

$$= \sum_m P_m A_m^2 - 2\bar{A} \sum_m P_m A_m + \bar{A}^2 \sum_m P_m =$$

$\underbrace{\sum_m P_m}_{N_{\text{össz}} = 1}$

$$\sum_m P_m = \frac{1}{N_{\text{össz}}} \left( \sum_m N_m \right) = 1$$

$$\hat{\sigma}_A^2 = \bar{A}^2 - \bar{A}^2$$

Térmodinamikai limitben a relatív szórás nullához tart (ha a részecskestím tart végelőnt)

$$\frac{\sigma_A}{\bar{A}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Keresse ki a tengelyldsi modellhez tartozó műveleti eloszlásokat

→ Statisztikus fizika postulátuma: műveletekmutató (azaz azt aztán)

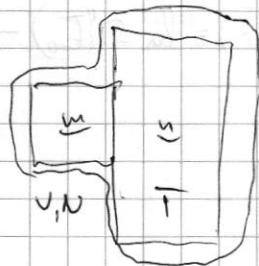
$$\text{műveletpotenciál } P_m = \text{állandó} = \frac{1}{-\epsilon(E,V,N)}$$

valószínűségek elve

Az összes műveletpotenciál a stáns a oszt. multiplikatív  
Ennek az alapja a rögzített energia.

## Kvantumus törzgalásnál valószínűségi eloszlása

- Az energia nem szegélyelt
- A viszelt sz. nem szint, de a leörmegszettel együtt zártanak területek ("fordítottan - gyűjtő szint")



$$E_0 = E_m + E_n'$$

Meg kell adniuk a sz. és a fordítottan területek állapotait és közös vez. -et.

$$m, n \rightarrow P_{m,n} = P^{\star}$$

Keresniük  $P_m$  -et

$$P_m = \sum_n P_{m,n}$$

$$\text{ahol } E_n' = E_0 - E_m \text{ teljessé$$

telít az összegzést ezen  $n$ -re

leggyakrabban.

$E_2$  vez. -sorral minden a marginális vez.

és itt az energia összefüggés a mellelhetetlivel

★ Szint kihosszabbítom a szint vez. valószínűségeit  
nél a parabolitánál.

Vell még a fordítottan multiplicatív  $E_n' = E_0 - E_m$  szint

$$\propto (E_0 - E_m)$$

Tehát  $P_m \sim \propto (E_0 - E_m)$  azzal, a vez.  
a fordítottan megoldásnak minden állapotnak nincs  
szigetel (multiplicitásval) arányos

Kihosszabbítva, hogy a vez. sorral kisebb a fordítottan  
nál:  $E_m \ll E_0, E_n'$

$$P_{\text{m}} \sim \Omega'(E_0 - E_m)$$

↓

$$\ln P_m = \text{konst.} + \ln \Omega'(E_0 - E_m)$$

$$\text{Sorj jelek: } \ln \Omega'(E_0 - x) = f(x) = \ln \Omega'(E_0) - \frac{d \ln \Omega'}{d E'} \Big|_{E=E_0} \cdot x + \dots$$

$$f(x) \Big|_{x=0}$$

$$\ln P_m = \text{konst.} - \frac{d \ln \Omega'}{d E'} \Big|_{E=E_0} \cdot E_m =$$

$$= \text{konst}' - \frac{1}{k} \left( \frac{d \ln \Omega'}{d E'} \right) \Big|_{E=E_a} \cdot E_m = \frac{1}{T}$$

$S'(E')$  a tartalmi entropiajá illetve annak

a fundamentális egysége

Igy megírható a tartalmi hőmérsékletként

a definiciját.

$$\ln P_m = \text{konst}' - \frac{1}{kT} E_m$$

↓

→ Boltzmann-Gibbs idejel:

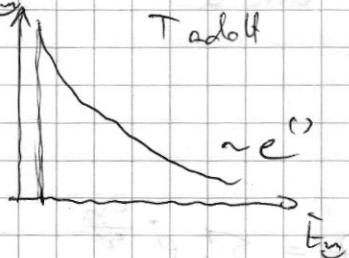
$$P_m \sim e^{-\frac{E_m}{kT}}$$

Lehet a hőmérséklet a működéshez  
elosztásnak egy parametere

→ Megjegyzések:

$$(i) \quad m + m', \text{ de } E_m = E_{m'} \rightarrow P_m = P_{m'}$$

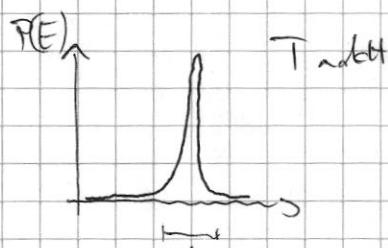
(ii)  $P_m$



A osz. alapján a potenciál vezető a legnagyobb és minden exponenciálisan csökken

A  $P_m$  a hirtelenállapot valószínűsége és nem pedig az energia vezető! Az energia elosztása teljesen más.  $P_m \neq P(E)$  utóbbit magának, hogy egy adott energiát hirtelen fellebbezen lehet megvalósítani

$$P(E) \sim \Omega(E) e^{-\frac{E}{kT}}$$



→ Az energia elosztása tartományban flattnak

(ha  $T$  nő, azon jobbabb felödör és szélesedik,  $\hat{E}$  a maximum)

$$S(\hat{E})' = \frac{1}{T} \Rightarrow \hat{E} = U$$

$$0 = [\ln P(E)]' = \left. \frac{d \ln \Omega(E)}{dE} \right|_{E=\hat{E}} - \frac{1}{kT}$$

Mivel  $\hat{E} \approx \bar{E} = U$  ezért gyakorlatilag mindketten érhető általános a belső energia definíciója

allapotosszeg:  $\geq$  ( $\neq$  allapotosszam)

a Boltzmann faktor összegeseinek  
entétele

$$P_m = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_m}{kT}}$$

$$\sum_m P_m = 1 \Rightarrow Z \equiv \sum_m e^{-\frac{E_m}{kT}}$$

*Lettres d'Anatole France à son fils*

16  
Chen qic  
7-28-2

ZATI 332 (mit Schwanenkuss)  
 S(E,N,V) fundamentalis egererlet  
 egeren aljzi termo

Stat 3rd & 6.

more than one species file *extensa* no; apparently *extensa* was  
pl cultoroddat

## T roquette kanikles

F szabályozza a fundamentalis  $F(T, V, N)$  & kötői alap törzsműveit.

Stabodenergie monoton wöchentlich; Stabodenergie mit zugehöriger

### Legendre transformació

$$E = U = U(S, V, N) \xrightarrow{\text{Legendre tr.}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F = U - TS \\ \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,N} = T \end{array} \right. \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \begin{array}{l} U(S,V,N) \\ S(T,V,N) \end{array}$$

ez is Ugyanazt az információt tartalmaz  
⇒ ugyanazt az információt van benne

Szabályezés u. megvált.

$$dF = dU - d(TS) = dU - \cancel{TdS} - SdT = -SdT - pdV + \mu dN$$

$\Downarrow$

$$\cancel{TdS} - pdV + \mu dN$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V, U} = -S \quad \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T, U} = -P \quad \left( \frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T, V} = \mu$$

$$F = U - TS \quad \Rightarrow \quad F = U + T \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,N} \quad \text{Helmholtz-energielat}$$

az a hozomány tárzatával  
szabadonról hozzájárult a művész szín alatt körülbelül ötven?

$$P_m = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_m}{kT}}$$

normaler  
Allgemein

$$\sum_m P_m = 1 \quad \Rightarrow \quad Z = \sum_m e^{-\frac{E_m}{kT}}$$

wurde oft fü-  
r die negativen

Stat. f. - def

$$F \equiv -kT \ln Z = F(T, V, N)$$

Ellenörzés - tényleges fundamentalizis csoportot

mikroscillapot függ V, N-től

2.)

A energia nem számos körben felbukkan  
körben való energia hogyan differenciál? Alkalmazásukat E  
Lélektan maximum a (legmagasabb valamennyiségi)  
max & átlag (átlátható)  
Term. hibában a kettő megegyezik.

$$U = \sum_m E_m P_m =$$

$$\frac{E}{E} = -\frac{E_m}{kT}$$

$$= \sum_m E_m \cdot \frac{e^{-\beta E_m}}{Z} = \text{jelölés } \frac{1}{kT} = \beta$$

$$= \sum_m E_m \frac{e^{-\beta E_m}}{Z} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(\beta, V, N)$$

All

$$\underline{\text{B2}} \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \cdot \ln Z = \frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} Z = \frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \cdot \sum_m e^{-\beta E_m} = \frac{1}{Z} \sum_m \frac{\partial}{\partial \beta} e^{-\beta E_m} =$$

Hőmérséklet növekedése  
= Lélektan  
=> energia megegyezik a hőmérsékleten

$$= \frac{1}{Z} \sum_m -E_m e^{-\beta E_m} = -U(T, V, N)$$

$$\Rightarrow U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \leftarrow \text{ezt sokat használjuk} \quad \frac{\partial U}{\partial T} \text{ hőkapacitás}$$

occurred for  
derivation

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = \left( -\frac{\partial}{\partial T} \ln Z \right) \frac{\partial T}{\partial \beta} = \frac{\partial \beta}{\partial T} = -\frac{1}{kT^2}$$

$$U = kT^2 \cdot \frac{\partial \ln Z}{\partial T}$$

Hogyan megfelel a Helmholtz konzervativitás

$$\underline{\text{B3}} \quad -kT \ln Z = \underbrace{kT^2}_{U} \frac{\partial \ln Z}{\partial T} + T \cdot \left[ \underbrace{-k \ln Z}_{\text{Helmholtz energia}} + \cancel{kT \frac{\partial \ln Z}{\partial T}} \right]$$

Konzervatív terapotikai módszerek ezeket megalapozva.  
alap alapotlósítók leírásában

Mikrokonzervatív s (állapotfunkció) -vel analóg az ittani

$$S = k \ln Z \leftrightarrow Z = e^{k \ln Z - F}$$

fund

Itt kettő elválasztva, meggyakorlatban a modellben bármitegyik terapotikai

Hogyan alakul ki az entropia ott hogyan minősítendő  
=> lehetőség az entropia általanosítására

$$S = \frac{\frac{\partial U}{\partial T} - F}{T} = \frac{1}{T} \left[ \sum_m E_m P_m + kT \ln Z \cdot \overbrace{\sum_m P_m}^1 \right] = -k \sum_m P_m \cdot \left[ -\frac{E_m}{kT} - \ln P_m \right]$$

$$S = -k \sum_m P_m \ln P_m \geq 0$$

állapotfunkcióhoz tartozó entropia  
(Neumann-féle entropia)  
információszerűben is megvalósulhat

Az entrópia kanonikus törzsgátlásmodja:

$$S = \frac{U - T}{T} = \frac{1}{T} \left[ \sum_m E_m P_m + kT \ln Z \cdot \underbrace{\sum_m P_m}_{=1} \right] =^* \\ - \frac{\partial F}{\partial T} \quad (\text{Helmholtz})$$

$$^* = -k \sum_m P_m \underbrace{\left[ -\frac{E_m}{kT} - \ln Z \right]}_{= \ln P_S}$$

$P_m$ : műfunkcionális eloszlás  
fgy.

→ Neumann-entrópia:

$$S = -k \sum_m P_m \ln P_m \geq 0$$

- Ez teljesleges törzgátlás módra érvényes összhanggal
- Ez teljesleges eloszlásra használható (Neumann fizetései!)
- = 0 mindenhez egyenlőpot 1 volt. -gel is a többi nulla

→ Műfunkcionális törzgátlásról:

$$P_m = \frac{1}{\Omega} \quad \text{Stat. fiz. postulátum, hogy fönstane!}$$

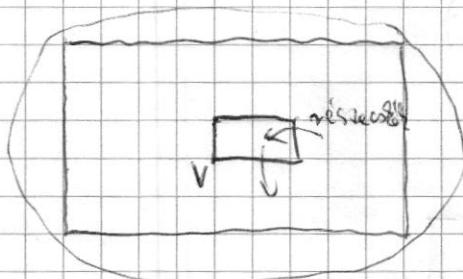


$$S = -k \sum_m \frac{1}{\Omega} \ln \frac{1}{\Omega} = k \ln \Omega$$

Összhangban van a Boltzmann entropiával.

## Az entropia nagytranszis törzsgálszabály:

→ Hő és részecské tartalym: megengedett a részecské szám változása.



$$m: E_m, N_m$$

A nulla részecskés eset is leleltetőr, de ennek az esetben a VSZ.-ge nagyon kicsi

- Egyszerűen egy extenzív áll. jelző rögzített: a hőfogat
- Ebben az esetben a rögzített intenzív áll. jelző a térmeli potenciál.

$$P_m = \frac{1}{Z} e^{-\frac{1}{kT} (E_m - \mu N_m)}$$

→ Normálisísi hőfogat:

$$\tilde{Z} = \sum_m e^{-\frac{1}{kT} (E_m - \mu N_m)} = \tilde{Z}(V, T, \mu)$$

→ Kvantumus törzsgálszabályban a fundamentális egyenlet a szabadenergia, a nagytranszis törzsgálszabályban a nagytranszis potenciál és a kapcsolat hozzájár.

$$F(T, V, \mu) \quad \xleftrightarrow{\text{legadás-tápl.}} \quad \Phi(V, T, \mu)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi = F - \mu N \\ \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T} = \mu \end{cases} \rightarrow N(\mu, T, V)$$

$\Phi$  fundamentális, hiszen Legendre-tápl.-val trapti eg-fundamentális hibát

→ Termodynamik erweiter:

$$d\bar{\Phi} = dT - d(\mu N) = -SdT - \underbrace{pdV + \mu dN - \mu dN - Nd\mu}_{dT}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial T}\right)_{V,\mu} = -S \quad \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial V}\right)_{\mu,T} = -p$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \mu}\right)_{V,T} = -N$$

→  $\Phi(V, T, \mu)$  egyetlen extenzív állapot fizikai függ.  
 ezért  $\Phi(\lambda V, T, \mu) = \lambda \bar{\Phi}(V, T, \mu)$  minden  $\lambda$ ,  $\Phi$  is extenzív.  $\bar{\Phi}$  leírja  $V$ -ban lineáris

$$\bar{\Phi}(V, T, \mu) = V \Psi(\mu, T)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial V}\right)_{T,\mu} = \Psi = \frac{\bar{\Phi}}{V} = -p \Rightarrow \boxed{-pV = \bar{\Phi}}$$

Ez tényezés azt - az igaz, ez nem fundamentális - meggyult.  $\bar{\Phi}(V, T, \mu)$  fundamentalis.

Nagyranodus tigrisalmond.

$$E_m, N_m : P_m = \frac{e^{-\frac{1}{kT}(E_m - \mu N_m)}}{Z} : Z = \sum_m e^{-\frac{1}{kT}(E_m - \mu N_m)}$$

$$\Phi(V, \mu, T) = ? \quad \Phi = F - \mu N = U - TS - \mu N$$

## Altalenos entropic fogalcum

$$S = -k \sum_m P_m \ln P_m$$

$$= -k \sum_m P_m \ln \frac{e^{-\frac{1}{kT}(E_m - \mu N_m)}}{\pi} =$$

$$= q \ln \tilde{\mathcal{Z}} \underbrace{\sum_{\text{all}} P_{\text{all}}}_{=1} - q \sum_{\text{all}} P_{\text{all}} \left( -\frac{1}{qT} \right) (E_{\text{all}} - \mu N_{\text{all}}) =$$

$$= q \ln \tilde{Z} + \frac{1}{T} \left[ \underbrace{\sum_m P_m E_m}_{U} - \mu \underbrace{\sum_m P_m N_m}_{\bar{N}} \right]$$

Az energia vonható része a belső energia, a másik pedig a részecskéstől való vonható része

$$TS = U - \mu N + kT \ln Z$$

$$\Phi \equiv -kT \ln \tilde{Z} = U - TS - \mu N \quad (\text{Termodynamikai törnyelvben})$$

$\downarrow$

$$\tilde{Z}(N, T, V) \quad (\text{Létezőként megírva})$$

## Kvantumus törzsa kismedd alkalmazása az Einstein modellhez:

- független és eggy dimenziós rezonansosztályokból
- az oszcillátorok rezonans stámai adja a működőkörök halmazát

$$\underline{m} : (u_1, u_2, \dots, u_N) \quad u_i = 0, 1, \dots \infty$$

Működőkörök esetben volt  $\sum_{i=1}^N u_i = M$



$$E = E_0 + \hbar \omega M$$

Ilt ez a feltétel nem adott, hiszen most az energia fizikai

$$E_m = \sum_{i=1}^N \hbar \omega \left( \frac{1}{2} + u_i \right)$$

↳ Adott működőkörrehoz tartozó energia

$$Z = \sum_{\underline{m}} e^{-\frac{1}{kT} E_m} = \sum_{u_1=0}^{\infty} \sum_{u_2=0}^{\infty} \dots \sum_{u_N=0}^{\infty} e^{-\beta \sum_{i=1}^N \hbar \omega \left( u_i + \frac{1}{2} \right)}$$

$$+ e^{-\beta \hbar \omega \left( u_1 + \frac{1}{2} \right)} \cdot e^{-\beta \hbar \omega \left( u_2 + \frac{1}{2} \right)} \dots e^{-\beta \hbar \omega \left( u_N + \frac{1}{2} \right)}$$

↳ Ilt használjuk ki, hogy független oszcillátorok esetén, részbenben nem kontinuálisan szorozat alakba

→ Az utolsó szemhéjból van a szorozat utolsó tagját nem lehet kiemelni

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \text{th} w} (n+1) = e^{-\frac{\beta \text{th} w}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta \text{th} w})^n = \frac{1}{1 - e^{-\beta \text{th} w}}$$

$\rightarrow$  Ez egy végtelen geometrikus sor

$$= e^{-\frac{\beta \text{th} w}{2}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\beta \text{th} w}} = \frac{1}{2(e^{\frac{\beta \text{th} w}{2}} - e^{-\frac{\beta \text{th} w}{2}})} = \left[ 2 \sinh \left( \frac{\beta \text{th} w}{2} \right) \right]^{-1} = 3$$

(zuta)

Szg.) a teljes állapot összeg:

$$Z = Z^N$$

Ez nem definíció! Az állapotösszeg definiciója:

$$Z = \sum_m e^{-\frac{1}{kT} E_m}$$

$$Z = Z^N \Rightarrow F = -kT \ln Z = -NkT \ln z = \\ = NkT \ln \left[ 2 \sinh \frac{\beta \text{th} w}{2} \right] = F(N, T)$$

A körzetenekban a  $Z$ - helyett  $S$ -t számoltuk.  $S = \sum \ln Z \Rightarrow S(E, N)$

$$S(T, N) = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_N = Nk \left[ -\ln \left( e^{\frac{\beta \text{th} w}{2}} - e^{-\frac{\beta \text{th} w}{2}} \right) - \frac{1}{2} \frac{d \ln \left( e^{\frac{\beta \text{th} w}{2}} - e^{-\frac{\beta \text{th} w}{2}} \right)}{d \frac{\beta \text{th} w}{2}} \left( -\frac{1}{kT} \right) \right]$$

$$= Nk \left[ -\frac{\beta \text{th} w}{2} + \ln \frac{1}{1 - e^{-\beta \text{th} w}} + \frac{\beta \text{th} w}{2} \frac{e^{\beta \text{th} w} + 1}{e^{\beta \text{th} w} - 1} \right] =$$

$$= Nk \left[ \ln \frac{1}{1 - e^{-\beta \text{th} w}} + \frac{\beta \text{th} w}{2} \frac{e^{\beta \text{th} w} + 1 + e^{-\beta \text{th} w} + 1}{e^{\beta \text{th} w} - 1} \right]$$

→ Ez ír összehasonlítható a microkanonikus esetnél, ugyanazt az entropia függelékét kapta (ha visstárajuk a  $P = -\frac{1}{kT}$  helyettesítést)

→ A füldönbőrű tényezőszámoldó arra utalja, hogy milyen eredményt, ha használjuk a Fermi-dinamikai töréstetet a használni is kell!

$$N \gg 1$$

→ Keresünk a belső energiát: a fundamentalis szemléletből származtatott töré, de van egy egyszerűbb számoldásmodja:

$$U = -\frac{\partial}{\partial P} \ln Z = -N \frac{\partial}{\partial P} \ln \frac{1}{Z} = N \frac{\partial}{\partial P} \ln \left[ 2 \sinh \frac{p_{\text{har}}}{2} \right]$$

$$= N c \ln \frac{p_{\text{har}}}{e} \cdot \frac{h\nu}{2} = E_0 \frac{e^{\frac{p_{\text{har}}}{2}} + e^{-\frac{p_{\text{har}}}{2}}}{e^{\frac{p_{\text{har}}}{2}} - e^{-\frac{p_{\text{har}}}{2}}} =$$

$$= E_0 \left[ 1 + \frac{2e^{\frac{p_{\text{har}}}{2}}}{e^{\frac{p_{\text{har}}}{2}} - e^{-\frac{p_{\text{har}}}{2}}} \right] = E_0 \left[ 1 + \frac{2}{e^{\frac{p_{\text{har}}}{kT}} - 1} \right]$$

$$U(N, T) = E_0 \left[ 1 + \frac{2}{e^{\frac{p_{\text{har}}}{kT}} - 1} \right]$$

Tehát az állapotosszeg P-szinten deriváltjával előáll a belső energia.

$\rightarrow$  Ha a mikroszálleapot halmozza a fizikai leh:

$$\psi : (q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) \quad f = N$$

$\rightarrow$  Mikroszállepot energiadis a fizikában a Hamilton-fgv.

Klasszikus esetben:

$$E_{\text{kv}} : H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 \right)$$

1 db oszcillátor

Ismerj az alkalmazás "reflektori" indícióit:

$\epsilon = 2N$

energiája

$$Z = \sum_m e^{-pE_m} \sim = \underbrace{\int_{q_1^0}^{\infty} \dots \int_{q_N^0}^{\infty} dq_1 \dots dq_N dp_1 \dots dp_N e^{-p \sum_{i=1}^N \left( \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 \right)}}_{\text{az oszcillátorokat}} \sum_m \text{folytonos esetre}$$

Itt is részt vesz az oszcillátorok frekvenciájának szerepe  
az  $e^{-pE_m}$ -el szorzandókra a hamilton-fgv.

$$Z = \dots = \tilde{Z}^N : \tilde{Z} = \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-p \sum_{i=1}^N \left( \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 \right)}$$

$$\tilde{Z} = \frac{1}{h} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-p \frac{p^2}{2m}} \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-p \frac{m \omega^2 q^2}{2}} \right] =$$

$$\sqrt{\frac{\pi 2m}{p}}$$

$$\sqrt{\frac{\pi m}{p \omega^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-dx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{h} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{8\pi T}{h \omega}$$

$$T = -\frac{1}{k} T \ln 2 = -\frac{1}{k} T N \ln 2 = -N k T \ln \frac{k T}{N k}$$

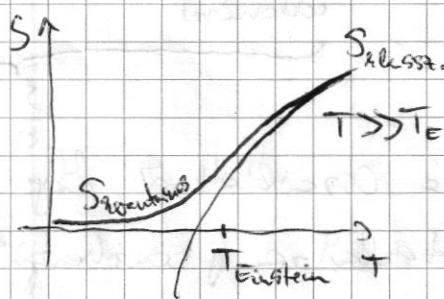
$$\Rightarrow S = -\frac{\partial T}{\partial T} = N k \left[ \ln \frac{k T}{N k} + 1 \right]$$

Összefüve ezt a fóamtumos eredményhez:

$$S = N k \left[ \ln \frac{1}{1 - e^{-\frac{N k}{k T}}} + \frac{\frac{N k}{k T}}{e^{\frac{N k}{k T}} - 1} \right] \quad \frac{N k}{k T} \ll 1$$

Magashőmelséges  
fázisok

$$\rightarrow N k \left[ \ln \frac{1}{\frac{N k}{k T}} + 1 \right] \quad \text{így viszakapunk a  
klasszikus esetet}$$



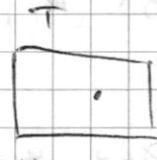
Tehát itt jölemezt meg az ellendirekt változásnak a fázisfáziménje: a Planck alkotta valastfázisban simán össze a fázis megoldás a magashőmelséges fázisokban.

$$Z = \frac{1}{h^{3n}} \int_{\text{GN}} dx_1 \dots dx_n dp_{1x} \dots dp_{nx} e^{-\frac{1}{kT} H(\dots)}$$

- GN db integrál: a teljes fazisábra integrálunk
- Az ideális gáz közelmítés egy másik feltételéhez, hogy minden gáz legyen, hogy elhanyagolható legyen a kölcsönhatás potenciál
- Ideális gázban igy a hamilton helyett, mivel csak a trinétrans energiával számolunk

$$Z = \frac{1}{h^{3n}} \int_{\text{GN}} dx_1 \dots dx_n dp_{1x} \dots dp_{nx} e^{-\frac{1}{kT} \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m}} =$$

$$= z^n$$



$$z = \frac{1}{h^3} \int d\beta_x \int d\beta_y \int d\beta_z e^{-\frac{1}{kT} \frac{p^2}{2m}} =$$

$$= \frac{V}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z e^{-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mkT}} =$$

$$e^{-\frac{p_x^2}{2mkT}} e^{-\frac{p_y^2}{2mkT}} e^{-\frac{p_z^2}{2mkT}}$$

$$= \frac{V}{h^3} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{-\frac{p^2}{2mkT}} \right]^3 = \frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}$$

Tehát az eggyrétegűre alkapötösszeg:

$$\beta = \frac{1}{kT} \rightarrow z \sim p^{-\frac{3}{2}}$$

### Oscillator rez. energija:

$$Z = Z^N \quad : \quad \beta = \frac{E}{k_B T} = \frac{1}{\rho k_B T}$$

$$U = E = - \frac{\partial}{\partial \rho} \ln Z = - N \frac{\partial}{\partial \rho} \ln (\beta k_B T)^N = N \frac{1}{\rho} = N k_B T$$

### Egyatomos gázok statisztikai fizika:

$(x_1, p_{1x}, \dots)$

$(p_{1x}, p_{1y}, p_{1z})$

$$N, \underline{m}: (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_N, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_N)$$

$$E_{\underline{m}} \rightarrow \delta U(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\bar{p}_i^2}{2m} + \sum_{(ij)} U(\bar{r}_i - \bar{r}_j)$$

$$\rightarrow \bar{p}_{1x}^2 + \bar{p}_{1y}^2 + \bar{p}_{1z}^2$$

→ Ideális gáz leírás: a részecskék közötti kölcsönhatást elhagyogunk

→ Egyatomos gázok rölkölési hatásai: nagyon rörel egy másikhoz erős tasztás lép fel, nagy távolságra pedig egy un. Van der Waals erő vanzás lép fel, aminek az ora egy indirekt dipolenváltás, ami jóval kisebb mint a stádios dipolus potenciálja

$$\frac{1}{r^6} \ll \frac{1}{r^2}$$

$$U(r) \propto \frac{1}{r^6}$$

$$\sim \frac{1}{r^6}$$

$$Z = z^N \quad U = -\frac{\partial}{\partial p} \ln Z = -N \frac{\partial}{\partial p} \ln z = -N \frac{\partial}{\partial p} \ln p^{\frac{3}{2}} = \\ = \frac{3}{2} N k T$$

$\rightarrow E_T$  az egyszerűsítés gizába belépő energiájának vonatkozóan összefüggés.  $E_T$ -t persze könnyebben megaphatjuk az összegzőtől eltekintve.

$$C_{V_m} = \frac{3}{2} N k$$

$\rightarrow$  Részarándelek a szabadenergiáról:

$$Z = z^N \rightarrow F(V, N, T) = -NkT \ln Z = -NkT \ln z = \\ = -NkT \left[ \frac{3}{2} \ln \frac{V}{NkT} + \ln V \right]$$

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{N,T} = \frac{NkT}{V} \quad S(T) = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N}$$

Probléma a fenti freiplettel:

$$F(2V, 2N, T) \stackrel{\text{tell}}{=} 2F(V, N, T)$$

Ebből ~~az entalpiából~~ szabad energiából levezethető a reverendői entalpia anomaliát. Ebből a mindenkora részlete lise Gibbs a saját elgondolását:

$$\ln V \text{ helyett } \ln \frac{V}{N} \text{ tell}$$



↓

$$Z = \frac{1}{N!} \sum_i e^{-\beta E_i} \xrightarrow{\text{ind. grt}} Z = \frac{1}{N!} 3^N$$

$$F = \underbrace{\dots}_{N!} + NkT \ln N!$$

$$= N(\ln N - 1) \quad (\text{Stirling})$$

$$F = -NkT \left[ \frac{3}{2} \ln \frac{2\pi mkT}{h^2} + \ln V \right] + NkT \ln N - NkT =$$

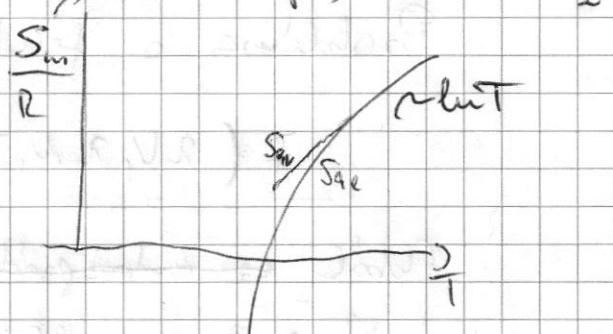
$$= -NkT \left[ \frac{3}{2} \ln \frac{2\pi mkT}{h^2} + \ln \frac{V}{N} \right] - NkT$$

Ezután az  $\frac{1}{N!}$ -nak a fizikai interpretációja hogyan közelítjük meg a valószínűségi összetételeket minden részszerven. A statisztikus fizika szabályai minden részszerven a kölcsönös állapotosszeget adnak.

$$S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,N} = Nk \left\{ \frac{3}{2} \ln \frac{2\pi mkT}{h^2} + \ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} + 1 \right\}$$

$$S(T,V,N)$$

(moldániai entropia)



Ez sem jól, mert az entropia pozitív definiált mennyisége, ítt viszont van által negatív értékkel is. Ebben az esetben a statisztikus entropia triplet helyett a reakciós entropiát kellenni.

→ A termikai potenciál rögzítésére:

$$\mu = \left( \frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V}$$

Az egységesre állapított összegből kijindulva:

$$z = V \frac{(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}{h^3}$$

A termikus hullámhossz definíciója:

$$\lambda_T = \frac{h}{(2\pi mkT)^{\frac{1}{2}}}$$

$$[h] = [q] \cdot [p] = [E] \cdot [t]$$

$$[mkT]^{\frac{1}{2}} = [p]^2 \cdot \frac{1}{2} = [p]$$

$$[\lambda_T] = [q]$$

$\lambda_T$  a hullámhossz származásban a legkisebb  
de Braglie hullámhosszával.

Jegyzet:

$$z = \frac{V}{\lambda_T^3}$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} = -kT \frac{\partial}{\partial N} \left[ \ln \frac{z^N}{N!} \right] = -kT \frac{\partial}{\partial N} \left[ N \ln z - \ln N! \right] *$$

$\downarrow$

$$\frac{N}{N(N-1)}$$

$$F = -kT \ln z = -kT \ln \frac{z^N}{N!}$$

$$* = -kT \left[ \ln z - \ln N! \right] = -kT \ln \left( \frac{N}{\lambda_T^3 N} \right)$$

$$\Rightarrow e^{\frac{F}{kT}} = \frac{\left( \frac{N}{\lambda_T^3 N} \right)}{\left( \frac{V}{N} \right)}$$

### Klasszikus tömegelásmód:

$$a \ll \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$$

(Részecskére szűméség)

$$\lambda_T = \frac{\hbar}{\sqrt{2\pi m k T}}$$

(de Broglie hullámhossz)

- A klasszikus részletek feltétele, hogy  $a \gg \lambda_T$  teljesüljön  $\Leftrightarrow$  (vagy esetleg) a hőmérséklet nagyon nagy
- A részecské mint hullámosonak elterező esetben átfedik egyenlőséget
- A hővetítőről csak a klasszikus részletekben érthető:

$$e^{\frac{f\mu}{kT}} = \frac{N}{3} = \frac{N}{V \cdot \lambda_T^{-3}} = \left[ \frac{\lambda_T}{\left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}}} \right]^3 \ll 1$$

$$\left| \frac{f\mu}{kT} \right| \gg 1 \quad \text{de } \mu < 0$$

Ezt fogjuk a graviaciális potenciálra.

Ebből visszatérjük az egységesített gáz törvényt, de ez csak ebben az esetben érthető, quantum-mechanikai tömegelásban már nem.

Kvantummechanikai ideális gáz.

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} = \sum_{i=1}^N \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i \right)$$

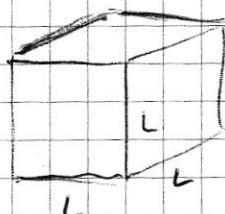
Keressük a rendszer hullámfüggvényét:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \Psi(\vec{r}_1) \Psi(\vec{r}_2) \dots \Psi(\vec{r}_N)$$

Há kölcsönhatás nélkül a rendszer

$\Psi(\vec{r}_i)$ : egy részre állapot

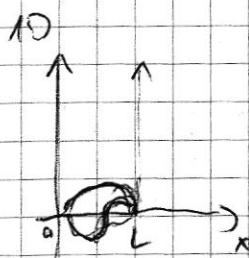
↳ s jelöléssel (single particle)



Hatásártalanításban  $L \rightarrow \infty$  vagy legy

↳ simának állandó marad

$E$  a végtelen mély potenciál gyökér  
esete (dobozba rögzítve)



1D

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Psi'' = E\Psi$$

$$\Psi(x) \sim \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad n=1, 2, 3, \dots$$

(nevezetű E-> nem fin. függetl.  
megoldásról fogunk!)

$$+\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 = E$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} n^2 = \frac{\hbar^2}{8mL^2} n^2$$

3D

$$\Psi_s(\vec{r}) \sim \Psi_x\left(\frac{\pi}{L}x\right) \Psi_y\left(\frac{\pi}{L}y\right) \Psi_z\left(\frac{\pi}{L}z\right) \quad s=\{x, y, z\}$$



Pl.: Egyszerűen megadt  
egyszerűsített (Ugyt {2,1,5})

$$\epsilon_s = \epsilon_{\text{part,ms}} = \frac{\hbar^2}{8mL^2} (r^2 + l^2 + m^2)$$

$$m \leftrightarrow \{r_1, l_1, m_1\}, \{r_2, l_2, m_2\} \dots$$

A helyes rendszer energiadja:

$$E_n = \sum_{i=1}^N \underbrace{\epsilon_{\{r_i, l_i, m_i\}}}_{S_i}$$

Ez a frekvencia valószínűsége a vonatkozó összetevőkkel

$\rightarrow$  A teljes potenciál Részletek: Kanonikus függvényekből

$$Z = \sum_m e^{-\beta E_m} = \sum_i \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} e^{-\beta \sum_{i=1}^N \epsilon_{\{r_i, l_i, m_i\}}} = \sum_i^{\infty}$$

$$z = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta \frac{\hbar^2}{8mL^2} (r^2 + l^2 + m^2)} = \left[ \sum_{r=1}^{\infty} e^{-\frac{\beta \hbar^2}{8mL^2} r^2} \right]^{\infty}$$

$$\begin{array}{c} \hline \hline \\ \hline \end{array} \quad \left| \Delta E \approx \frac{1}{L^2} \right.$$

Hc  $L \rightarrow \infty$  hatálytartományt képviseli,  
mivel az energia szintek összefüggésében  
nincsenek el folytonos spektrumot

alakulnak és ezért a  $\oplus$  szimmetria nem is teljes részben megvalósul. Egy folytonos integrállel ábrázolhatjuk az egész.

$$E_S = \frac{h^2}{8mL^2} (q^2 + l^2 + m^2) : z = \sum_S e^{-\beta E_S} \xrightarrow{L \rightarrow \infty}$$

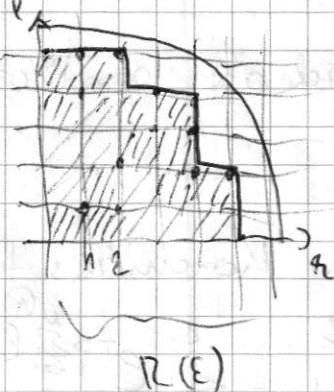
$\hookrightarrow [h, l, m]$

$$\sim \int_0^\infty dE \rho(E) e^{-\beta E}$$

$\hookrightarrow [c, \epsilon + \delta \epsilon]$

$w(\epsilon)$ : az an alkotó részre száma, amire  
feljut

$$\rho_{(h, l, m)}(E) \propto (q^2 + l^2 + m^2) \propto \frac{8mL^2}{h^2} e^{-\beta E}$$



Ebből következik:

$$[\rho(\epsilon) \Delta \epsilon = w(\epsilon + \Delta \epsilon) - w(\epsilon)] = dw$$

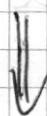
$\hookrightarrow w(\epsilon)$  differenciálja

Minden komponens faktoriálisan  $1 \times 1 \times 1$ -es töltés.  
Ez a komponens száma megegyezik az összes  
töredék felületeivel. Ha a gömb ingyenes  
tart sejtésekhez ( $R \rightarrow \infty$ ) akkor a töredék  
töredéka is a gömb töredéke közötti hálónáliság  
elhanyagolható lesz.

$$w(\epsilon) \approx \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{\pi}{G} \left( \frac{8mL^2}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \epsilon^{\frac{3}{2}}$$

Mivel  $h, l, m > 0$  végigis minden 8-nel  
gömböt vizsgálunk.

$$\rho(\varepsilon) d\varepsilon = dW = \frac{\pi}{6} \left( \frac{8\pi L^2}{h^3} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{3}{2} \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \right]$$



$$d\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2} \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon$$

$$\rho(\varepsilon) = \frac{\pi}{h^3} (2\pi)^{\frac{3}{2}} L^3 \overset{=V}{\sim} \varepsilon^{\frac{3}{2}}$$

$\hookrightarrow \varepsilon_2$  a termékben minden kíméletben a  $\varepsilon$ -hez tartozó potenciális legfelsőbb érték.

$\rightarrow$  Ebből kapható az egyszerűsített állapot összegét.

$$g = \frac{\pi}{h^3} (2\pi)^{\frac{3}{2}} V \int d\varepsilon \varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-\beta\varepsilon} =$$

$$\cancel{\text{d}\varepsilon = x} \rightarrow dx = \frac{1}{2\varepsilon^{\frac{1}{2}}} d\varepsilon = \frac{1}{2x} d\varepsilon$$

$$I = \int_0^\infty dx \frac{dx}{2x} \cdot x e^{-\beta x^2} = 2 \cdot \int_0^\infty dx x^2 e^{-\beta x^2} =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty dx x^2 e^{-\beta x^2} = - \frac{\partial}{\partial \beta} \int_0^\infty dx e^{-\beta x^2} =$$

$$\sqrt{\pi} \cdot \beta^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\sqrt{\pi} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \beta^{-\frac{3}{2}} \quad \beta = kT$$

$$\textcircled{*} = V \cdot \frac{(2\pi \frac{\pi}{kT})^{\frac{3}{2}}}{h^3} = V \cdot 2^{-\frac{3}{2}}$$

$\varepsilon_2$  megegyezik a fázisában lévő legmagasabb állapot összegét. Ez csak következik a teljesen elszigetelt számításból.

tethetősegéből

$\rightarrow$  A részecskék megülőhőséből teljesen segíből  
fordul el az az eredmény, amit a hullám-  
fúggvény szorzataláról történő felvállalásban  
használtunk fel.

$$(i) \Psi(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = \Psi_{S_1}(\bar{r}_1) \Psi_{S_2}(\bar{r}_2) =$$

$$\stackrel{\text{pl.}}{=} \Psi_{\{1,1,2\}}(\bar{r}_1) \Psi_{\{1,2,1\}}(\bar{r}_2) \neq \Psi(\bar{r}_1, \bar{r}_2)$$

Maxwell - Boltzmann : az adott részecskék  
megülőhőséből tethető

(ii) Böse : egeszt spinű részecskék esete

(iii) Fermi : fellegesztésű részecskék esete

(ii) : szimmetria nélküli hullámfüggvény

$$\Psi(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = \Psi_{\{1,1,2\}}(\bar{r}_1) \Psi_{\{1,2,1\}}(\bar{r}_2) + \Psi_{\{1,2,1\}}(\bar{r}_1) \Psi_{\{1,1,2\}}(\bar{r}_2) = \Psi(\bar{r}_2, \bar{r}_1)$$

(iii) : antiszimmetrikus hullámfüg.

$$\Psi(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = -\Psi(\bar{r}_2, \bar{r}_1)$$

Tehát a termodynamikai límelek egy közötti klasszifizálási lehetőséget ad a folytonos spektrum tulajdonságai miatt.

Az (anti)szimmetrizálás egy közötti kölcsönhatástól  
jelent a részecskék közötti erőt az (ii) és (iii) esetek  
ben igazából mind egyszerre van. (Hiszen minden  
feltétele a függelések.)

$$\Psi(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_N)$$

- (i) Megrögzöltethető az osztály részecskéi pl. Einstein modellben
- (ii) Bose Einsten részecskék, azaz az osztály típusai részecskék, melyeknek a spinje egész. Bárminely részecskét felcserevel a hullámfog. nem változik

$$\Psi(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_i, \dots, \bar{r}_j, \dots, \bar{r}_N) = \Psi(\bar{r}_{\sigma(1)}, \dots, \bar{r}_{\sigma(i)}, \dots, \bar{r}_{\sigma(j)}, \dots, \bar{r}_N)$$

- (iii) Fermi típusú részecskék: félbespinált osztály részecskék  
pl.: elektron, neutron, proton, deuterium  
Antiszimmetriás hullámfog.  $\Psi(r_1) = -\Psi(r_2 r_1)$   
 $\Rightarrow$  Bárminely részecské felcseréjére

Független rendszer  $\Rightarrow$  léteznél az egymisezőkkel ellapott  $S$   
(pl. oszcillátorral  $S$ -et az oszc. frekvenciámai adják)

$$(i) Szorzatalakban írás: \Psi(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N) = \Psi_{S_1}(\bar{r}_1) \Psi_{S_2}(\bar{r}_2) \dots \Psi_{S_N}(\bar{r}_N)$$

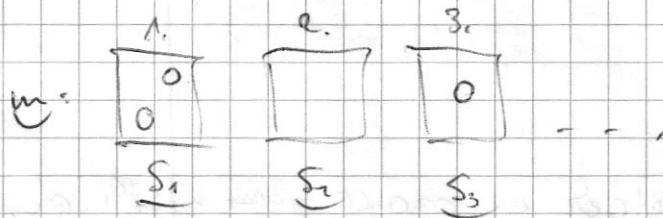
$r_1 \leftrightarrow r_2$  cserével változik a  $\Psi$  esetében jelenti a megrögzöltethető részecskéket.  $(r_1 S_1), (r_2 S_2)$  pl.

A mikroszöllapot előállítása:

$$\underbrace{m}_{S_1} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{S_2} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{S_3} \quad \dots \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{S_N}$$

Meg is lehet azonban a görögök, a görög részén az összes szöllapot szimmetrikus.

(ii) Base  
 $N=3$



$$\text{Pl.: } \{1, 1, 1\} \quad \{2, 1, 1\}$$

$$4_1(\bar{v}) = 4_{\{1, 1, 1\}}(\bar{v})$$

$S_i$ : olyan tételező algegator, a dobozba zárt részes-

~~4<sub>i</sub>~~ algegator is zárt B hozzárendeléssel jól leírható

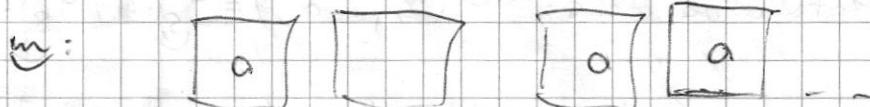
$$4(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = 4_1(\bar{v}_1) 4_2(\bar{v}_2) 4_3(\bar{v}_3) + 4_1(\bar{v}_3) 4_2(\bar{v}_2) 4_3(\bar{v}_1) + 4_1(\bar{v}_1) 4_3(\bar{v}_3) 4_2(\bar{v}_2)$$

Ez a szimmetrikált hullámfügg. a koordinált taggal. És normálban is teljesen.

Igy viszont már nem meghonlábözhetők a részterek (mindegyik származik a részterek)

(iii) Fermi

$N=3$  1. 2. 3. 4.



$$4(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = 4_1(\bar{v}_1) 4_3(\bar{v}_2) 4_4(\bar{v}_3) -$$

$$- 4_1(\bar{v}_2) 4_3(\bar{v}_1) 4_4(\bar{v}_3) + \dots = ^*$$

$\hookrightarrow n!$   $\Rightarrow$  a paralel szenírt elágazásai

$$^* = \det \begin{bmatrix} 4_1(\bar{v}_1) & 4_1(\bar{v}_2) & 4_1(\bar{v}_3) \\ 4_3(\bar{v}_1) & 4_3(\bar{v}_2) & 4_3(\bar{v}_3) \\ 4_4(\bar{v}_1) & 4_4(\bar{v}_2) & 4_4(\bar{v}_3) \end{bmatrix} \quad \text{Slater-det.}$$

~~Hc~~ ~~az~~ bármely allepotbaan 2 vegy több részeire van, arról a Slater determináns nulla. Ez a Pauli-elv.

Tehát minden Fermi-rendszerben mindenfajú-e a Slater determináns és enne vonatkozva a Pauli-elv.

→ Bose & Fermi rendszerekre:

$$\underline{m} \Leftrightarrow \{N_1, N_2, N_3, \dots\}$$

↳ Az <sup>gyakorlatban</sup> leggyakoribb alkalmazás a töltött szégek

A mikroalkapot meghatározó  $\{N_i\}$ -et meghatározzuk, ami Fermi esetben  $N_i \in \{0, 1\}$ , Bose esetben  $N_i \in \mathbb{N}$ .

$$N_m = \sum_s N_s = \sum_{i=1}^{\infty} N_i$$

↳ Adott mikroalkapotba a folyós részterek számát jelöli

$$E_m = \sum_s E_s N_s = \sum_{i=1}^{\infty} E_i N_i$$

Kanonikus eljárás szerint a folyós részterek nem leírhatók, mert nincs z.

Nagyrenoménsz törzsalosszadat:

$$\Phi = -kT \ln \tilde{Z}$$

$$\tilde{Z} = \sum_m e^{-\frac{1}{kT}(E_m - \mu N_m)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Általános képlet} \\ \text{tetraélejes rendszere} \end{array} \right\}$$

Fermi és Bose tépszűrőkkel sziszterezve:  
sziszterezéshez!

$$\tilde{Z} = \sum_m e^{-\frac{1}{kT}(E_m - \mu N_m)} = \sum_{N_1} \sum_{N_2} \dots \sum_{N_s} e^{-\frac{1}{kT} \sum_s N_s (\epsilon_s - \mu)}$$

A mindenlapotára  $\rightarrow$  összegzés az egészterülettel  
 a betöltöttsegére lehet felirni

Fermi esetén:  $N_i \in \{0, 1\}$

$$\sum_m = \sum_{N_1=0}^1 \sum_{N_2=0}^1 \dots e^{-\frac{1}{kT} \sum_s N_s (\epsilon_s - \mu)} \rightarrow [1 + e^{-\frac{1}{kT} (\epsilon_1 - \mu)}] \dots$$

Bose esetén:

$$\sum_m = \sum_{N_1=0}^{\infty} \sum_{N_2=0}^{\infty} \dots$$

$$\sum_{N_1=0}^{\infty} \left[ e^{-\frac{1}{kT} (\epsilon_1 - \mu)} \right]^{N_1} \xrightarrow{\text{Mellékírás}} \left[ 1 - e^{-\frac{1}{kT} (\epsilon_1 - \mu)} \right]^{-1}$$

$$\tilde{Z} = \prod_s \left[ 1 + e^{-\frac{1}{kT} (\epsilon_s - \mu)} \right]$$

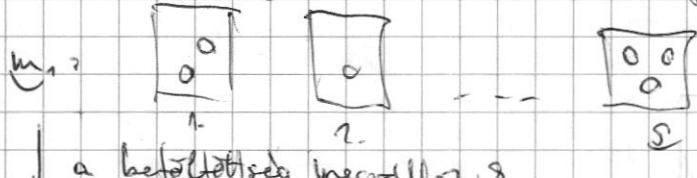
B

$$\prod_s \left[ 1 - e^{-\frac{1}{kT} (\epsilon_s - \mu)} \right]^{-1}$$

$$\ln \tilde{Z} = \sum_{S}^{\text{Fermi}} \ln [1 \pm e^{-\frac{1}{kT}(\epsilon_S - \mu)}]$$

Base ↪

$\bar{N}_S$ : egyszerűre állított betöltöttségeinek az átlaga  
egy triszkelit S állapotra



$m_s$

Fermi szabányon kívül az átlag  $\langle m_s \rangle$   $(0,1)$ -en belüli  
szám, Bose esetben egy pozitív egész

$$\bar{N}_S = \sum_m N_S P_{mS} = \sum_m N_S \frac{e^{-\beta(E_m - \mu N_S)}}{\sum} =$$

$$= \sum_m N_S \frac{e^{-\beta \sum_{S'} N_{S'} (E_{S'} - \mu)}}{\sum} = \frac{\partial}{\partial E_S} \ln \tilde{Z}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial E_S} \ln \tilde{Z} &= \frac{\partial}{\partial E_S} \left( \pm \sum_{S'} \ln [1 \pm e^{-\frac{1}{kT}(\epsilon_{S'} - \mu)}] \right) = \\ &= \pm \frac{\partial}{\partial E_S} \ln [1 \pm e^{-\frac{1}{kT}(\epsilon_S - \mu)}] = \pm \frac{\pm e^{-\frac{1}{kT}(\epsilon_S - \mu)} \left( -\frac{1}{kT} \right)}{1 \pm e^{-\frac{1}{kT}(\epsilon_S - \mu)}} = \\ &\downarrow S' = S \quad \text{tag meared with} \end{aligned}$$

$$= \left( -\frac{1}{kT} \right) \frac{1}{e^{-\frac{1}{kT}(\epsilon_S - \mu)} + 1}$$

$$\tilde{Z} = \sum_m e^{-\frac{1}{kT}(E_m - \mu N_m)} = \sum_m e^{-\frac{1}{kT} \sum_s N_s (E_s - \mu)}$$

$$\frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial E_s} = \sum_m \frac{1}{kT} N_s \left( -\frac{1}{kT} \right) e^{-\frac{1}{kT} \sum_s N_s (E_s - \mu)}$$



$$\widehat{N}_s = \frac{1}{e^{\frac{1}{kT}(E_s - \mu)} + 1}$$

↳ Fermi-Dirac vs. Bose-Einstein eloszlások  
a megfelelő esetekben

A belső energia:

$$U = \overline{E} = \overline{E_m} = \overline{\sum_s N_s E_s} = \sum_s \overline{N_s} E_s$$

$$\overline{N} = \overline{N_m} = \sum_s \overline{N_s}$$

Kvantum ideális gázhoz összefüggései:

$$m \leftrightarrow \{N_s\} \longleftrightarrow \boxed{e^0} \boxed{e^1} \boxed{e^2} \dots \boxed{e^S}$$

$$E_m = \sum_s N_s E_s \quad N_m = \sum_s N_s$$

A) Kanonikus feltételek mellett  $N_m = N$

$$Z = \sum_m e^{-\frac{1}{kT} \sum_s N_s E_s}$$

$\bar{N}_s$ : átlag számotte "fontoságú" kvantum ideális gázra

Táblázat:

$$\bar{N}_s = \sum_m N_s P_m = (-kT) \frac{\partial}{\partial E_s} \ln Z \stackrel{*}{=}$$

Az egyes részre illesztett mennyiségi rész a mikroszkopikus valószínűségeivel és összegzni kell.

Bizonyítás:

$$\stackrel{*}{=} (-kT) \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial E_s} \stackrel{*}{=}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial E_s} = \sum_m e^{-\frac{1}{kT} \sum_s N_s E_s} \cdot \left[ N_s \left( -\frac{1}{kT} \right) \right]_{s=s \text{ helyen}}$$

$$\stackrel{*}{=} \sum_m \underbrace{\frac{1}{Z} e^{E_s}}_{=P_m} N_s \quad E_s \text{ aránytól belátható.}$$

Maxwell - Boltzmann:

$$Z = \bar{Z}^N$$



$$\bar{N}_S = (-kT) N \frac{\partial}{\partial E_S} \ln \bar{Z} = (-kT) N \cdot \frac{1}{\bar{Z}} \frac{\partial}{\partial E_S} \bar{Z}$$

$$\bar{Z} = \sum_{S'} e^{-\frac{1}{kT} E_S} \Rightarrow \frac{\partial \bar{Z}}{\partial E_S} = e^{-\frac{1}{kT} E_S} \left( -\frac{1}{kT} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial S} \bar{N} \cdot e^{-\frac{1}{kT} E_S} = e^{-\frac{1}{kT} (E_S - \mu)}$$

$\sim$   
 $e^{-\frac{\mu}{kT}}$

Talált az egységes számításra alkalmazott  
betöltőttsége negyedik következő, ahol a stat.  
száma száma a részszámból az egységes  
alkalmazott (vagy a többi esetben).

Ez a Maxwell - Boltzmann eloszlás.

B) Nagyranulás henggáterrendel:

Fermi - Dirac: (itt minden egységes részalkalmazott összeg!)

$$\ln \tilde{Z} = \sum_{S'} [1 \pm e^{-\frac{1}{kT} (E_S - \mu)}]$$

~ : jelöli a nagyranulás henggáterrendel

+ : Fermi - Dirac

- : Bose - Einstein

$$\bar{Z} = \sum_m e^{-\frac{1}{kT} \sum_{S^z} N_{S^z} (\epsilon_{S^z} - \mu)}$$

Tehát:

$$\bar{N}_S \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_m N_S P_m = (-kT) \frac{\partial \ln \bar{Z}}{\partial \epsilon_S}$$

$$P_m = \frac{e^{-\frac{1}{kT} \sum_{S^z} N_{S^z} (\epsilon_{S^z} - \mu)}}{\bar{Z}}$$

A valószínűségi halmaz az m merődögle példájában a halmaz  $\ni P_m$  és egyszerűen számolható átlagot adja a statisztikai.

Bár:

$$\stackrel{*}{=} (-kT) \cdot \frac{1}{2} \sum_{S^z} e^{i\epsilon} \cdot \left[ \left( -\frac{1}{kT} \right) N_S \right]$$

Csak vannak  
beláttni

$$\begin{aligned} \bar{N}_S &= (-kT) \frac{\partial \ln \left( \sum_{S^z} [1 \pm e^{-\frac{1}{kT} (\epsilon_S - \mu)}] \right)}{\partial \epsilon_S} = \\ &= (-kT) \frac{\pm C - \frac{1}{kT} (\epsilon_S - \mu) \left( \frac{1}{kT} \right)}{1 \pm e^{-\frac{1}{kT} (\epsilon_S - \mu)}} = \\ &= -\frac{1}{e^{\frac{1}{kT} (\epsilon_S - \mu)} \pm 1} \end{aligned}$$

Fermi-Dirac:  $\bar{N}_S = \frac{1}{e^{\frac{1}{kT} (\epsilon_S - \mu)} + 1}$

Bose-Einstein:  $\bar{N}_S = \frac{1}{e^{\frac{1}{kT} (\epsilon_S - \mu)} - 1}$

Ezek az eloszlásfügg.-jei.

$$f(\epsilon) = V \cdot \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\epsilon}$$

$$f(\epsilon)d\epsilon : \dots = C\sqrt{\epsilon} \quad C \sim V$$

Spin degeneráció:  $s \rightarrow 2s+1$  pl.:  $s=\frac{1}{2} \rightarrow 2$

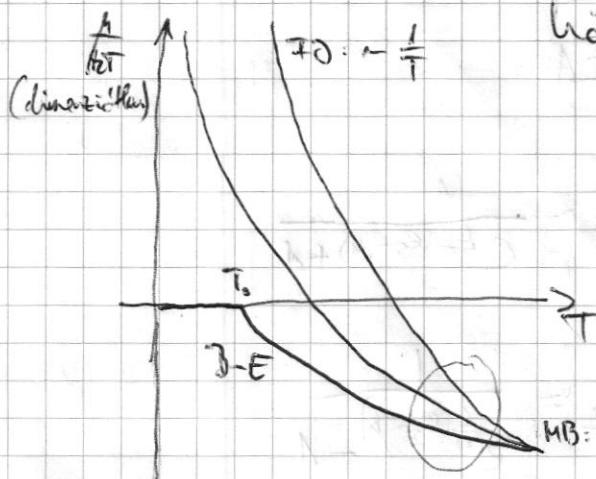
$$(i) \mu(T, \frac{N}{V})$$

$$\begin{aligned} N &= \sum_{\epsilon} \overbrace{N_{\epsilon}}^{N_{\text{tot}}} = \int_0^{\infty} d\epsilon f(\epsilon) \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{kT}(\epsilon - \mu)} + 1} = \\ &= V \cdot \left( \int_0^{\infty} \frac{d\epsilon \sqrt{\epsilon}}{e^{\frac{1}{kT}(\epsilon - \mu)} + 1} \right) \cdot (2s+1) \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$V \rightarrow \infty \Rightarrow$  integrál, mint formációhoz  
lineárisen alakul.

$$\frac{N}{V} = f(\mu, T)$$

Megköppje a reprezentatív  
sziméz, a kémiai potenciál és  
hőmérséklet körött.



$$\begin{aligned} \text{MB: } e^{\frac{\mu}{kT}} &= \frac{N}{V} = \frac{N}{V} \lambda_T^3 = \\ &= \frac{\mu}{V} \frac{h^3}{(2\pi m k T)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\frac{\mu}{kT} \sim \ln \frac{1}{T}$$

Ez lehúzza a glassztázis  
minimális stabilitását.

A Fermi-Dirac statisztikai potenciálja egy konstanshoz tart alkalmi hőmérsékleten, ~~a megkövérítés~~  
 Magashőmérsékleten a statisztikai egységsűrűség  
 (termodynamikai hőmérséklet meges hőm.-en.).

A Bose-Einstein egy  $T_0$  hőmérsékleten bele-  
 rágad a nulla reln. pot. elérésbe, ez a Bose-  
Einstein tendenciája. Ez azt jelenti, hogy  
 marosszabályos a betöltöttsége az  $\epsilon=0$  nulla energiás  
 állapotnál. Itt már más termodynamikai tulajdonságok is felhasználhatók mint  $T > T_0$  esetben.

Ha a hőam statisztikai lezárti tulajdonságai nem  
 tüntetik volna el meges hőmérsékleten, ott van  
 komolyabb feljelentésű volna a kvantummechanikai  
 tulajdonságokat, ezért miközött a klasszikus statisztika.

$$N_2 = \frac{1}{e^{\frac{1}{kT}(\epsilon_2 - \mu)} + 1} \approx e^{-\frac{1}{kT}(\epsilon_2 - \mu)} \quad e^{-\frac{\mu}{kT}} \gg 1$$

↳ A hőam statisztikai egységsűrűsége  
 A szisztemási termelhetőségi (bemeneti ábra)  
 a fizikai termelhetőségi termelhetőségekhez  
 nincsenek.

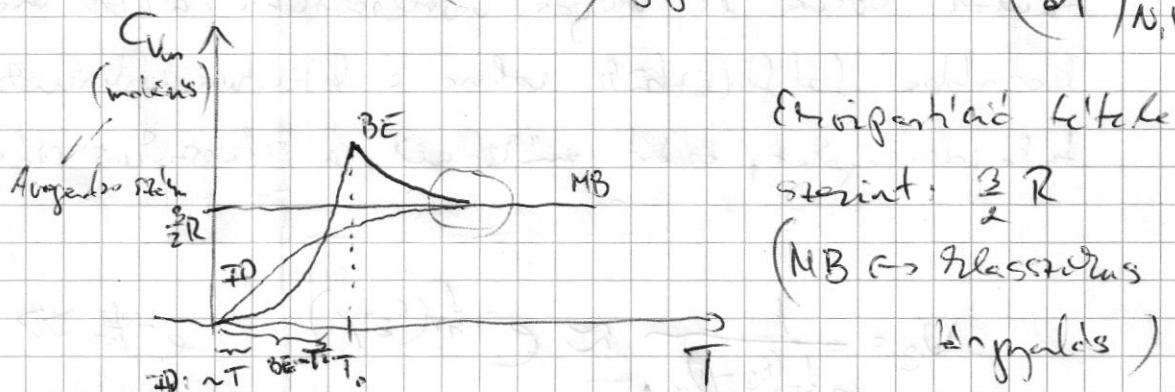
$$(ii) U = \overline{E} = \sum_{\Sigma} N_{\Sigma} \overline{\epsilon_{\Sigma}} = \sum_{\Sigma} N_{\Sigma} \epsilon_{\Sigma} \star$$

Mit  $\epsilon_{\Sigma}$  neu thermodynamische energieig  
ezist az öllagoldás módosított feljel.

$$\star \int_0^{\infty} dE g(\epsilon) \cdot \epsilon \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \mu}{kT}} + 1} = V \cdot g(V, T)$$

A belső" energiát megkaptak a freimai potenciál  
elő a hőmérséklet függ.-tól. Mivel tudjuk a  
 $p(T, \frac{V}{N})$  függvényt, fogadjuk a szabályos ~~feljel~~  
~~feljel~~

$$\rightarrow \text{feljel } U(V, T, \frac{V}{N}) \text{ függ.} \rightarrow C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{N, V}$$



Energiafokozat leltára

szint:  $\frac{3}{2} R$

(MB  $\rightarrow$  klasszikus

helyettes)

Az integrált MB- és hőszámválság összeadja  
a  $\frac{3}{2} R$  függvényt. A FD és BE eltérően  
eltevődik.

Megkövesedésekkel ritkán megjelenik a freimai potenciál  
tanulmány

(iii)

$$P(T, \frac{N}{V})$$

$$\text{MB: } PV = NkT$$

Kvantum ad. görne a meghatározó tényezőkkel működik:

$$gN = -\bar{\Phi} = \sqrt{T} \ln \tilde{Z}$$

Ebből adottan kiindulva a meghatározó tényezőkkel:

$$\bar{\Phi} (\pm) \sqrt{T} \int_0^{\infty} dE g(E) \ln \left[ 1 \pm e^{\frac{1}{kT}(E-\mu)} \right]$$

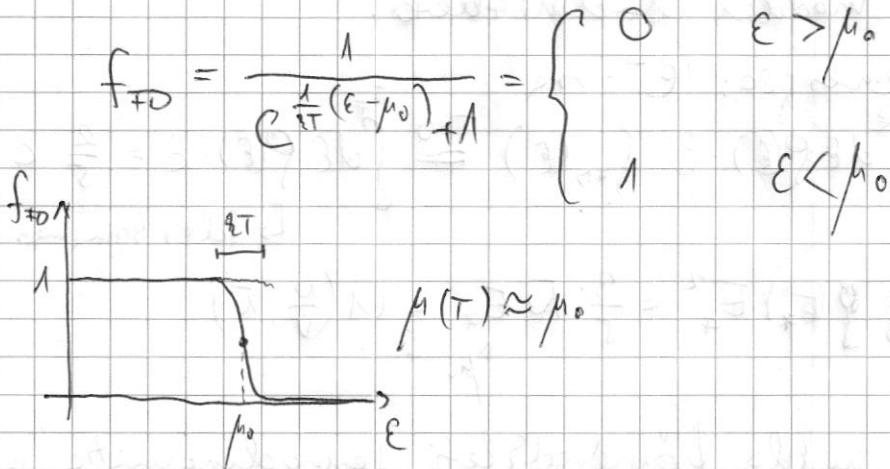
$$\text{Cell: } PV = \frac{2}{3} U \quad \text{eredményt kapunk minden statikusban}$$

Fermi - Dirac:

$$\rho(\epsilon) = (2s+1) \sqrt{\frac{2\pi}{h^3}} \frac{1}{(2m)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\epsilon}$$

 $T=0$ 

$$\bar{N}_S = \frac{1}{e^{\frac{1}{kT}(\epsilon_S - \mu)} + 1} - f_{FD}(\epsilon_S)$$



$$\bar{N} = \sum_S \bar{N}_S = \int_0^\infty d\epsilon \rho(\epsilon) f_{FD}(\epsilon) \stackrel{T=0}{=} \int_0^\infty d\epsilon \rho(\epsilon) \cdot 1 = C \cdot \frac{2}{3} E_F^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} E_F \rho(E_F)$$

Fermi energia:

$$\Rightarrow \frac{\bar{N}}{V} = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot E_F^{\frac{3}{2}} \Rightarrow E_F = \left( \frac{3}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{h^2}{2m} \left( \frac{\bar{N}}{V} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\mu(T=0, \frac{\bar{N}}{V})$$

Fermi hömörsélel:

$$E_F \equiv kT_F \quad kT \ll E_F \Leftrightarrow T \ll T_F$$

(De ez nem alacsony hömörsélelfű eset, mint  $T_F$  maga)

Két mennyiség: tömeg és színsg (restegre színsg)

$$\text{Pl: } \frac{\bar{N}}{V} \approx 10^{28} \text{ m}^{-3} \quad m = m_e \quad (e^- \text{ tömeg}) \Rightarrow T_F = 2,97 \cdot 10^3 \text{ K}$$

$$T_F = \begin{cases} 3,77 \cdot 10^4 \text{ K} & : \text{Na} \\ 13,0 \cdot 10^4 \text{ K} & : \text{Fe} \\ 8,16 \cdot 10^4 \text{ K} & : \text{Cu} \end{cases}$$

Tehát szabályosan  $e^-$ -ra  $\approx 0 \text{ K}$  hömörsélelfű.

$\text{He}^3$ : 3 nukleon és  $T_F \approx 0,5 \Rightarrow$  függelhető  
a klasszikus módon, de az e<sup>-</sup> a fentiek  
nemcsak kvantummechanikai tömeges  
móddal érhető el.

Belső energia:  $E^* - \infty$

$$U = \int_0^\infty dE \rho(E) \cdot E \cdot f_{\neq 0}(E) \stackrel{T=0}{=} \int_0^{E_F} dE \rho(E) \cdot E = \frac{2}{5} \cdot C \cdot E_F^{\frac{5}{2}} =$$

$\hookrightarrow$  feles spin, mert  $e^- = C \cdot E^{\frac{1}{2}}$

$$= \frac{2}{5} \int_0^{E_F} \rho(E_F) E_F^2 = \frac{3}{5} \bar{N} E_F = U\left(\frac{N}{V}, \bar{v}\right)$$

$\hookrightarrow \mu_0$

(A nulla hőmérsékleti termodynamika az alapján  
poti kvantummechanika.)

Ez a függelén rendszere alapjálapító belső energia.

$$\rho V = \frac{2}{5} U = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \bar{N} E_F \Rightarrow \rho = \frac{2}{5} \frac{\bar{N}}{V} E_F$$

Összefelvér a klasszikus állapoteggyel:

$$\text{Maxwell-Boltzmann } \rho = \frac{N}{V} \frac{8\pi}{3}$$

$\hookrightarrow$  Szemben ezzel a Fermigázhoz a nulla  
hőmérsékleten is van nyomás, ami a  
Pauli-szabály következménye.

Alacsony hőmérsékletű hőkapacitás: (Sommersfeld-féle)

$$e^--gal \quad \bar{N} = \frac{2}{3} E_F \rho(E_F)$$

$\hookrightarrow$   $\frac{E_F}{E_F + \frac{1}{2}kT} \rightarrow$  gerjesztődő e- és szivárgási  
 $E_F$ : gerj. hőtér

$$C_V \Leftrightarrow \Delta U \approx (\text{gerjesztett } e^- \text{-szám}) \cdot (\text{gerjesztési energia}) =$$

$$= (kT) \rho(E_F) \cdot (kT)$$

$\hookrightarrow$  e<sup>-</sup> miatti enyhebb változás az energiáról

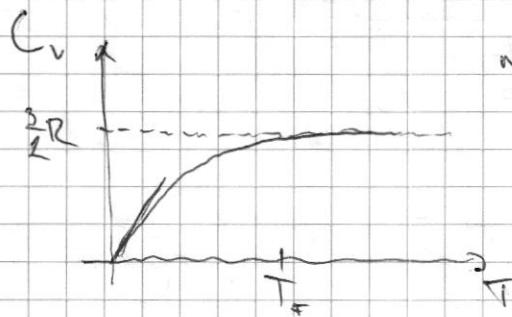
$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V, \bar{N}} = \frac{\partial \Delta U}{\partial T} \approx k^2 \rho(E_F) \cdot T \approx \underbrace{U}_{\sim N} \cdot \underbrace{\rho(E_F)}_{\frac{kT}{E_F}} \cdot \underbrace{\frac{kT}{E_F}}_{\frac{1}{R}} \approx \bar{N} \left( \frac{kT}{E_F} \right)^2$$

Sommefeld-modell bei erdnaher Temperatur:

$$C_V = \frac{\pi^2}{2} k_B N \left( \frac{2T}{E_F} \right) + C \left( \frac{2T}{E_F} \right)^2 + \dots$$

$\underbrace{\quad}_{\text{A numerisch sonst ein großer Radikal}}$

A numerisch sonst ein fester oder großes Radikal  
nun treptur weg als ein  $\frac{\pi^2}{2}$  tritt ein!



A schätzt aus Maxwell-Boltzmann  $\lambda_T \approx \frac{\hbar}{\sqrt{2m k_B T}} \ll \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$

Für die Teilchenzahl exakt gleich  $T \gg T_F$

Berechnung:  $\frac{\hbar^2}{m k_B T} \ll \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{2}{3}} \approx \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{1}{E_F}$

↓

$$\frac{1}{k_B T} \ll \frac{1}{E_F} = \frac{1}{8T_F}$$

↓

$$T_F \ll T$$

## 1) Termodinamikai fogalmak

Munka (térfogati, irreverzibilis)

Hő

I. Főtételes

II. Főtételes

III. Főtételes

Claussius-entópia

Nernst-tétel

Irreverzibilis és reverzibilis foglyamat: spontán entrópia

Kvázisztatikus folyamat

Állapotjelző: intenzív és extenzív, sűrűség

Szabadsági fok: általában, tiszta rendszer

Fundamentális egyenlet: entrópia, belső energia, szabad energia, nagykanonikus potenciál

Állapotegyenlet

Mérhető mennyiségek: hőkapacitás, fajhő, kompresszibilitás, hőtágulás

## 2)

Mikorszkópikus állapot, mikroállapotok halmaza

Fáziscella

Fázistérfogat és energia hiperfelület

Multiplicitás (kvantum és klasszikus)

Boltzmánn-entrópia

Entrópia LEV

## 3)

Einstein-modell

Alapállapot energiája, gerjesztettség

Leszámolás LEV

Stirling-formula

Entópia és energia, hőkapacitás LEV

Karakterisztikus hőmérséklet

Doulong-Petit szabály

Deby-modell

Entrópia hőmérséklet függése LEV

## 4)

Valószínűség

Átlag és szórás

Egyenlő valószínűségek elve

Ergodicitás

## 5) - 6)

Kanonikus valószínűség

Boltzmann-Gibbs képlet LEV

Állapotösszeg

Szabadenergia (Legendre és Boltzmann)

Helmholtz-egyenlet

Belső energia (átlag)

Általános entrópia

Nagykanonikus valószínűség és állapotösszeg

Nagykanonikus potenciál (Légenré, térfogat, entrópiá)

Kémiai potenciál

## 7)

Állapotösszeg LEV

Kanonikus entrópia LEV

Kanonikus belső energia LEV

## 8)

Állapotösszeg LEV  
Gauss-integrál  
Szabadenergia és entrópia  
Magashőmérsékletű limesz  
Ekvipartíció tétele

9)

Állapotösszeg  
Egyetlen részecske állapotösszege  
Ekvipartíció tétele  
Szabadenergia és egyetemes gáztörvény  
Keveredési entrópia anomália LEV  
Termikus hullámhossz  
Kémiai potenciál

10)

I. Munka:  $\delta W = -pdV$   $\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{sdrl.}} + \dots \quad \} \text{folyamatra}$   
 II. Hő: termikus energiacserére  $\delta Q = TdS$   $\quad \} \text{folyamatra}$

I. Törételel:  $dU = \delta Q + \delta W$   $dU = \text{Rögzített hő} \text{ és rajta véz. mű}$

II. Törételel:  $\oint \frac{dQ}{T} = 0$  felszínleges anyagra és fén folyamatra  
 (spontán folyamatok esetén a magasra hajtott rendszerek entropidiák nem csökken)

III. Törételel: OK hőátmenetben az anyagot felbukkanásban az entropia 0.

Claussius entropia:  $dS = \frac{\delta Q}{T}$

Nernst-törételel:  $S_p = \int_0^P \frac{\delta Q}{T}$  Referenciapont OK.

Irreverzibilis folyamat:  $dS_{irr} > 0$  ha  $dS_{sp} = 0$  akkor is.

$$dS = dS_{\text{spontán}} + \underbrace{\frac{\delta Q}{T}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{\delta W_{\text{int}}}{T}}_{\text{hőátles}} + \dots$$

pl. szilárdas

Kvazi-izotatmusrus folyamat: inf. munkavégzés  $\Rightarrow$  spontán entropia mininál.

Allapotjelző: állapot, teljes differenciál

Intenzív:  $T, p, \mu, (\varphi)$  kiegészítők

Extenzív:  $S, n, U, V, \dots$  rendszert méretével arányos

$$\text{Szimmetria: pl. } S_{\text{molekulás}} = \frac{S}{n} \quad U_{\text{molekulás}} = \frac{U}{n}$$

Szabadsági forrás: független állapotjelzők száma a rendszerben

Tisztá rát.: 3 szab. forrás Keverék: 3 + szab. forrás

Fundamentális egyenlet: minden információ kiugrikhető belőle

$$dU = TdS - pdV + \mu dN$$

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} dU + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} dV + \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V} dN = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{V} dV - \frac{\mu}{N} dN$$

$$dT = -SdT - pdV + \mu dN$$

$$d\bar{\Phi} = -SdT - pdV - N\mu$$

Allapotegyenlet: Fund. egy. egyenlíthetőre vonatkozó differenciálegyenletek

Mehető menetiségek:

$$C_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,N}$$

$$C_P = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P,N}$$

$$\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P,N}$$

$$\gamma_T = - \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T,N} \quad (\text{izoterm})$$

$$\gamma_T = - \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_{S,N} \quad (\text{adiabatikus})$$

- 2) Mirrosztópírus állapot: atomi állapotok, a mirosztópírus állapotot felépítő belső elemi állapotok  
 Miroszállapotok halmozza: az kvantumszámok lehetséges összegei halmozza

Fáziscella: folytonos fázisállapot felosztása, mérete  $h^f$   
 Energia hiperfelület: adott  $E = H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$  érintések tartozó felület  
 dimenziója:  $2f - 1$

Fázisfogat: fázisáll.  $E > H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$  része

Multiplicitás:

$$\Omega(E) = \Omega(M) \text{ ahol } M = \sum_{i=1}^N n_i \quad (E \text{-hez tartozó miroszáll. száma})$$

$$\Gamma(E) = \int_{-h^f}^{h^f} \dots \int dq_1 \dots dq_f dp_1 \dots dp_f \Rightarrow \Omega(E, \delta E) = \frac{1}{h^f} (\Gamma(E + \delta E) - \Gamma(E))$$

Boltzmann-entropia:  $S(E, N, V) = k \ln \Omega(E, N, V) \wedge S = k \ln \Omega(E, 0)$

Entropia:  $\Omega(E_1) = \Omega_1(E_1) \Omega_2(E_2) \Rightarrow \frac{d}{dE_1} k \ln \Omega_1 > \frac{d}{dE_2} k \ln \Omega_2 \Rightarrow T_2 > T_1$

- 3) Einstein-modell: fülek oszc. rész. áramás részerei (adott  $w$ ), meghibásodható  
 Alapállapot energiája:  $E_0 = \hbar w \sum_{i=1}^N (n_i + \frac{1}{2}) = N \underbrace{\frac{\hbar w}{2}}_{E_0 \text{ alap}} + \hbar w \sum_{i=1}^N n_i \underbrace{\hbar w M}_{\text{gejtséktől}}$

Leszámolás:  $M = \frac{E - E_0}{\hbar w} \quad M + N = \frac{E + E_0}{\hbar w} \quad \Omega(E, N) = \binom{M + N - 1}{M}$

Stirling-formula:

$$\ln N! \approx N(\ln N - 1)$$

Entropia, energia, hőkapacitás:

$$S(E, N) = \frac{k}{\text{h}\nu} \left[ (E + E_0) \ln \frac{E + E_0}{2E_0} - (E - E_0) \ln \frac{E - E_0}{2E_0} \right]$$

$$E(T, N) = E_0 + 2E_0 \frac{1}{e^{\frac{\hbar\nu}{kT}} - 1} = E_0 + \frac{N \hbar\nu}{\frac{\hbar\nu}{kT} + 1} \approx NkT \quad (\text{elvártáció})$$

$$C = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_N = Nk \frac{\left( \frac{T_E}{T} \right)^2 e^{\frac{T_E}{T}}}{\left( e^{\frac{T_E}{T}} - 1 \right)^2} \Rightarrow C_{30} = 3 \cdot C_{10}$$

Karakterisztikus hőmérséklet:  $T_E = \frac{\hbar\nu}{2}$

Dulong-Petit-szabály:  $C_m = 3R$  ha  $N = N_A \Rightarrow R = N_A k$

Deby-modell: "Különböző"  $w_i$ -k, Oramiál  $\sim T^3$ -öt mutatnak a részletek  $S(T)$ ,

$$S(T, N) = Nk \left[ \ln \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\nu}{kT}}} + \frac{\frac{\hbar\nu}{kT}}{e^{\frac{\hbar\nu}{kT}} - 1} \right]$$

4) Valószínűség:  $P_m = \frac{N_m}{N_{\text{össz}}} \rightarrow$  alkalmazott a nsz. érinti  $y_m$ -et  
Növesz  $\rightarrow$  összes a nsz. által érintett mikroáll.-dr.

Atlag és szórás:  $\bar{A} = \frac{\sum_m N_m A_m}{N_{\text{össz}}} = \sum_m P_m A_m \quad A_m: \text{teljes fiz. mennyiség}$

$$\sigma^2 = \overline{(A - \bar{A})^2} = \sum_m P_m (A_m - \bar{A})^2 = \sum_m P_m A_m^2 - 2\bar{A} \sum_m P_m A_m + \bar{A}^2 \sum_m P_m = \bar{A}^2 - \bar{A}^2$$

Egyenlő "valószínűségek" elve:  $P_m = \text{állandó} = \frac{1}{\Omega(E, N)}$  (fiz. mikrosz. nsz.)

Ergodicitás: minden lehetséges állapotot bejár-e a nsz.

5)-6) Kannonikus valószínűség:  $P_m = \sum_n P_{m,n}$  ahol  $E_n = E_0 - E_m \Rightarrow \Omega'(E_0 - E_n)$

Boltzmann-Gibbs Réplet:  $P_m \sim e^{-\frac{E_m}{kT}}$

Energia valószínűsége:  $P(E) \sim \Omega(E) e^{-\frac{E}{kT}}$

A'llapot összeg: Kell  $\sum_m P_m = 1 \Rightarrow Z = \sum_m e^{-\frac{E_m}{kT}} \Rightarrow P_m = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_m}{kT}}$

Szabad energia:

$$\left\{ \begin{array}{l} F(T, V, N) = U(S, V, N) - TS(T, V, N) \\ \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,N} = T \quad \text{Fund.} \Rightarrow \left( \frac{\partial F}{\partial S} \right)_{V,N} = -S \end{array} \right.$$

$$F(T, V, N) = -\frac{1}{2}T \ln Z$$

Helmholtz-egyenlet:

$$F = U + T \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V,N}$$

Belső energia:

$$U = \bar{E} = \sum_m E_m P_m = \sum_m E_m \frac{e^{-\frac{E_m}{kT}}}{Z} = \sum_m E_m \frac{e^{-\mu E_m}}{Z} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} (p, V, N)$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}$$

Általános entropia:

$$S = \frac{U - F}{T} = \frac{1}{T} \left[ \sum_m E_m P_m + \frac{1}{2}T \ln Z \left[ \sum_m P_m \right] \right] = -\frac{1}{T} \underbrace{\sum_m P_m \left[ \frac{E_m}{kT} - \ln Z \right]}_{\ln P_m}$$

$$S = -\frac{1}{k} \sum_m P_m \ln P_m \geq 0$$

Nagykanonikus valószínűség és állapotosság:

$$P_m = \frac{1}{Z} e^{-\frac{1}{kT}(E_m - \mu N_m)}$$

$$Z(V, T, \mu) = \sum_m e^{-\frac{1}{kT}(E_m - \mu N_m)}$$

Nagykanonikus potenciál:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(V, T, \mu) = F(T, V, N) - \mu N(\mu, T, V) \\ \left( \frac{\partial F}{\partial N} \right)_{V,T} = \mu \quad \text{Fund.} \Rightarrow \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right)_{V,T} = -N \end{array} \right.$$

$$\Phi(V, T, \mu) = V \Psi(\mu, T) \Rightarrow \left( \frac{\partial \Phi}{\partial V} \right)_{T,\mu} = \Psi = \frac{\Phi}{V} = -p \Rightarrow -pV = \Phi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = U - TS - \mu N \\ \Phi = -\frac{1}{2}T \ln Z \end{array} \right. \quad TS = \frac{1}{2}T \ln Z + U - \mu N$$

Kémiai potenciál: a nagykanonikus térfogatnál egyetlen interakciós állapotban

Termodynamikai mennyiségek:

$$\mu(T, \frac{N}{V}): \quad \bar{N} = \sum_S N_S = \int_0^{\infty} dE f(E) \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{kT}(E-\mu)} + 1} = V \cdot \int_0^{\infty} \frac{dE f(E)}{e^{\frac{1}{kT}(E-\mu)} + 1} = (2S+1) \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}}$$

$$f(E) = V \cdot \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E} \quad \frac{\bar{N}}{V} = f(\mu, T)$$

$$M-B: \quad e^{\frac{\mu}{kT}} = \frac{\bar{N}}{V} = \frac{N}{V} \lambda_T^3 = \frac{N}{V} \frac{h^3}{(2\pi m k T)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \frac{\mu}{kT} \sim -\ln T$$

$$F-D: \quad N_S = \frac{1}{e^{\frac{1}{kT}(E-\mu)} + 1} \approx e^{-\frac{1}{kT}(E-\mu)} \quad e^{-\frac{1}{kT}} \gg 1$$

$$U = \bar{E} = \sum_S \bar{N}_S E_S = \sum_S \bar{N}_S E_S = \int_0^{\infty} dE \rho(E) E \frac{1}{e^{\frac{1}{kT}(E-\mu)} + 1} = V \cdot g(\mu, T)$$

$$U(V, T, \bar{N}) \rightarrow C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V, \bar{N}} \rightarrow C_V = \frac{3}{2} R$$

$\rho(T, \frac{N}{V})$ :

$$M-B: \quad pV = NkT$$

$$pV = -\bar{\Phi} = kT \ln \bar{Z} = \pm kT \int_0^{\infty} dE \rho(E) \ln \left[ 1 \pm e^{-\frac{1}{kT}(E-\mu)} \right]$$

Nyoma's és belső energia:

$$pV = \frac{2}{3} U \Leftrightarrow \begin{cases} pV = NkT \\ U = \frac{3}{2} NkT \end{cases}$$

$$\rho(E) = C E^{\frac{1}{2}} \quad [E \cdot \rho(E)]' = [C E^{\frac{3}{2}}]' = \frac{3}{2} C E^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \rho(E) \quad U = \bar{E}$$

$$pV = \pm kT \frac{2}{3} \int_0^{\infty} dE [E \cdot \rho(E)]' \ln \left[ 1 \pm e^{-\frac{1}{kT}(E-\mu)} \right] = \frac{2}{3} \int_0^{\infty} dE \rho(E) \frac{1}{e^{\frac{1}{kT}(E-\mu)} + 1} = \frac{2}{3} U$$

parciális integrállal

Degeneriert Fermi gäz:  $T = 0$

$$\rho(E) = (2s+1) \sqrt{\frac{2\pi}{h^3}} \left(\frac{2m}{e}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{8}$$

$$\bar{N}_S = \frac{1}{e^{\frac{E_S - \mu}{kT}} + 1} = f_{FD}(E_S) = \begin{cases} 0 & E > \mu \\ 1 & E < \mu \end{cases}$$

$$\bar{N} = \sum_S \bar{N}_S = \int_0^\infty dE \rho(E) f_{FD}(E) \stackrel{T=0}{=} \int_0^\infty dE \rho(E) = C \cdot \frac{2}{3} E_F^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} E_F \rho(E_F)$$

$$\frac{\bar{N}}{V} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} E_F^{\frac{3}{2}} \Rightarrow E_F = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{h^2}{2m} \left(\frac{\bar{N}}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$E_F = \sqrt{kT_F}$$

$$U = \int_0^\infty dE \rho(E) \cdot E \cdot f_{FD}(E) \stackrel{T=0}{=} \int_0^\infty dE \rho(E) \cdot E = \frac{2}{5} C E_F^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{3} \bar{N} \rho(E_F) E_F^2 = \frac{3}{5} \bar{N} E_F^3$$

$$\rho V = \frac{2}{3} U = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \bar{N} E_F^3 \Rightarrow \rho = \frac{2}{5} \frac{\bar{N}}{V} E_F^3$$

$$e^- \cdot m \cdot \bar{N} = \frac{2}{3} E_F \rho(E_F)$$

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,0} = \frac{\partial (\Delta U)}{\partial T} \approx k^2 \rho(E_F) \cdot T \approx \underbrace{k}_{\sim \bar{N}} \cdot \underbrace{\rho(E_F) E_F^2}_{\frac{2T}{E_F}} \underbrace{\frac{2T}{E_F}}_{\sim \bar{N}} \approx \bar{N} k \frac{2T}{E_F}$$

Egyrészesre állapotosszeg:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i = \sum_{i=1}^N \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i \right] \quad U(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N) = U_S(\tilde{x}_1) \dots U_S(\tilde{x}_N)$$

$$1D \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' = E \psi \quad \psi(x) \sim \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} q^2 = \frac{\hbar^2}{8mL^2} q^2$$

$$3D \quad U_S(\tilde{x}) \sim U_q\left(\frac{n\pi}{L}x\right) U_c\left(\frac{m\pi}{L}y\right) U_m\left(\frac{w\pi}{L}z\right)$$

$S = \{q, l, m\}$  adott állapot

$$E_S = E_{\{q, l, m\}} = \frac{\hbar^2}{8mL^2} (q^2 + l^2 + m^2)$$

$m \leftrightarrow \{q_1, l_1, m_1\}, \{q_2, l_2, m_2\}, \dots$

$$E_m = \sum_{i=1}^N S_i = \sum_{i=1}^N E_{\{q_i, l_i, m_i\}}$$

Dobozba zárt részszövege:

$$Z = \sum_{\infty} e^{-\beta E_S} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\beta \sum_{i=1}^N E_{\{q_i, l_i, m_i\}}} = Z^N \quad \left( \sum_{i=1}^N = \sum_{q_1=1}^{\infty} \sum_{l_1=1}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} \right)$$

$$E_S = \frac{\hbar^2}{8mL^2} (q^2 + l^2 + m^2) \quad Z \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \int dE \rho(E) e^{-\beta E}$$

$$w(E) (\text{fállapotosszám}): \quad E_{\{q, l, m\}} < E \quad \rightarrow (q^2 + l^2 + m^2) < \frac{8mL^2}{\hbar^2} E \equiv R^2$$

$$\Rightarrow \rho(E) \delta E = w(E + \delta E) - w(E) = dw$$

$$w(E) \approx \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{\pi}{6} \left( \frac{8mL^2}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} E^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \rho(E) = \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} L^3 \sqrt{E}$$

$$Z = \frac{2\pi}{h^3} (2m)^{\frac{3}{2}} V \int_0^{\infty} dE E^{\frac{1}{2}} e^{-\beta E} = V \frac{(2m\pi^2 k T)^{\frac{5}{2}}}{h^3} = V \cdot 2^{-3}$$

Egyrészben a rendkívül komplex állagot átlagos betöltöttsége:

$$\underbrace{m}_{\text{szám}} \leftrightarrow \{N_1, N_2, \dots\}$$

$N_S$ : egyrészben az állapot betöltöttsége

Miről állapot teljes részletezésünk:

$$N_m = \sum_S N_S = \sum_{i=1}^n N_i$$

$$E_m = \sum_S E_S N_S = \sum_{i=1}^n E_i N_i$$

$$\overline{N}_S = \sum_m N_S P_m \quad \overline{N} = \overline{N_m} = \sum_S \overline{N}_S$$

$$\text{Kanonikus: } N = N_m \quad Z = \sum_m e^{-\frac{1}{kT} E_m} = \sum_m e^{-\frac{1}{kT} \sum_S N_S E_S}$$

$$\overline{N}_S = \sum_m N_S P_m = (-kT) \frac{\partial}{\partial E_S} \ln Z = (-kT) \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial E_S} = \sum_m \frac{1}{Z} e^{(E_S)} \underbrace{N_S}_{=P_m}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial E_S} = \sum_m e^{-\frac{1}{kT} \sum_S N_S E_S} \cdot \left[ N_S \cdot \left( -\frac{1}{kT} \right) \right] \quad S=S'$$

$$\text{Nagykanonikus: } \widetilde{Z} = \sum_m e^{-\frac{1}{kT} \sum_S N_S (E_S - \mu)}$$

$$\overline{N}_S = \sum_m N_S P_m = (-kT) \frac{\partial}{\partial E_S} \ln \widetilde{Z} = (-kT) \frac{1}{\widetilde{Z}} \sum_m e^{(E_S)} \left[ \left( -\frac{1}{kT} \right) N_S \right]_{S=S'}$$

Nagykanonikus állapotosszeg: Fermi és Bose részszerebrane

$$\widetilde{Z} = \sum_m e^{-\frac{1}{kT} E_m - \mu N_m} = \sum_{N_1} \sum_{N_2} \dots \sum_{N_n} e^{-\frac{1}{kT} \sum_S N_S (E_S - \mu)} \quad \begin{cases} \uparrow \\ \downarrow \end{cases} \quad \begin{cases} \left[ 1 + e^{-\frac{1}{kT} (E_1 - \mu)} \right] \\ \left[ 1 - e^{-\frac{1}{kT} (E_1 - \mu)} \right]^{-1} \end{cases}$$

$$\widetilde{Z} = \prod_S \left[ 1 \pm e^{-\frac{1}{kT} (E_S - \mu)} \right]^{\pm 1}$$

$$\ln \widetilde{Z} = \pm \sum_S \ln \left[ 1 \pm e^{-\frac{1}{kT} (E_S - \mu)} \right]$$

Elosztásor:

$$M-B: \quad Z = z^n \quad z = \sum_{S_i} e^{-\frac{1}{kT} E_S}$$

$$\bar{N}_S = (-kT) N \frac{\partial}{\partial E_S} \ln z = (-kT) N \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial E_S} = \frac{N}{z} e^{-\frac{1}{kT} E_S} = e^{-\frac{1}{kT} (E_S - \mu)}$$

$$= e^{\frac{\mu}{kT}}$$

F-D \& B-E:

$$\begin{aligned} \bar{N}_S &= (-kT) \frac{\partial}{\partial E_S} \ln \bar{Z} = (-kT) \frac{\partial}{\partial E_S} \left[ + \sum_S \ln \left[ 1 \pm e^{-\frac{1}{kT} (E_S - \mu)} \right] \right] = \\ &= (-kT) \frac{\left( \frac{1}{kT} \right) e^{-\frac{1}{kT} (E_S - \mu)}}{1 \pm e^{-\frac{1}{kT} (E_S - \mu)}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{kT} (E_S - \mu)} \pm 1} \end{aligned}$$

Azonos részecskék hullámfüggvénye:

M-B: megkülönböztethető részecskék  $\Rightarrow$  szorzatban hozás

$$U(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = U_{S_1}(\bar{n}_1) U_{S_2}(\bar{n}_2) \neq U(\bar{n}_2, \bar{n}_1)$$

függetlenek  $\Rightarrow$  3 egynézetesre állapotok

B: nem megkülönböztethetők  $\Rightarrow$  szimmetrikus hull. fgg.

$$\forall i, j: U(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_i, \dots, \bar{n}_j, \dots, \bar{n}_N) = U(\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_j, \dots, \bar{n}_i, \dots, \bar{n}_N)$$

$N_i \in \mathbb{N}$ ,  $S_i$ : dobásba járt részecskére állapotok

F: antiszimmetrikus bármely részecskére felcserélése

$$U(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = -U(\bar{n}_2, \bar{n}_1)$$

Slater-determinans

$$\det \begin{bmatrix} U_1(\bar{n}_1) & \dots \\ \vdots & \ddots \\ U_n(\bar{n}_n) & \dots \end{bmatrix}$$

Pauli elv:  $2 \leq$  részecskére egy dobozban  $\Rightarrow \det \underline{S} = 0$