Statisztikus fizika

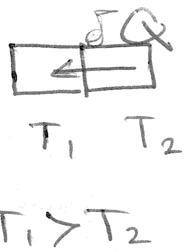
14.00

egyensúlyi ~ ról lesz szó.

Szeretné a (fenomenologikus) termodinamika összefüggéseit mikroszkopikus szinten megmagyarázni.

Szilárd anyagok részecskéi között ugyan ∅ elhanyagolható, de mégis tárgyalhatók (független oszcillátor?) gázokat és szilárd anyagokat tárgyalunk.

Az entrópia



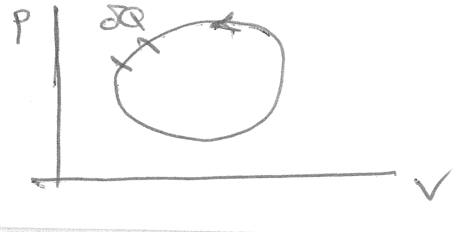
2 rdsz között termikus khat (e. izoláltak) engedünk meg ⟹ magasabb T-jű részről alacsonyabbra E áram folyik.

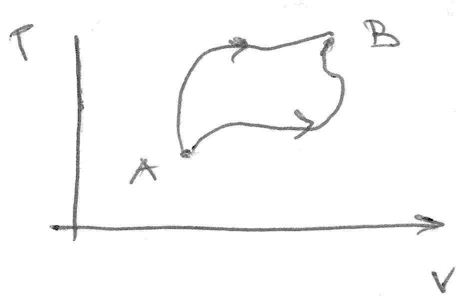
Itt az E csere eszköze. $\delta \Longleftrightarrow d$

itt nem! ezért meg kell különböztetnünk. Egy folyamatra jellő infinitezimális ~ miről van szó. ⟺ állapotra jellemző ~ változásait jelenti

$$\delta Q = T dS \longrightarrow dS = \frac{\delta Q}{T}$$

ezt az egyenletet azért írom föl, mert teljes tdi körfolyamatra, akármilyen anyagra $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$. (Ez a II. főt. tdi megfogalmazása)





$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T} = S_B - S_A$$

csak a végpontoktól függ

azt mondom, ez az entrópia tel.-a.

ez a tel útfüggetlen $\Rightarrow$ bevezetek 1 mennyiséget, ami már csak az állapotjelzőktől függ.

(Ha ezt csak δQ-val néznénk: $\oint \delta Q \neq 0$! ezért működnek a hőerőgépek)

Tehát II. főtétele az entrópia def.-ójának lehetőségét teremti +.

(Belső E def.-ja: $\oint (\delta Q + \delta W) = 0$ Belső E jellegű állapotjelző)

Entrópia állapotjelző. (még: T, p, V, μ, N)
Ha 1 rdsz termikus 1nsúlyban vannak, ezek mind az adott állapotra jell. értékben van. Nem adhatom + ezek mindegyikét tetszőlegesnek. →
Minden rdsz esetén van: makroszkopikus szab.-i fok:

f makroszkópikus: azon állapotjelzők száma, amiknek értékét tetszőlegesen beállíthatom és az összes többi kiszámítható ezekből.

Tiszta, egykomponensű rendszere: $f_{makr.} = 3$
Ha ezt az esetet választom, lehetőségeim:

$S(N,T,V)$

$S(V,P,\mu)$

$\boxed{S(U,V,N)}$ → ez több infót tartalmaz, mint a többi *

$S(U,T,V)$

u: belső E.

$\cancel{S(T,p,\mu)}$ ez nem jó, mert mind intenzív áj.

3 intenzív állapotjelzőből mindig csak 2 fgtlen.

Mindig kell lenni egy extenzívnek, amivel tudom a rdsz nagyságát.

* $S(V,U,N)$ fundamentális egyenlet.

Ha adott anyagra az S-t ezek fgv-ben ismerem, akkor az összes hőtani jellőit ki tudom fejezni.

$$\frac{\partial S(U,V,N)}{\partial U} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \frac{1}{T} \longrightarrow T(U,V,N)$$

$$\downarrow$$

$$U(T,V,N)$$

7. ... -ből az állapotegyenlet

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} = \frac{p}{T} \longrightarrow p(U,V,N)$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V} = -\frac{\mu}{T}$$

$$S(U,V,N) \longrightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \frac{1}{T} \\ \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{p}{T} \\ \frac{\partial S}{\partial N} = -\frac{\mu}{T} \end{cases} \Longrightarrow$$

$dS =$ ....

S a függő v.

$y(x)$

Tailor: $dy = y - y_0 = y'|_{x_0} dx + \cancel{\frac{1}{2} y''|_{x_0} dx^2 + \ldots}$

Ez még ∅ differenciál, csak ha dx nagyon kicsi.

$$dS = \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N}}_{=\frac{1}{T}} \cdot dU + \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N}}_{=\frac{p}{T}} dV + \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,U}}_{=-\frac{\mu}{T}} dN$$

ez a többváltozós Tailor-sor első rendje

$$TdS = dU + pdV - \mu dN$$

entrópiára vonatkozó f. egyenlet diffs alakja

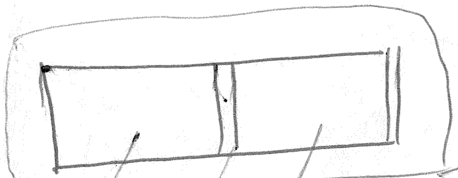
Eddig 1komponensű rdszekre vonatkozott...

$S(U,V,N_1,N_2,\dots N_r)$ $\Rightarrow$ minél több a komponensek száma, annál nagyobb fszab

komponensek mdszámai.

$$\left(\frac{\partial S}{\partial N_i}\right)_{U,V,N_j} = -\frac{\mu_i}{T} \Rightarrow$$ Minden kompnek saját kémiai potenciálja van.

(K)



Kihúzzuk a dugattyút. Mi történik gáz entrópiájával?

$\Delta S = S_2 - S_1$ (Δ: nagy változás!)

Entrópia változói közt: V, ez + változik, ezért változik az entrópia! Az U nem változik?

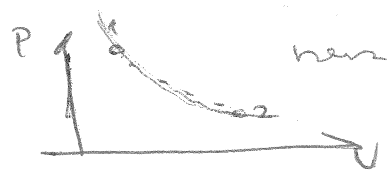
$S(U, V, N_i)$
$\uparrow \; \uparrow$
? !

U nem változik! (I főtétel: akkor változik, ha munka v hőközlés van: szigetelés van + vákuummal szemben $\emptyset$ kell munkát végezni:)

$$\Delta S = S_2 - S_1 = S(V_2) - S(V_1) > 0$$

Térfogattal hogy változik az S?

Id. gáz esetén:



nem egyensúlyi állapotokon keresztül ment, de 1súlyiból 1súlyiba U áll közben $\Rightarrow$

1. és 2. azonos izotermán vannak?

Eddig: $TdS = \delta Q$

$TdS = \delta Q$ → ebből azt kár, h Snek ∅ szabadna változnia.

↓ ?!

Entrópiaváltozásnak egyéb forrásai vannak!
Entrópia nagyon nem-megmaradó.
S keletkezni szeret.
Akkor keletkezik, ha 1 makroszkópikus rdsz ∅ egyensúlyban. Spontán, magától indul el a foly az egyensúly felé. Ki kell egészíteni a kiindulás egyenletet:

$$\boxed{dS = \frac{\delta Q}{T} + \underbrace{dS_{spontán}}_{\geq 0} + \frac{\delta W_{irr}}{T}^{*} + \ldots}$$

Pl:
Elején egyensúlyi.
Kihúzzuk: új környi feltételek, nem 1nsúlyi áll
→ gáz kiterjed, felveszi az új 1nsúlyi állapotot, közben spontán entrópia termelődik.

Szokás mondani, h minden nemegyensúlyi S csak növekszik. Ez ∅ m. igaz. Csak $\delta Q/T$ tag kizárásával. (Ez zárt rdszt jelent.)
Ha δQ ⊖, az entrópia akár csökkenthne is!

A spontán entrópiavált az a mindig ⊕!

*S változásnak 1 forrása munkavégzés is.
(pl keverési munka: irrev. munka.

(Másik: térfogati mv. olyan..., ez nem változtat a rendezetlenség mértékén.)

Spontán entrópia mindig növekszik az egyensúlyi állapot felé törekvés során.
↳ rendezetlenebb állapotot jelent.
↳ ezért jelenti S a rendezetlenség mértékét.

A stattiz alapjai

S statisztikus talapozása.

Boltzmann-féle entrópia. Ehhez:

Mikroszkópikus állapotok

- Kvantumos tárgyalás

ált. a Schr.-t szokták tekinteni. Az időfüggetlen 1 sérték-hlet ubár. $\hat{H}\Psi = E\Psi$, ennek mo-a E, Ψ, 1 problémára sok mo, sok E áll, mindhez tartozik ~ fgv. A melyikről van szó, azt a kvszámokkal teszik egyértelművé. $\Psi_{n,l,m,s}$ H atom esetében E valójában csak n-től függ. (ti. mindhez Δ ~ fgv.) : degenerált.

Statfizben: multiplicitás = hányszorosan elfajult egy E szint.

1 mikroáll egy, a kvszámok által pontosan, részletesen leírt kvmechanikai állapot. (egy fgtlen ~ fgv. Egy ilyenhez tartozik E. Ez ált elfajult. Makroszkopikusan nagyon elfajult.)

A rdsz E-sajátállapotát a kvszámok részletek tadásával adjuk +.

(P1) Einstein-féle oszcillátor rdsz

N db független lins oszcillátor.
Ez a kristályos/üvegszerű szilárd anyagok modellje.

Modellhez tartozik egy ω frekvencia minden oszhoz.

Kvmban E-sé-Inkt. $\hat{H}\Psi = E\Psi$

lins. oszc-t úgy kapjuk, h a lins osc. Ham-opját írjuk:

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2\right)\Psi = E\Psi$$

Mo.: $n = 0, 1, \ldots$

Egy kis n-hez tartozik

E_n E.érték $E_n = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + n\right)$

és

$\Psi_n(x) \sim$ fgv. Bonyolult.

Ha 1 db osc van, annak van 1 db kvszáma, aminek értéke ∞ sokféle lehet.

Ha sok (N) osc. van, akkor mi a helyzet?

(ha ugyanaz az ω?): $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \ldots + \hat{H}_N$

$$\underbrace{\Psi(x_1, x_2 \ldots x_N)}_{} = \Psi_{n_1}(x_1) \cdot \Psi_{n_2}(x_2) \ldots \Psi_{n_N}(x_N)$$

függetlenséget f.gyxbe vesszük

ez akkor is így van, ha ϕ függetlenek.

$\hat{H}_1$ itt mindig csak x_1-re hat, stb!

Alapáll.: ha minden $\psi_{n_i}(x_i) = \emptyset$

$(n_1, n_2, \ldots, n_N)$

Pl 5, 7 128

Mikroáll.: ha az ilteni össz. kvszat tadom.

Jelölés: $\underset{\smile}{m} \Longleftrightarrow (n_1, n_2 \ldots, n_N)$

az ekvivalens egy mikroállapottal, aminek kvszi + vannak adva.

Mikroálltól függ az E értéke:

$$E_{n_1 n_2 \ldots n_N} \equiv E_{\underset{\smile}{m}} = \sum_{i=1}^{N} \hbar\omega (n_1 + \tfrac{1}{2}) =$$

$$= \underbrace{\hbar\omega \sum_{i=1}^{N} n_i}_{= M\hbar\omega} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\hbar\omega N}_{\equiv E_0} = \cancel{\ldots}$$

$= M\hbar\omega$ teljes rdsz gerjesztettsége

az az, amit akkor kapunk, ha az össz. kvsz. nulla.
Ez az alapálli E-ja a teljes makroszkopikus rdsznek
$\equiv E_0$

$$= E_0 + M\hbar\omega$$

Multiplicitás (lesz az entrópia defjában a fontos mennyiség). A multiplicitás,

Esajátértékek hányszorosan degeneráltak.
Elfajultság azért van, mert ugyanahhoz az M-hez
Dtélehippen jutunk Δ n-ekkel.

$\Omega(E)$ = adott E-hez tartozó multiplicitás

(Kihasználjuk, hogy majd nagyon nagy számokkal dolgozunk → kdi 6ézet)

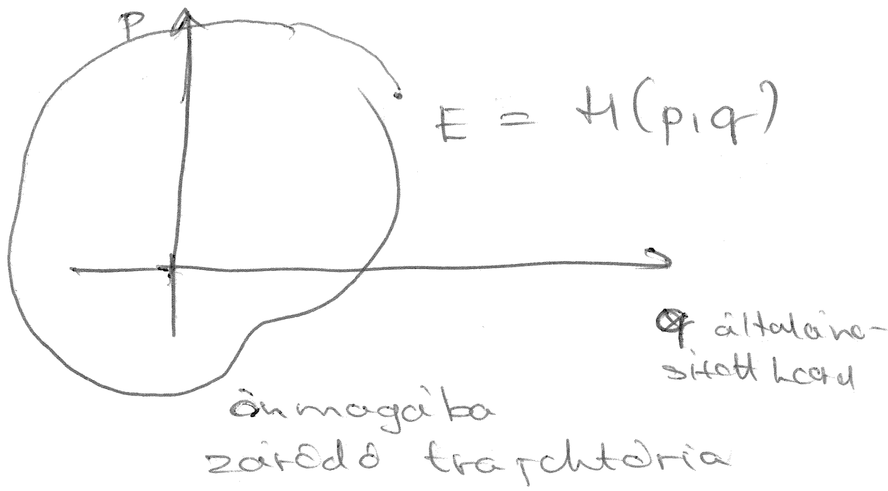
Entrópia pl csak teli Gázrészben lesz érvényes!
(hátan a makroszkópikus testek fizikája)

Klasszikus fizi rdszben hogy jellemezzük értelműen a ~~mikroszkópikus adat~~ rdsz 1 mikroszkópikus állapotát?

x, v_x tadásával ax már Φ lenne független. Részecskék sebességét és helyét kell megadni. Statfiz ocb helyett jobban szereti az impulzust tadni, s a kl. mechanikba Hamiltoni változatát használja.

kezdeti feltételek, amik rögzítik rdsz további időfejlődését

rdsz dinamikai fejlődését a fázistérben adják t.



Pl. $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 =$
$= H(p,q)$ oszc rdszre

Fázistérben adott E-nak 1zárt görbe felel t.

Ha N részecske van → a fázistér dimenziója:
3N · 2

f: mikroszkópikus szabi fokok száma
(index nélkül) = azoknak az általánosított
koordinátáknak a száma

1 atomos ~~mol. esetén~~ 3
— II — mol : 5

Ha az f: ⟶ 2f a fázistér dimenziója

Ha f a szabi fokok száma, 2f -es a fázistér

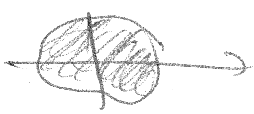
$H(q_1, \dots q_f, p_1 \dots p_f) = E$

Bevezetjük:

$$\Gamma(E) = \int dq_1 \dots q_f \int dp_1 \dots dp_f \cdot 1$$

$\downarrow$

$H(p,q) < E$ azzal a feltétellel. – Ham kisebb, mint egy rögzített érték.
Ez 1D-sben



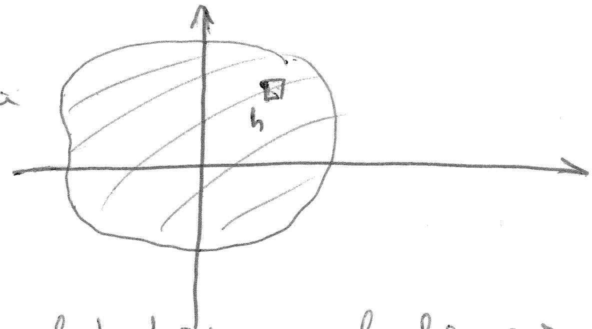
Adott E-nál kisebb E-kra vett ∫-ok.

A fázistéren 1 pont lesz egy mikroállapot. És annak ~~##~~ a rendszerek a mikroállapota.

Baj, h folytonos dolgokkal operál a klassz fiz ⟹ mikroáll ne egy pont legyen a fázistérben, hanem egy kiterjedt fáziscella.

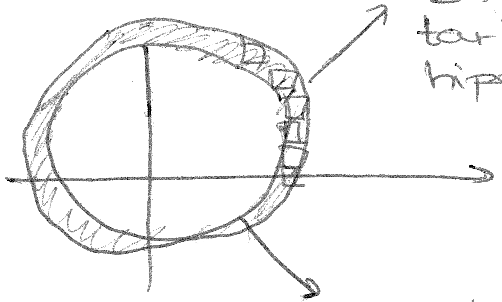
$\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar/2$

Azaz a pont el van mosódva a fázistér. 1 fáziscellán belüli 2 pontot ∅ tekintjük Δ mikroállapotoknak.



⟹ ez matematikailag a folytonos halmaz diszkretizálása.

Ha fáziscella 1 állapot, a multiplicitást is át kell gondolni (Δ-ó a Djuk)



$$\Omega(E,\delta E) = \frac{\Gamma(E+\delta E) - \Gamma(E)}{h^f}$$

Planck-áll, 1 fáziscella Te

mert minden egyes p-q párhoz tartozik egy h.

(P1) klasszikus, 1atomos ideális gáz

Hamfgv?

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2}{2m}$$

$3N = f = 3N$

⟶ fázistér v-a 6N.

$\Gamma(E)$ kiszámításához:

$$H = \sum_i \frac{p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2}{2m} = E$$

Tfh $N=1$ bezárva V térfogatba:

$\Gamma(E) = \ldots$

$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 < 2mE$ a feltétel.
Ez 1 gömb V-e.

$$\Gamma(E) = \frac{4\pi}{3}(2mE)^{3/2} \cdot V$$

koordinátákra volt ∫ hozza ezt be.

Boltzmann-féle entrópiafogalom:

$S = k \cdot \ln \Omega(E)$ → $\Omega(E)$ miatt kvanci rdsz jó csak.

↳ $S(E, V, N)$

vagy

$S = k \ln \Omega(E, \delta E)$ → klasszikus fizikában.

ez a def elegendő arra, h a teljes tdinamikát felépítsük mikroszkópikus alapon. (nem kötelező mzi dolgokat használni)

Boltzmann-féle entrópiadef elegendő lenne a ...

$\Gamma(E)$ kiszámításához:

$$H = \sum_i \frac{p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2}{2m} = E$$

Tfh $N=1$ bezárva V térfogatba:

$\Gamma(E) = \ldots$

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 < 2mE$$ a feltétel.
Ez 1 gömb V-a.

$$\Gamma(E) = \frac{4\pi}{3} (2mE)^{3/2} \cdot V$$

koordinátákra volt $\int$ hozza ez be.

Boltzmann-féle entrópiafogalom:

$S = k \cdot \ln \Omega(E)$ → $\Omega(E)$ miatt kvant. rdsz jó csak.

→ $S(E, V, N)$

vagy

$S = k \ln \Omega(E, \delta E)$ → klasszikus fizikában.

ez a def elegendő arra, h a teljes tdinamikát felépítsük mikroszkópikus alapon. (nem kötelező ezt dolgokat használni)

Boltzmann-féle entrópiadef elegendő lenne a ...

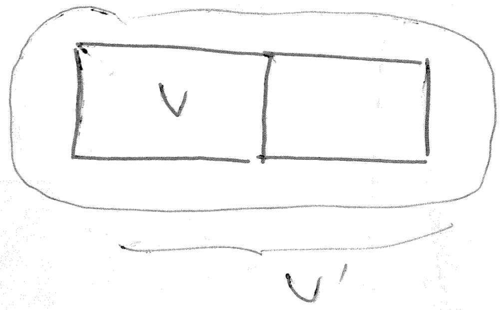
Ez a def összhangban van a spontán entrópia-termelődéssel?

(ln-t azért definiálták, mert olyan mennyiséget akarunk defni, ami részecske-számmal arányos. Ω ált N exp-s hatv-val arányos, azért kell az ln)

(P1)

Gay-Lussac

Környezetétől szigetelt, kitágul.
irreverzibilis folyamat.

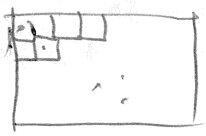


Has össze Ω-t az kezdeti- és végállban!

$\Omega(V, E, N)$

Foly során csak V változik.

→ 2 olyan E-jű állapotot hasonlítok össze.



- összes cella száma $\sim V$
- ha cella V-a v_0
- minden részecskére tudom, melyik cellában van.
- lehetőséget leszámolom

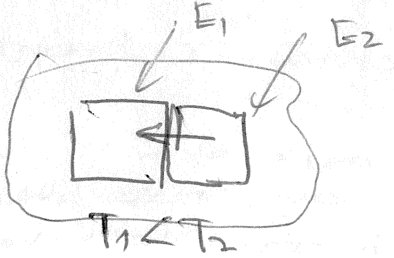
$$\Longrightarrow \Omega \sim \left(\frac{V}{v_0}\right)^N \sim V^N$$

cellák száma

$$\Delta S = k \ln \frac{V'^N}{V^N} = N k \ln \frac{V'}{V}$$

(P1) 2 adott T-ű test (hőm.) termikus kontaktusban van. Ezt meg-meg lehet szüntetni. Ált egyensúlyban van a rdsz, csak amikor term. kontaktusban van, akkor nem.

Egyébként környezetétől el van szigetelve a teljes rdsz.



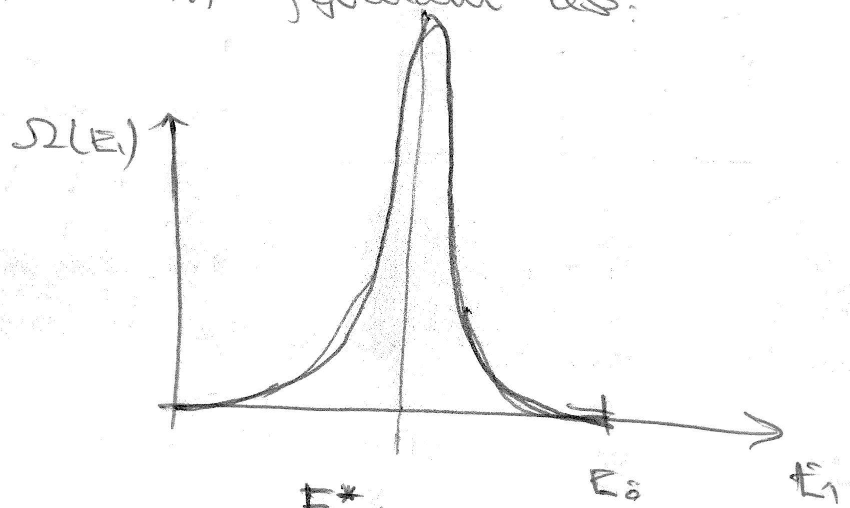
de mivel ez szigetelt külvilágtól, a 2 E_i ∅ független $\Rightarrow$

$E_2 = E_ö - E_1$

- amikor találkoznak, a teljes rdsz E-ja:

$$\Omega(E_1) = \Omega_1(E_1)\,\Omega_2(E_2) = \Omega_1(E_1)\,\Omega_2(E_ö - E_1)$$

Elképzeljük, ez milyen fgvalakú lesz:



E_1^*: maxérték.
A legoptimálisabb E-osztás.
Entrópia akkor legnagyobb

ez a rész annak felel meg, hogy:

$\longleftarrow$ $T_1 < T_2$ $\qquad$ $\longrightarrow$ $T_1 > T_2$

Nézzük ezt a tartományt!

$E_1 < E_1^*$

$$0 < \frac{d \ln \Omega(E_1)}{dE_1} = \text{szorzatalakot felhasználva} =$$

$$= \frac{d}{dE_1}\left(\ln \Omega_1(E_1) + \ln \Omega_2(\underbrace{E_ö - E_1}_{E_2})\right) =$$

$$= \frac{d \ln \Omega_1}{dE_1} - \frac{d \ln \Omega_2}{dE_2} \Longrightarrow$$

$$\frac{d \ln \Omega_1}{dE_1} > \frac{d \ln \Omega_2}{dE_2} \qquad / \cdot k_B$$

$$\frac{d\,(\overbrace{k \ln \Omega_1}^{S_1})}{dE_1} > \frac{d\,(\overbrace{k \ln \Omega_2}^{S_2})}{dE_2}$$

$$\underbrace{\frac{dS_1}{\partial E_1}}_{\frac{1}{T_1}} > \underbrace{\frac{dS_2}{\partial E_2}}_{\frac{1}{T_2}}$$

beláttuk, h a max-tól balra terjedő tartomány annak felel m., h $T_1 < T_2$

Akkor E balra áramlik... entrópia növekszik

$S = k \ln \Omega(E, V, N \ldots)$

P1 Független oszc-ok – Einstein modell

- fgtlen 1D-s oszc-k. ω a frekije mindnek
- ⟶ E az összes oszc-ok E-áinak összege.

$$E = \sum_{i=1}^{N} \hbar\omega(n_i + 1/2) = E_0 + M\hbar\omega$$

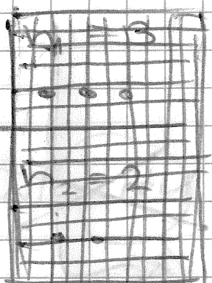
$$E_0 = \frac{1}{2}N\hbar\omega \qquad M = \sum_{i=1}^{N} n_i$$

Hányféleképpen lehet E-t előállítani

Uazt a M-t n_i-k különböző kiosztásával tudom elérni. ⟶ kombinati feladat.

Rdsz 1 mikroá-t a köv. pp jellemzi:

Ha $n_1 = 3$, $n_2 = 2$



$n_1 = 3$ | $n_2 = 2$ | $n_3 = 0$

• • • | • • | |

Golyók száma: M

Pálcikák száma N

Ha E rögzített, M és N is rögzített

$$\Omega = \frac{(M + N - 1)!}{M!\, N!}$$

pl $M = 3$ $N = 2$ $\frac{4!}{3!\,2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 2} = 2$

~~ooo|~~ ~~oo|o~~ ~~o|oo~~ ~~|ooo~~ 1ooo| ~~1o1oo~~ ~~1oo1o~~ ~~ooo1~~ o|oo|

golyók egymás közötti felcserélése. Ha golyókat cserélek fel, nem ad újat

Sfgv-t csak akkor kapjuk t, ha a tol-i átmenetet megcsináljuk!

Ha N - Avogadro-szám: $\Rightarrow$

$$\Omega = \frac{(M+N-\cancel{1})!}{M!\,(N-\cancel{1})!} \longrightarrow S = k\ln\Omega = k\left[\ln(M+N)! - \ln M! - \ln N!\right] \cong$$

Még egy átmenet: teli limes:
nagy szám faktoriálisának log.-a: Stirling:

$$\ln N! \cong N(\ln N - 1)$$

$$\cong k\left[(M+N)\ln(M+N) - M\ln M - N\ln N\right] =$$

$$E = E_0 + M\hbar\omega$$

$$M = \frac{E-E_0}{\hbar\omega}$$

$$N = \ldots$$

$$M+N = \frac{E - E_0 + \overbrace{N\hbar\omega}^{2E_0}}{\hbar\omega} = \frac{E+E_0}{\hbar\omega}$$

ezeket beírva

$$= \frac{k}{\hbar\omega}\left[(E+E_0)\ln\frac{E+E_0}{\hbar\omega N} - (E-E_0)\ln\frac{E-E_0}{N\hbar\omega} - \cancel{N\hbar\omega\ln N}\right]$$

!

$$2E_0 = (E+E_0) - (E-E_0)$$

$S(E,N)$ Ebben az összefüggésben $\emptyset$ V benne. (ahol E_0 van, az mind N-nel arányos volt.) Nem akármilyen:

$$S(E,N) = N\cdot s\left(\frac{E}{N}\right)$$

Ez nem véletlen van. Mit fejez ez ki? Ez az entrópiának az "extenzív-teli-állapotjelző" voltát fejezi ki. (E, N is extenzív).

ha $S(\lambda E, \lambda N) = \lambda S$ (változóinak hom 1. rendű fgv.-e)

Megvan a fundamentális kifejezésünk $(S = \ldots \Sigma(\ldots))$

Klassz. fizban az S-t: ...

Láttuk be, h $\boxed{k \ln \Omega(E+\delta E)}$ a túli limeszben uaz lesz ...?

$$k \ln \Omega(E+\delta E) = N s\left(\frac{E+\delta E}{N}\right) = N s\left(\frac{E}{N}\right) + N \frac{\delta E}{N} \cdot s'\left(\frac{E}{N}\right) + \ldots$$

$\frac{\delta E}{N}$ szi Tailor

Mekkora legyen δE?
Nem kell infinitezimálisnak lenni: Maga E avogadro-szal arányos. δE lehet 1-ségnyi nagyságrendű!!

$$\cong k \ln \Omega(E)$$

⇒ Ha adott E-hez képest kis E-val, annak multiplicitása makr. rdsz-ben (túli limeszben) uaz lesz. ⟹ jelentős szabadság

$\delta E \{ \quad h \quad E$

$$\Omega(E, \delta E) \cong h\,\Omega(E)$$

Ha ilyen kötegből számolom az S-t:

$$\ln \Omega(E, \delta E) = \ln \Omega(E) + \cancel{\ln h}$$

az makroszkopikus méretű — az nem!

Ez szerint jó, mert klassz fizikában eleve ezt kell használni, hiszen ott nem lehet 1 állapothoz multiplicitást rendelni, csak 1 köteghez!)

→ további osz.-rdsz td-jainak kiszámolása

$$S(E,N) = \frac{k}{\hbar\omega}\left[(E+E_0)\cdot\ln\frac{E+E_0}{N\hbar\omega} - (E-E_0)\ln\left(\frac{E-E_0}{N\hbar\omega}\right)\right.$$

Ez az S fündamentális.

Származtassunk belőle mindent! Ehhez →
hozzuk be T-t. Ugye $\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_N =$

$$= \frac{k}{\hbar\omega}\left[\ln\frac{E+E_0}{N\hbar\omega} + \cancel{(E+E_0)\frac{1}{E+E_0}} - \ln\frac{E-E_0}{N\hbar\omega} - \cancel{\frac{E-E_0}{E-E_0}}\right] =$$

$$= \frac{k}{\hbar\omega}\ln\frac{E+E_0}{E-E_0} = \frac{1}{T}$$

De jobban érdekel minket

$$\frac{E+E_0}{E-E_0} = e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \longrightarrow \frac{2E_0}{E-E_0} + 1 = e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \longrightarrow$$

$$\frac{E-E_0}{2E_0} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \quad ; \text{ vagyis}$$

$$U = E = \underset{\substack{\| \\ \frac{N\hbar\omega}{2}}}{E_0} + \frac{2E_0}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = N\underbrace{\left[\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}\right]}_{f(T)} \; \vdots \; U = Nf(T)$$

most csak azért, mert zárt a rdsz.

oszc.rdsz belső E-jának hőmfgé.

Ennek ilyennek kell lennie! U ext, N ext, T intenzív, így a 2-től csak így függ!

Van 1 ell.-e: ha $kT \gg \hbar\omega$ $\left(T \gg \frac{\hbar\omega}{k} = T_E\right)$

Einstein hőm

Ekvipartíció ('az E tagban lévő kvadratikus tagok száma' $\cdot \frac{1}{2}kT$ = átlag E)

$$\frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT = kT \longrightarrow U = NkT$$

$$\underset{K}{\frac{1}{2}kT} \quad \underset{\frac{1}{2}bx^2}{\frac{1}{2}kT}$$

A fenti nem ez! Miért ∅ kaptuk + az ekvip. tételt? Mert ekv. tétel klasszikus fizi tétel, az pedig kvantumosan tárgyalt rdsz volt.

De magas hőmen (minden rdszre) a rdsz klasszikusnak tekintő lesz (kvázifolytonosnak az E-szintek) Szobahőmen gyak minden gáz és foly. klasszikusnak tekintő. (kivéve He-folyadék)

Ell. tehát: $U = E = E_0 + \frac{N\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$ esetére: $kT \gg \hbar\omega$

$$U \simeq E_0 + \frac{N\hbar\omega}{\cancel{1} + \frac{\hbar\omega}{kT} + \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2 \dots - \cancel{1}} = \cancel{E_0} + NkT$$

magas hőmen elh. az alapállapoti E.

Visszakaptuk az ekvipartíciót

Szám: $\boxed{\text{hőkapacitás}}$

Dulon-Petit: a moláris hőkapac.-a a szigetelő szilárd anyagoknak $c_m = 3R$

→ ∅ hőmfüggés

→ ∅ anyagfüggés.

Alacsony hőmen a mért értékek elkezdtek eltérni a Dulon-Petit-től.

Dulon-Petit az ekv.-part-tétel köv. ugye:

$U = 3Nk_BT$; $c = \frac{\partial U}{\partial T} = Nk_B3$; $c_m = 3R$

ha 3D van

Eltérést az Einstein-modell fogja magyarázni.

21

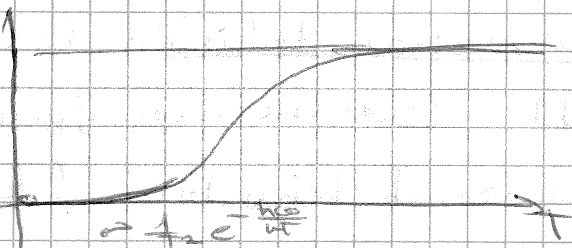
$$C_m = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_N = \frac{3 \cdot N\hbar\omega}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1\right)^2}(-1)\, e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}\left(-\frac{\hbar\omega}{kT^2}\right) =$$

$$= \frac{\underbrace{N_A k}_{R}\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2 e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1\right)^2}\cdot 3$$

Ebből moláris hőkap. → ha $N = N_A$; $N_A \cdot k_B = R$

+ javítsuk ki 3D-sre!

Igy vizsgálat:



- ha $T \gg T_E$

$$C_m \simeq \frac{\cancel{\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2} \cdot 3R \cdot 1}{\cancel{\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2}} = 3R$$

nem jött be T_E

$\sim \frac{1}{T^2} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$

- $T \ll T_E$

várjuk, h 0-hoz tartson a hőkap. (TD III: minden anyag hőkapacitása 0-hoz tart)

$$C_m \simeq 3R\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2 e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$$

az hogy viselkedik? $\infty \cdot 0$ határeset

→ L'Hopital-szabály.

0-hoz tart végülis!

Einstein-modell a Dulon-Petit szabálytól való eltérést magyarázza.

Ha nem alacsony hőm-en mérünk, összhangban van az Einstein-modellel? NEM!
A valódi szilárd anyagok hőkapacitása lassabban megy nullához, mint a modell jósolja $\sim T^3$

Később módosították: oszcillátorok frekvenciája ne legyen azonos

ezt a Debye-elmélet adja vissza

Α2 S [illegible]

$$E - E_0 = \frac{N\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \; ; \; / + 2E_0$$

$$E + \underset{N\hbar\omega}{\underbrace{E_0}} = \frac{N\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} + N\hbar\omega =$$

$$= N\hbar\omega \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

$$S(T,N) = \frac{k}{\cancel{\hbar\omega}} N \cancel{\hbar\omega} \left[\frac{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \ln \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} - \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \ln \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \right]$$

$$= Nk \left[\ln \frac{1}{\underbrace{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}_{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right)}} + \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) \right] =$$

$$= Nk \left[\ln \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}} - \frac{\hbar\omega}{kT} \left(\underbrace{1 - \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}}_{= -\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}} \right) \right]$$

Άρα:

$$S(T,N) = \boxed{Nk \left[\ln \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}} + \frac{(\hbar\omega / kT)}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \right]}$$

VVT szám

VVT szám	FVS -sz
14	
15	2
16	7
14	Ø
17	4
7	4
15	6
11	1
12	2
15	Ø
15	1
4	Ø
19	5
16	2
17	5
11	4
15	Ø
14	Ø
14	Ø
6	3
11	2
12	2
12	4
9	2
8	3

higitess T 20-180

higitas H 10-990

1 alulfolyás

↘ Ø volt honger

8-10

vércukor 5

4-5 db kell hozhatónyint

En A Rh^+

Máté 0 Rh^+

VVT $\left(\frac{1}{20}\right)^2 \frac{1}{10} = \frac{1}{4000}$

$14 \cdot 4000 =$
56 000 db/μl

$5 \cdot 6 \cdot 10^4$

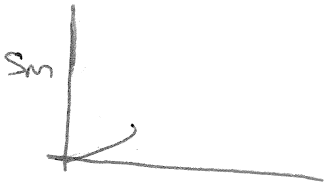
FVS

$3 \cdot \frac{1}{250}$;

$250 \cdot 3 = 750$

$$S(T) = 3Nk\left[\ln \frac{1}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}} + \frac{\hbar\omega/kT}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}\right]$$

$$S_m = 3R\,[\ldots]$$



Boltzmann-féle entrópiatag: garantáltan ⊕ entrópiát ad.

Ha a multiplicitás 1, akkor kapjuk a legkisebb entrópiaértéket (∅-t)

Alapállapoti E minden makr. rdszben olyan, h multiplicitás 1.
Alapállapoti E T=0-ban!

Hőm növelése biztosan entrópianövekedéssel jár.

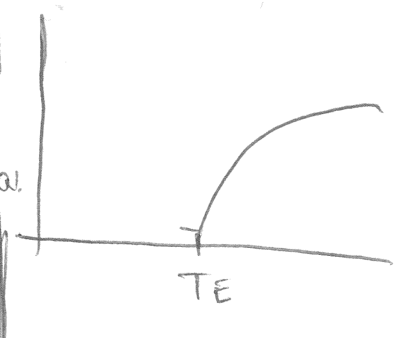
$$S(T) = 3Nk\left[\ln \ldots + \ldots\right] =$$

ez a Ha $T \gg T_E = \frac{\hbar\omega}{k}$:

$$3R\cdot\left[\ln \frac{1}{\frac{\hbar\omega}{kT}} + 1\right]$$

• ez a közelítő formula a magas hőmérsékleten.

Ez a logs hőmfüggés nagyon tipikus



a másik dominánsabb

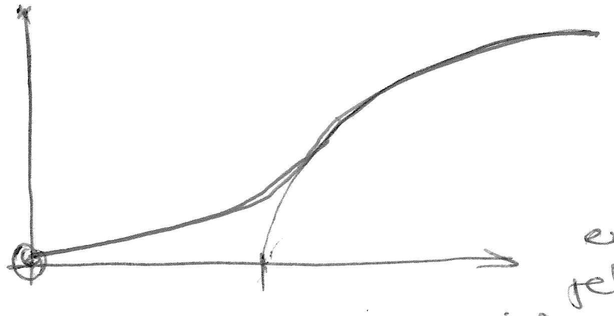
• $T \ll T_E$: $3R\left[\ldots e^{-\cancel{\frac{\hbar\omega}{kT}}} + \frac{\hbar\omega}{kT} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}\right]$

ennek határértéke L'Hospitallal: exps dominál, ∅-hoz megy.

$$\boxed{\ln(1-x) \overset{\text{Taylor}}{=} 0 - 1\cdot x + O(x^2)}$$

x kicsi

Tehát Einstein-modell moláris entrópiájának hőmérsékletfüggése:



Ha majd klasszikusan számolva eljutunk a Θ entrópia tartományokba, az jelzi, hogy a klasszikus számolás ott már nem jó.
Mindig a magas hőm-ű leírásban megy át a kvantummechanikába a klasszikusba.

A III főtétel abszolút a kv.-i tárgyalásmód eredménye.

<u>Hogyan általánosíthatjuk Boltzmann-entrópiát klassz fiz rdszre?</u>

$k \ln \Omega(E)$: de klassz fiz-ban ϕ ek Enívók.

Itt adott E felület által körbezárt V-t kell szemlélni.

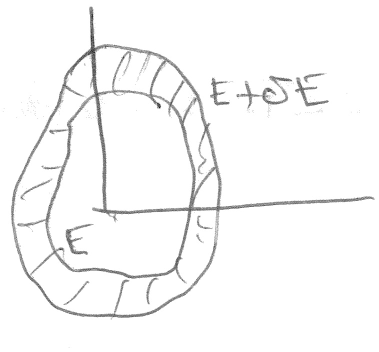
$S = k \ln \Omega(E, \delta E)$ Ez azt jelenti, h $\Omega(E, \delta E)$ fázisV-t jelent.

f szabi fokú (mchr.) rdsz esetén:

$$\Omega(E, \delta E) = \frac{1}{h^f} \underbrace{\int \cdots \int}_{2f} dq_1 \cdots dq_f \, dp_1 \cdots dp_f$$

$$E < \mathcal{H}(q \cdots f \cdots) < E + \delta E$$

$\rightarrow$ itt adjuk t, h milyen tartományon



(Amikor rögzített az E (zárt a rdsz) és úgy próbáljuk .... mikrokanonikus tárgyalásmód)

Ha a hőm. rögzített és van hőtartály, amivel E-t cserélő a rdsz: kanonikus tárgyalásmód
Ez a modellek kiszámolásakor sokkal könnyebb lesz.
Ehhez a tárgyalásmódhoz: bevezetjük a valószínűségeket.

Statisztikus fizban a mikroállapotoknak lesz vsz-e:

$\underset{\smile}{m}$

Makroszkópikus rdsznél a mikroszkópikus jellők Ak. mérhetetlenek, mikroállapot ø mérő ki.
Egzakt állítást ø tok róla mondani, de vsz-i megfontolást tudok.
Rdsz dinamikája: mikroállapotok között ugrál a rdsz.:

$\underset{\smile}{m}_1 \longrightarrow \underset{\smile}{m}_2 \longrightarrow \underset{\smile}{m}_3$

Adott pillban melyiket találnám meg.
Kiszemelek egyet: $\underset{\smile}{m}$, h hányszor látogatja t:
$N_{\underset{\smile}{m}}$ (hányszor tért vissza ugyanabba a mikroállba.
A relatív gyakorisága ennek: $p_{\underset{\smile}{m}} = \dfrac{N_{\underset{\smile}{m}}}{N_{össz}}$

Minden tdi menny, ami fluktuál, az egy átlagé lesz.

Legyen A egy fiz i menny. A fiz i menny értéke mikroálltól függ. Ahogy rdsz ugrál mikroállk közt, A is változik:

$$\overline{A} = \frac{A_{\underset{\smile}{m}_1} + A_{\underset{\smile}{m}_2} + A_{\underset{\smile}{m}_3} + \dots}{N_{össz}} = \frac{\sum_{\underset{\smile}{m}} N_{\underset{\smile}{m}} A_{\underset{\smile}{m}}}{N_{össz}} =$$

$= \boxed{\sum_m A_m \cdot P_m = \bar{A}}$ ez a szokásos vsz.-számítási átlag.

A szórás is érdekel:

$$\sigma_A^2 = \overline{(A_m - \bar{A})^2} = \sum_m P_m \underbrace{(A_m - \bar{A})^2}_{A_m^2 - 2\bar{A}A_m + \bar{A}^2} = \overline{A^2} - \bar{A}^2$$

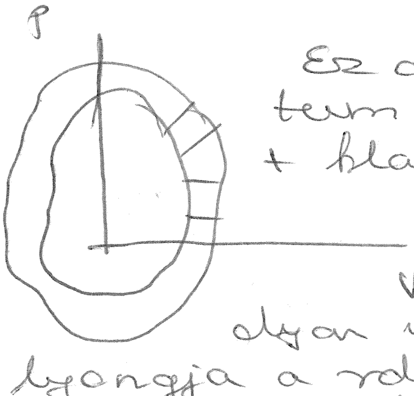
(Entrópiát minek az átlagaként tekinthetjük?)

Vmit mondani kell a P_m-ekről:

- $\sum_m P_m = 1$
- P_m-ek ∅ mérték. (Statisztikus fizika alapgondolata: a td. nem annyira érzékeny, h milyen P_m-eket jelölünk ki. → Posztulálunk)
- Ha olyan rdszt tekintek, ahol rögzített E, V, N: P_m = állandó (ez ~~zárt~~ rdsz ulbár)

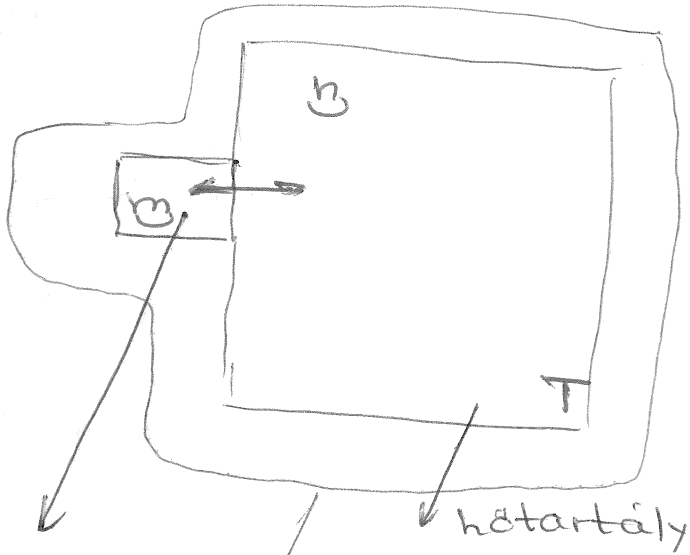
→ $P_m = \dfrac{1}{\Omega(E,V,\dots)}$

az a mikr~~okkba~~ - - -



Ez a posztulátum annak felel + klassz esetben, - - - minden ∨ részét u-olyan vszgel bebarangolja a rdsz. (Ez ∅ mindig van úgy, de adi limeszben ha úgy veszszük, h járt ott, az nem módosít a dolgokon)

Kanonikus rdsz: hőtartállyal kapcsban álló rdsz.



Fluktuál az E, mert a 2 rdsz közt jó hővezető fal van, ami ezt tengedi.

az a rdszünk, amit vizsgálunk

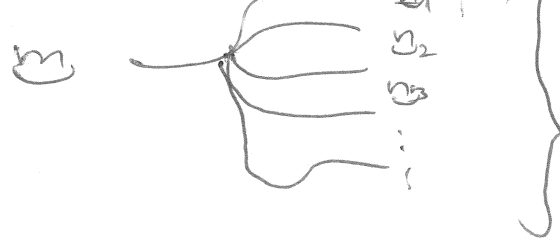
teljes rdsz, ennek E-ja rögzített: $E_0 = E_m + E_n^t$ tartály

→ amíg olyan rdsz van, aminek a részecskéi között rövid távú a kh. tdi limeszben a kölcsönhatási E elhanyagolható.

Tartály rögzített hőm-nek tekintjük.

Cél: megadni a rdsz mikroállapotainak eloszlását. az alapposztulátumra visszavezetve próbáljuk ezt m!

m rögzítem a rdsz mikroállapotát.
Ez sok tartálybeli mikroállapottal tud megvalósulni, ami a teljes rdsz zártságával összhangban van.



ezek hányan vannak:

$$\Omega^t(\underbrace{E_0 - E_n}_{\text{ennél az álltnál a multiplicitás}})$$

$$\Omega^t(E_0 - E_n')$$

Teljes rdsznek együtt minden mikroáll-a 1formán vszínű.

Ha $\Omega^t(E_0-E_m)$ több, mint $\Omega^t(E_0-E_{m'})$ ...
akkor m többször fordul6 elő ...

$$\boxed{P_m \sim \Omega^t(E_0-E_m)}$$

Itt alapvetően kihasználtam, h a 2 rdsz együtt zárt és nekik együtt a mikroállapotaik egyformán valószínűek.

m-et akármilyen n-el társítom, az ugyan vszínű.

ezt kihasználva kihozzuk a Boltzmann-féle eloszlást

$$\ln P_m = \underset{\text{arányosság miatt}}{\text{konst}} + \ln \Omega^t(\overbrace{E_0-E_m}^{E_t}) \quad / \ln! \qquad E_0 >> E_m$$

kihasználjuk, h tartály mérete sokkal nagyobb, mint rdszé:

$\Rightarrow$ Tailor-sorfejtés $f(x) = \ln \Omega^t(E_0 - x)$

$$= \underbrace{\text{konst} + \ln \Omega^t(E_0)}_{\text{konst}'} + \underbrace{\left.\frac{d\ln \Omega^t}{dE^t}\right|_{E^t=E_0}}_{= \frac{1}{T} \text{ tartály hőm.-e}} (-1)\cdot \frac{E_n}{k} + \ldots$$

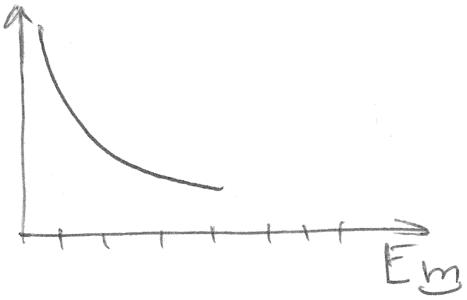
$$\ln P_m = \text{konst}' - \frac{E_n}{kT} \qquad /\exp$$

$$\boxed{P_m \sim e^{-\frac{E_n}{kT}}}$$

T hőm-ű hőtartállyal kapcsban álló mikroállapotok már nem egyformán vszínűek!

$P_m \sim e^{-\frac{E_m}{kT}}$

Ennek az eloszlásnak jell-je: preferálja az alacsony E-jű áll-okat:



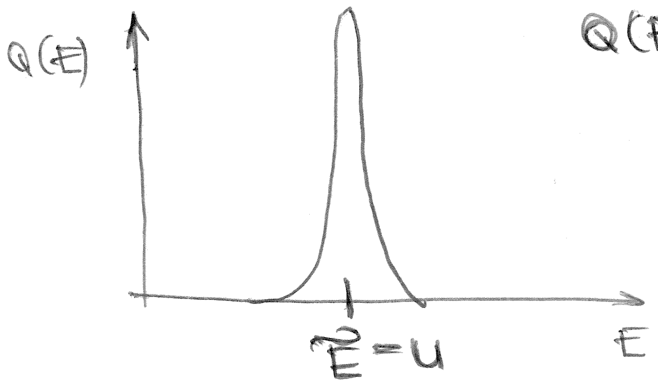
De h a legalacsonyabb E dominálja a többit (vagyis az alapállapot), az nem igaz.

P_m a mikroállk eloszlása

Magasabb E-jű állk Inként alacsonyabb valószínűségűek, de sokan vannak!

P_m mikroáll vsze, és NEM a mi. E-jának vszge!

Q(E):



$Q(E) \sim \Omega(E)\, e^{-\frac{E}{kT}}$

ez meg az E mikroáll vszgét adja t.

ez adja h. hány db E E-jű mikr. áll van

$\Longrightarrow$ E nagyon picit fluktuál csak.

Ha hőmérsékletet növelem, a csúcs mozog el

$\longrightarrow$ ma. az E átlagértéke hőm növelésével nő.

Kanonikus (hőtartállyal kapcsban álló) rdsz

folyt

Normáláshoz bevezetjük:

$Z(N, V, T)$ állapotösszeg : $Z \equiv \sum_m e^{-\frac{E_m}{kT}}$

(mikrokanonikusnál ennek az analógja Ω volt)

ezt konkrét modellnél kell megmondani, hogy milyen.

$$\boxed{P_m = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_m}{kT}}}$$ Boltzmann – Gibbs eloszlás.

TD:

$S(U, V, N)$: ha ez a fund. reláció ismert, minden hőtani információt tudunk:

$$\boxed{dS = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN}$$ differenciális fund. reláció

Nekünk hasznosabb, ha:

$$dU = TdS - pdV + \mu dN$$

Ha $U(S, V, N)$ ismert, az szintén 1 fundamentális reláció. A 2 ekvivalens.

Hőtartállyal kapcsolatban álló rdsz esetén:

szabadE:

$$\boxed{F = U - TS}$$ SzabadE akkor lesz fundamentális reláció, ha: $F(T, N, V)$

képezzük F megváltozását a belátáshoz!:

$$dF = dU - d(TS) = \cancel{TdS} - pdV + \mu dN - SdT - \cancel{TdS} =$$

$= \ldots$

$$\boxed{\left(\frac{dF}{dV}\right)_{T,N} = -p;} \quad \boxed{\left(\frac{dF}{dN}\right)_{V,T} = \mu;} \quad \boxed{\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{N,V} = -S}$$

~~Legendre~~ transzformáció: 1x-re kicseréli S-et T-re, U-t F-re. (1x-re kicseréli a függő és független változót)

$U(S) \Leftrightarrow F(T)$

Ha U ismert: $U(S)$

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{\partial U}{\partial S} = T(S) \\ \downarrow \text{invertálás} \\ S(T) \\ \downarrow \\ F = U - TS \\ \downarrow \\ F(T) \end{array}}$$

(ez a belső E-ra vonó fundo 1nlet).

$$\frac{\partial F}{\partial T} = -S$$

Ezzel az eljárással lehet a különböző td.-i potenciálokat származtatni.

Megj.: Lagrange- és Hamilton fgv-ek is ~ -trafó:

$L(q,\dot{q},t)$ —— $H = L - p\dot{q}$

$H(q,p,t)$

Hőtartállyal kapcsolatban lévő rdsz esetén a szabad E-ra kell kaptanunk?

Mi a szabad E a kanonikus tárgyalásban?

Helmholtz-1nlet: $\boxed{F = U - TS = U + T\frac{\partial F}{\partial T}}$

Ehhez először kell az U kanonikus defja:

$$U = \overline{E} = \sum_m E_m \cdot P_m = \sum_m E_m \frac{e^{-\frac{E_m}{kT}}}{Z} \overset{\frac{1}{kT} = \beta}{=} \sum_m E_m \frac{e^{-\beta E_m}}{Z} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

$$\text{Biz:} \quad -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \underbrace{\sum_m e^{-\beta E_m}}_{Z(\beta)} =$$

összegzés független a β-tól (össz. mikroállapotra megy, amiknek számetlen ⊘ lesz ⇒ deriválás beírő összegzésen belülre)

$$= -\frac{1}{Z}\sum_m (-E_m)\, e^{-\beta E_m} = \text{Beláttuk :) } =$$

Ált. levr (nincs utalás h klasszikus v. sem, kölcsönhatásmentes vagy sem, stb.)

$$= -\frac{\partial}{\partial T}\ln Z \cdot \underbrace{\frac{dT}{d\beta}}_{-kT^2} \qquad \beta = 1/kT \rightarrow \frac{d\beta}{dT} = -\frac{1}{kT^2}$$

$$\longrightarrow U = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}$$

$$\boxed{F = -kT \ln Z}(T, V, N)$$

Helmholtzba:
$$F = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} + T\frac{\partial}{\partial T}(-kT\ln Z) =$$
$$= \cancel{kT^2 \frac{\partial \ln z}{\partial T}} - kT\left[\ln z + \cancel{T\frac{\partial \ln z}{\partial T}}\right] =$$
$$= -kT\ln Z = F$$

Entrópiát hogy kell? (kanonikus rdszben)

$$\begin{cases} S = \left(-\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} & \text{ez az 1ik lehetőség} \\ S = \frac{U - F}{T} & \end{cases}$$

A 2 a Helmholtz-hatt miatt ekviv.

$$S = \frac{U-F}{T} = \frac{1}{T}\left[\sum_m E_m P_m + kT\ln Z \sum_m P_m\right] =$$
$$= -k\left[\sum_m \left(-\frac{E_m}{kT}\right)\cdot P_m + \ln Z^{-1}\sum_m P_m\right]$$
$$\sum_m P_m \underbrace{\left[-\frac{E_m}{kT} + \ln\frac{1}{Z}\right]}_{\ln P_m}$$

$$\boxed{S = -k \sum_m P_m \ln P_m}$$

Neumann-entrópia

ez az alak jó – ez az entrópiának a legáltalánosabb defja. (nem csak hőt.eg, v. zárt, hanem akármilyen is a mikroállapotok eloszlása, ez jó)

Ez a 3. Sfogalmunk:
1) Clausius TD II $\oint T dS = 0$
2. Boltzmann $S = k \ln \Omega(E)$
3) ez.

Ez a képlet mutatja: • ez biztosan poz menny.

$0 \leq P_m \leq 1 \Rightarrow$

$\ln P_m \leq 0 \Rightarrow$

$S \geq 0$

(levezetésnél kihasználtuk, h diszkrét valószínűségi halmazunk van!

---

ism.

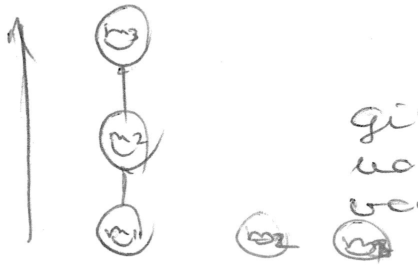
Mikrokan: zárt; összes ext. álljelzője rögzített: E, V, N.
Alapmenny: $\Omega(E, V, N) \longrightarrow S = k_B \ln \Omega = S(E, V, N) \rightarrow$ Termodin.

Kans: Hőtartállyal kapcsban áll, hőt. T-t rögzíti. V, N továbbra is rögzítt.
T, V, N
Alapvető menny: $Z(T, V, N) \longrightarrow F = -kT \ln Z = F(T, V, N) \longrightarrow$ TD eszköztárával minden más kiszámítható.

Mindezekkel vazzolat a teli fgvéket kapunk, (minden ext. menny végtelenhez megy, míg az intenzívek nem) mert ahol lehet TDi limeszt csinálunk.

TDi limeszben ekvivalens a 2 sokaság.

sokaság



gibbs: ehelyett ugyanazt a rdszt ugyanolyan körülmények között vesszük sokszor. m, a P_m-ek ezen belül a rel. gyak

Ergotikus hipotézis: mindegy, h 1 - ______ .

Mikrokanonikus tárgyalásmód, ált. S képlet.

$$S = -k\sum_m P_m \ln P_m = -k\sum_m \frac{1}{\Omega}\ln\frac{1}{\Omega} = +k\cancel{\frac{1}{\Omega}}\ln\Omega \sum_m 1$$

$$P_m = \frac{1}{\Omega}$$

Ez visszaadja a Boltzmann-képletet, ahogy vártuk is.

Alkalmazások

kanonikus
tárgyalásra

(1) Einstein modell. (N független kvoszc összege)

$$Z = \sum_{m} e^{-\beta E_m}$$

Ez spec dolog. + kell rendezni, mi az m-ek, összegzést mi formába kell:

$$m \longleftrightarrow \{\underset{0 \to \infty}{n_1}, \underset{0 \to \infty}{n_2}, \dots, \overset{0 - \infty}{n_N}\}$$

ez ekvivalens 1 ~~kv~~ mikroállapottal

Meg kell adni összes oszc. kv. számát

(mikrokanonikusnál: $E = \sum_{i=1}^{N} \hbar\omega(n_i + \frac{1}{2}) =$
$= E_0 + \hbar\omega M$. Az, h E rögzített volt, azt jelenti, h M rögzített volt)

Most viszont E $\not$ rögzített! Most.. ...

Mindegyik ~~kvosz~~. kv számra bármennyi lehet.
Emiatt a kano számolás lett 1xűbb, mint a mikrokanonikus.

Alkalmazások

kanonikus
tárgyalásmódra

(1) Einstein modell. (N független kvoszc összege)

$$Z = \sum_{\underline{m}} e^{-\beta E_{\underline{m}}}$$

Ez spec dolog. + kell rendezni, mik az $\underline{m}$-ek, összegzést mi forrásra kell:

$$\underline{m} \longleftrightarrow \{n_1, n_2, \ldots, n_N\}$$

(n_1: $0 \to \infty$, n_2: $0 \to \infty$, n_N: $0 - \infty$)

ez ekvivalens 1 mikroállapottal

Meg kell adni összes oszc. kv. számát

(mikrokanonikusnál: $E = \sum_{i=1}^{N} \hbar\omega(n_i + \frac{1}{2}) =$
$= E_0 + \hbar\omega M$. Az, h E rögzített volt, azt jelenti, h M rögzített volt)

Most viszont E ≠ rögzített! Most.. ~~k~~
Mindegyik ~~kvosz~~ kvszáma bármennyi lehet.
Emiatt a kano számolás dlt 1xűbb, mint a mikrokanonikus.

Einstein m, hőtartállyal kapcsolatban:

Mindig az áll. összeg számolásával kezdünk:

$$Z = \sum_{\omega} e^{-\beta E_\omega}$$

modellünkben a mikroszkópikus áll a kvantumszámok tudását jelenti: $(\emptyset$ + kötés)

$$\omega \longleftrightarrow \overset{0,1}{n_1, n_2, \dots, n_N}$$

Egy ilyen mikroállapot E-i:

$$E = \sum_{i=1}^{N} \hbar\omega\left(n_i + \tfrac{1}{2}\right)$$

(P1) $N=3: \; n_1, n_2, n_3$

$$Z = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\sum_{n_3=0}^{\infty} e^{-\beta\left[\hbar\omega(n_1+\frac{1}{2}) + \hbar\omega(n_2+\frac{1}{2}) + \hbar\omega(n_3+\frac{1}{2})\right]}$$

$$\boxed{e^{-\beta\hbar\omega(n_1+\frac{1}{2})}\, e^{-\beta\hbar\omega(n_2+\frac{1}{2})}}\; e^{-\beta\hbar\omega(n_3+\frac{1}{2})}$$

$$\sum_{n_3=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n_3+\frac{1}{2})} \equiv z$$

$$Z = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} \boxed{e^{-\beta\hbar\omega(n_1+\frac{1}{2})}}\, e^{-\beta\hbar\omega(n_2+\frac{1}{2})}\, z = z^3$$

3x-os összegzés visszavezető volt 1x-es összegzésre. (mert expot szorzatalakba lehetett írni, faktorizálódott) (felhasználtuk, h' független.

A nem független – kölcsönható – rendszerek gyorsan kezelhetetlenek lesznek.

$Z = z^N$ $\quad$ z: egyrészecske állapotösszeg.

Számoljuk ki z-t:

$$z = e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega} \sum_{n=0}^{\infty} e^{(-\beta\hbar\omega)^n} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1 \quad 2\cdot}{e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}} - e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,\frac{\beta\hbar\omega}{2}}$$

szabadenergia

Entrópia: $\quad S = -\frac{\partial F}{\partial T}$ $\quad F = -kT\ln Z = -NkT\ln z =$

$$= NkT\ln\left[2\,\mathrm{sh}\,\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right] =$$

$$= F(T,N) = Nf(T)$$

ext. $\quad$ int $\quad$ ext

Ennek így kell kinézni,
ez az letlen 2változós fgv, ami tudja azt, h...

$$\mathrm{th}\,\frac{\beta\hbar\omega}{2}$$

$$S = Nk\left[-\ln\left[2\,\mathrm{sh}\,\frac{\beta\hbar\omega}{2} - T\,\frac{1}{\mathrm{sh}\,\frac{\beta\hbar\omega}{2}}\,\mathrm{ch}\,\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right.\right.\cdot\frac{\hbar\omega}{2}\left(-\frac{1}{kT^2}\right)$$

$$= Nk\Bigg[-\ln\underbrace{\left(e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}} - e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}\right)}_{e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}}\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)} + \frac{\hbar\omega\beta}{2}\cdot\frac{e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}} + e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}}{e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}} - e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}}\Bigg] =$$

= alakítsuk, h teljesen ugyan legyen, mint mikrokanonál!)

$$= Nk\left[\ln\frac{1}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}} - \frac{\beta\hbar\omega}{2} + \frac{\beta\hbar\omega}{2}\,\underbrace{\frac{\dots + \dots}{\dots - \dots}}_{\frac{2e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}}{e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}} - e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}}\,\frac{\beta\hbar\omega}{2}}\right] =$$

$$\Rightarrow Nk\left[\ln\frac{1}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}+\frac{\hbar\omega/kT}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}\right]$$

Ez az, amit a mikrokanonikusnál lerajzoltunk.

$$U=\boxed{\bar{E}=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z}=-N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln z=N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left[2\,\mathrm{sh}\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right]=$$

$$=N\,\mathrm{cth}\frac{\beta\hbar\omega}{2}\cdot\underbrace{\frac{\hbar\omega}{2}}^{E_0}=$$

$$=E_0\frac{e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}}+e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}}{e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}}-e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}}=\longrightarrow$$

az akkor néz ki teljesen úgy, mint mikrokanonikusnál, ha:

$$=\longrightarrow E_0\left[1+\frac{2e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}}{e^{\frac{\beta\hbar\omega}{2}}-e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}}\right]=E_0\left[1+\frac{2}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}\right]$$

Magas hőmen visszaadja az ekvipartíció tételt,
alacsony hőmen E_0-hoz tart,
ha deriváljuk ...

Kanonikus tárgyalnád 1xűbb. (a mellékfeltétel, T eleve benne)
Mikronál kombinatorika ...

Klasszikus statisztikus fizikai tárgyalásnál azt várjuk, h ekvipartíció kanásból teljesül.

N 1Ds oszc klasszikus stats fizi tárgyalásmódban

független 1Ds oszcrdsz Ham-ja

$$Z = \sum_{m} e^{-\beta E_m}$$

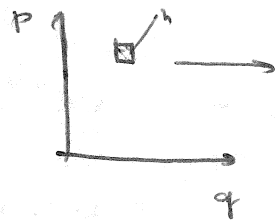
m: $(q_1, \dots q_N, p_1, \dots p_N)$

mikroáll. tadása:

Lagr.: Euler-L. a mozgleírás, itt általánosított Lag.
Hamiltoni formalizmus: L-fgv. Legendre-trafója van. Fázistéren értelmezett fgv-t. Ham fgv: E a fázistérben kifejezve

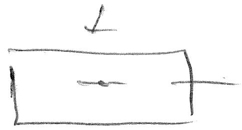
E_m: $\mathcal{H}(p_1 \dots p_N, q_1 \dots q_N) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q_i^2\right)$

q-kat és p-ket független változóknak tekintik, időfüggését keressük, úgy, hogy az 1. rendű egyenleteket oldjuk



ha ezt a cellaméretet jól választjuk – és csak akkor – megy át a klasszikus a tdi limeszben a kvosan számított eredményekbe.

$$Z = \frac{1}{h^N} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \dots dq_N \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \dots dp_N \, e^{-\beta \sum_i \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q_i^2\right)} = z^N$$



azt a hibát, h itt kilépünk, az a tdi limeszben abszolút lényegtelen, elhanyagolható a rugótag miatt – bátran kiterjeszthetem a fázisteret a tartományon kívülre!

E tag itt additív – független tagok összege.
(Ez szorzatalakra bomlik a Boltzmann faktor. Ez a függetlenség köv.-e)

$$z = \text{egyrészecske állapotösszeg} = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq \, e^{-\beta\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{h} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dp \, e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}\right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} dq \, e^{-\beta \frac{1}{2} m\omega^2 q^2}\right] =$$

Gauss-típusú Jok

Gauss-$\int$:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}$$

$$= \frac{1}{h}\sqrt{\frac{\pi 2 \cancel{m}}{\beta}}\sqrt{\frac{\pi 2}{\beta \cancel{m}\omega^2}} = \frac{2\pi}{h\beta\omega} = \boxed{\frac{kT}{\hbar\omega} = \xi}$$

kézzel raktuk bele.

+ van az állösszeg → tudunk mindent:

$$F = -kT\ln Z = -NkT\ln\xi = -NkT\ln\frac{kT}{\hbar\omega}$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_N = Nk\left[\ln\frac{kT}{\hbar\omega} + T\cdot\frac{1}{T}\right] = Nk\left[\ln\frac{kT}{\hbar\omega} + 1\right]$$

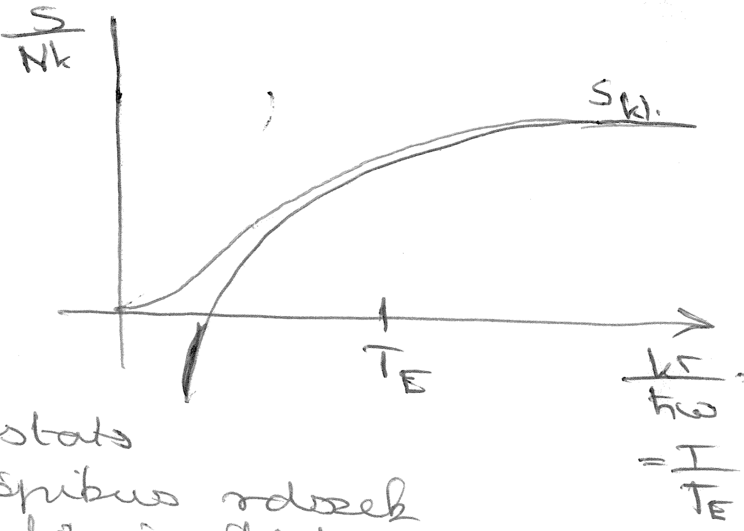
<u>Ezt has. össze a kvantumossal!</u>

$$S_{kv} = Nk\left[\ln\frac{1}{1-e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}} + \frac{\hbar\omega/kT}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}\right] \longleftrightarrow S_{kl}(T) = Nk\left[\ln\frac{kT}{\hbar\omega} + 1\right]$$

Ellük az összesimulást!

$$S_{kv} \cong Nk\left[\ln\frac{kT}{\hbar\omega} + 1\right]$$

$T >> T_E$



Magas hőmen a klassz stat fiz jól leírja a makroszkópikus rdszek termodinamikáját!! Szobahőmérsékleten, gázoknál már klasszikus kezelésmód alkalmazható! (zöme a jelenségeknek klasszikusan!)

Tökéletes összesimulás azon múlik, h Planck-állandót választottuk a cellaméretnek!

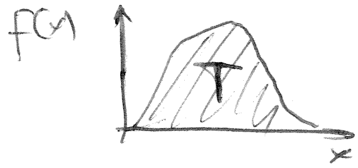
Kl rdsz entrópiája elegendően alacsony hőmen ⊖! Ez az általános belátással ∅ összefüggésben!

$(S = -k \sum_m P_m \ln P_m)$

Feloldás: P_m-ek 1-re normáltak, diszkrét halmaz.

Ha P_m-ek folytonosak: $\rightarrow$ P_m-ek helyett egy valósz. s.-fgv van értelmezve a fázistérben:

$P_m \rightarrow \rho(p,q) \cdot d$



T=1, az φ zárja ki, h valósz. fgv φ menne 1 fölé!

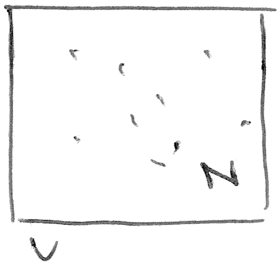
Attól van ez, h valószí. értelmezés elveszti a diszkrét voltát!

KVM K11

Gh

Kanonikus tmód alkalmazásai

Stat. fiz.-i modell a köv:



1 atomos cucc.

Id gáz: az a modell, ahol:
- pontszerű obj.-k vannak
- k.h.-ok elhanyagolhatók. (elvileg lenne kh, akkor lehet elhanyagolni, ha átlagosan az atomok közti táv kisebb, mint MW kölcsönhatás hatótávolsága)
- az ütközések figyelembe vannak véve (a termikus egyensúlyban)

• Mik a mikroáll.-k? klassz rdsz → fázistérben kell

$f = 3N$ (a koordik száma) → fázistér 6N Ds.

$m \longleftrightarrow (\bar{r}_1 \dots \bar{r}_N; \bar{p}_1 \dots p_N)$

• Mi az E? (ez szerepelt meg a képletben) — ha lenne kh

$$E_m \longleftrightarrow H(\dots\dots) = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} \cancel{+ \sum_{i \neq j} U(\bar{r}_i - r_j)}$$

Van 1 külső pot: az edény fala.
Ezt nem kell komolyan venni, ezt nem kell beírni, mert gyak. azt jelenti, h a fázistér.. $e^{-\frac{\beta p_1^2}{2m}} \cdot e^{-\frac{\beta p_2^2}{2m}} \dots$

• Képletünk:

$$Z = \sum_m e^{-\beta E_m} = \frac{1}{h^{3N}} \int d^3 r_1 \dots \int d^3 r_N \int d^3 p_1 \int d^3 p_N \, e^{-\beta \sum_{i=1}^{N} p_i^2/2m} =$$

Ki van hát jelölve a feladat, de sok az ∫.
Azért tudjuk, mert az egy részecskék E-ja additív (ebben jelentkezik a függetlenség.

= valójában 1 részecske áll N. hatványa esik szét

$= z^N$

$$z = \frac{1}{h^3}\underbrace{V\int d^3p}\, e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} = \frac{V}{h^3}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dp_{(x)}\, e^{-\frac{\beta p_{(x)}^2}{2m}}\right]^3 =$$

$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$

ez 1 térfogati ∫:

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} dp_x\, dp_y\, dp_z$$

Mind 3 $-\infty$ – ∞ ig megy

→ Gauss ∫

hosszúság mértékegységű

$$= \frac{V}{h^3}(2\pi m kT)^{3/2} \quad : \quad \boxed{\frac{h}{\sqrt{2\pi m kT}} \equiv \lambda_T}$$

$[m]\cdot[E] = [p^2]$

$[\sqrt{2\pi m kT}] = [p]$

$[h] = [E][t] = [p]\cdot[x]$

hőmérs. hossz = a részecskék átl.-s De-Broglie hossza.

Ez 1 karakterisztikus hossza a rendszernek. Lesz majd 1 másik is, a 2-t kell majd összehasonlítani.

$$z = \frac{V}{\lambda_T^3} \qquad \lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m kT}} \qquad z \sim (kT)^{3/2} \sim \beta^{-3/2}$$

- Állösszeg megvan, jöhet az S, aztán áll.hat, aztán az összes tdi dolog. Előtte még jobb a belső E-t számolni.

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -N\frac{\partial \ln z}{\partial \beta} =$$

$$= N\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{\beta} = N\cdot\frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}NkT$$

arányossági tényező nem érdekel, mert logs van!

Ekvipart ben a szabi fokok nem csak, mint a mikroszkópikus szabi fokok!

Ekv.: szab. fr a H-ben a négyzetes tagok száma.

Szabadenergia

$$F = -kT\ln Z = -NkT\ln \zeta =$$

akármilyen rdsznél!

$$= -NkT\left[\ln V - 3\ln \lambda_T\right] =$$

$$= -NkT\left[\ln V - 3\ln\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{1/2}\right] =$$

$$= -NkT\left[\ln V - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)\right] = F(N,V,T)$$

Ebből lehet mindent származtatni.

De! SzEnak extenzív teli mennyinek kell lennie!

Képzeljük el, h rdszt $\lambda\times$ osára növelem!
Ekkor F és N is $\lambda\times$ osára változik, T változatlan marad! Tudja ezt a szabadE itt?

Nem! Hiba: az $(\ln\lambda)$ gondot okoz, ez sérti az extenzivitást!

Aminek teljesülnie kéne: $F(\lambda N, \lambda V, T) = \lambda F(N,V,T)$
De nem teljesül. Entrópia sem lenne rendes extenzív $\longrightarrow$ keveredési entrópia – paradoxon

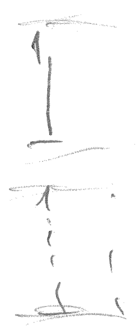
Gibbs: állösszeg: $Z = \frac{1}{N!}\zeta^N \longrightarrow \ldots$

$\ldots + kT\ln N! =$

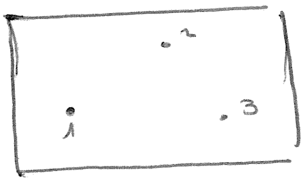
Ilyen taggal kell még hozzájárulni a SzEhoz.
Stirling:

$$= NkT(\ln N - 1)$$

$$F = -NkT\left[\ln V - \frac{3}{2}\frac{h^2}{2\pi mkT} - \boxed{(\ln N - 1)}\right]$$



Megideologizáljuk:



Klassz fizi szemléletben részecskék ±különböztethetők.
Az eredeti állapotnál a felcserélések is külön figybe vannak véve.

De kvm.: ∅ pályája a részecskéknek → azonos részecskék ±különböztethetetlenek.
Akkor viszont le kell osztani $N!$-sal!

Ennek az elvnek van vmi maradványa a klassz. fizikában. Ezt vesszük figybe az $1/N!$-sal – hiszen felcserélés figybevétel túlszámláshoz vezetne

(Az oszcillátornál nem volt ilyen probléma! Az oszc-k lokalizáltak, helyhez rögzítettek. Kvmechanikában ±különböztethetők, mert lokalizáltak. Ut ~fgv tényleg szorzat ~fgv.)

Így a fundo. Inlet korrekt. T

• Milyen td kov belőle?

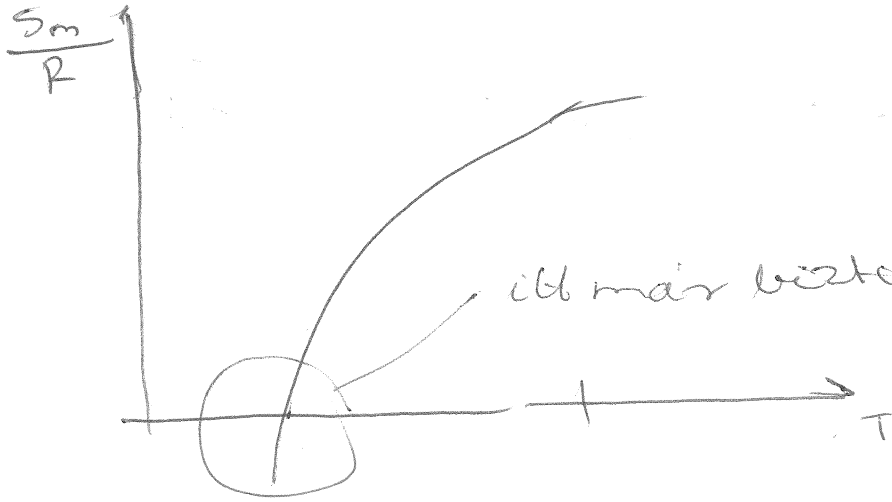
az ahh. miatt jött be. TD III abszolutizálja S-t, de kl. fiz. ∅ tudja TD III-t.

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = Nk\left[\ln\frac{V}{N} + 1 + \frac{3}{2}\ln\frac{2\pi m k T}{h^2} + \frac{3}{2}\right]$$

kl. fizben entrópia konstanssal eltolódó. Ez az ① pont ezt teszi

$$= S(V,N,T)$$

klassz 1atomos gáz entrópiafgv.
Extenzivitást tudja.
Ábrázolva:



itt már biztos nem jó a klassz számolásunk!
A szobahőm. viszont klassz. tartományban van már.

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{N,T} = \frac{NkT}{V}$$

$$\Downarrow$$

$$pV = NkT$$

áll. 1nlet. Ehhez nem kell figybe venni a molekulák szerkezetét! Csak az kell, h ideális legyen. Sőt, keverékre is igaz. Mindegy, milyen típusú gázokból áll.

$U = \frac{3}{2}NkT$ viszont speciális! Csak 1atomos id. gázra vonatkozik!

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T} = -kT\left[\ln\underbrace{\frac{V}{N}}_{\overset{\mathrm{I.}}{=\frac{kT}{p}}} + \cancel{1} + \underbrace{\frac{3}{2}\ln\frac{2\pi mkT}{h^2}}_{\overset{\mathrm{II.}}{\ln\left(\frac{\zeta}{V}\right)}} \cancel{-1}\right] =$$

2. tag dim

$$= \begin{cases} \mathrm{I.}\quad kT\ln p + \underbrace{kT\left[-\ln kT + \frac{3}{2}\ln\frac{2\pi mkT}{h^2}\right]}_{=\phi(T)} \\ \mathrm{II.}\quad -kT\left[\ln\zeta - \ln N\right] \\ \qquad (\ln v + \ln t = \not{1}) \end{cases}$$

Ideálisilag jó? μ intenzív! jó!

$\mu(\frac{N}{V}, T)$

ha 1komponű rendszer van, akkor csak 2 intenzív álljel független!

$$e^{-\frac{\mu}{kT}} = \frac{N}{\zeta} = \frac{N}{V/\lambda_T^3} = \frac{\lambda_T^3}{V/N} = \left(\frac{\lambda_T}{(V/N)^{1/3}}\right)^3 \ll 1$$

ezt írjuk a klasszikus tartományra

Id. gázban 2 hosszúság Dsei mennyi jelenik meg. $\frac{\lambda_T}{V/N}$: részecskék közötti átlagos távolság

Magas hőmen $\lambda_T \longrightarrow 0$

2 esetben teljesül:

$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_T \text{ kicsi} \\ \\ \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \text{ nagy (az átlagos távolság) = kicsi a sűrűség.} \end{array} \right.$

e^--knál λ_T nem lesz túlságosan kicsi, ez lesz a probléma – mivel λ_T-ben ott van a tömeg. e^--é kicsi → nehezebben teljesítik a klasszikus feltételt. e^--k fémekben Ø számolhatók szobahőmen.

Klasszikusság feltétele μ szempontjából: μ erősen ⊖ menny.

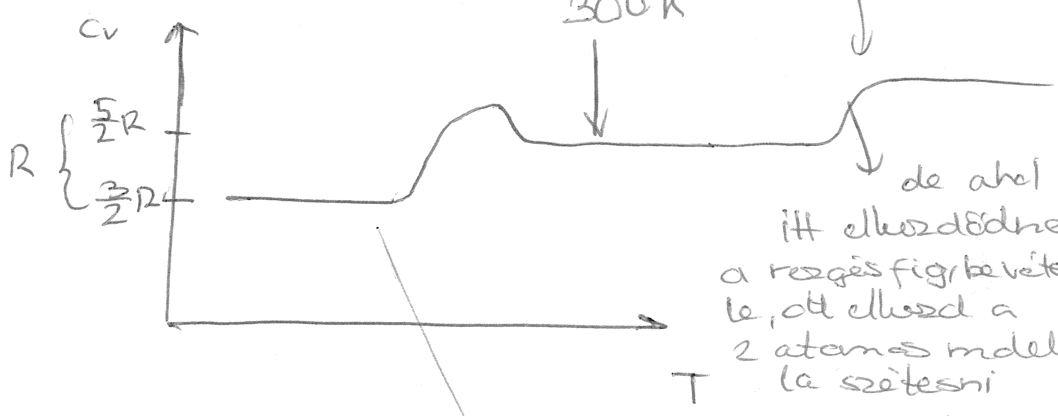
2.45 hiány

az th az ekvipartició miatt is.

$$C_v^{forg} = \begin{cases} R: & T \gg T_F = \frac{h^2}{2\Theta k} \text{ (magashőmű 6ates eset.} \\ 12R\left(\frac{T_F}{T}\right)^2 e^{-\frac{2T_F}{T}}: & T \ll T_F \end{cases}$$

moláris!

Einstein-tu hőkapacitás hoz has. alakú



de ahol itt elkezdődne a rezgés figy. bevétele, ott elkezd a 2 atomos molekula szétesni

haladási járulék: $\frac{3}{2}R$

ilyenkor: a forgi szabi fok be van fagyva ≡ a klassz. ekv.-hoz képest ∅ gerjesztve - ∅ elég hozzá a hőm.

Pl.:

HCl: 15 K

N_2, O_2, NO: $2 \approx 3$ K

forgási hőmek

Forg. hőm akkor lesz nagy, ha Θ kicsi.

H_2: 85 K

→ bátran kezelhetők 2atomos molekulák klasszikusan.

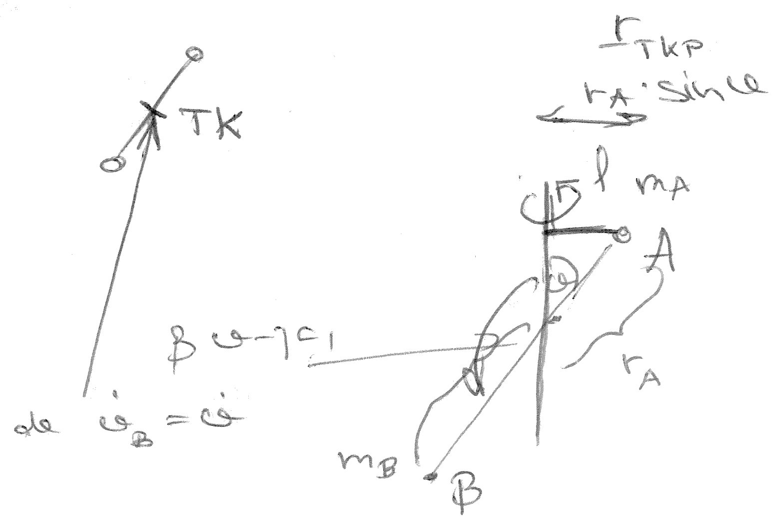
1 rezgési mozgás $2 \cdot \frac{1}{2}R$-et hoz.

Ha mindent végigcsinálnánk: $\frac{7}{2}R$ lenne.

De az áll igaz, h rezgési át. hőm sokkal nagyobb, mint

* + ekkora hőmen akkora a rezgés amplitudója, hogy az már ∅ harmos és ∅ tárgyalbó Einstein-modellel.
Ezért elegendő nekünk az is, ha a rezgi-t már ∅ vesszük figyelembe.

Klasszikus rotátor-probléma



lineáris molekulát 2 szöggel lehet jelli.

1 molekulának 3+2 koordinátája van.

10 > N Do lesz a fázistér

$q_1 = \vartheta, \quad q_2 = \varphi$
általánosított koordk.

+ kell találnunk az általt p-ket is, aztán az E-t fel kell írni a fázistérben, utána Boltzmann!

$$L = L(q_1, q_2; \dot q_1, \dot q_2) = L(\vartheta, \varphi, \dot\vartheta, \dot\varphi)$$

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot\vartheta}; \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}$$

Ralsz Lagrange fgv. e: mozgE - potE.
Itt ∅ potenciál.

$$L = E_k = \frac{1}{2} m_A \left(r_A^2 \cdot \dot{\vartheta}^2 + (r_A \sin\vartheta \cdot \dot{\varphi})^2 \right) + \frac{1}{2} m_B \cdots =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\, \dot{\varphi}^2 \right) \underbrace{\left(m_A r_A^2 + m_B r_B^2 \right)}_{\Theta}$$

$$L = \frac{1}{2}\Theta \left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\, \dot{\varphi}^2 \right) = L(\vartheta, \cancel{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi})$$

ciklikus koordináta.
Megmaradó menny lesz
(Euler-Lagrange)

$$\left.\begin{aligned} p_\vartheta &= \Theta \cdot \dot{\vartheta} \\ p_\varphi &= \Theta \cdot \sin^2\vartheta\, \dot{\varphi} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \mathcal{H}(\vartheta, \cancel{\varphi}, p_\vartheta, p_\varphi) =$$

$$\boxed{= \frac{1}{2\Theta} \left[p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta} \right] = \mathcal{H}}$$

1 db rotátor $\mathcal{H}$-ja

1 részecske állapotösszeg:

$$\mathcal{Z}_f = \frac{1}{h^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \int_{-\infty}^{\infty} dp_\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dp_\vartheta \; e^{-\frac{1}{kT}\frac{1}{2\Theta}\left[p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}\right]} =$$

$$= \frac{2\pi}{h^2} \int_0^{\pi} d\vartheta \sqrt{\pi^2 (2kT\Theta)^2} \sqrt{\sin^2\vartheta} =$$

$$= \frac{(2\pi)^2}{h^2} kT\Theta \cdot 2 = \frac{8\pi^2 \Theta \cdot kT}{h^2} \overset{?}{=} \frac{T}{T_r} =$$

$$= \frac{T}{\hbar^2} 2k\Theta$$

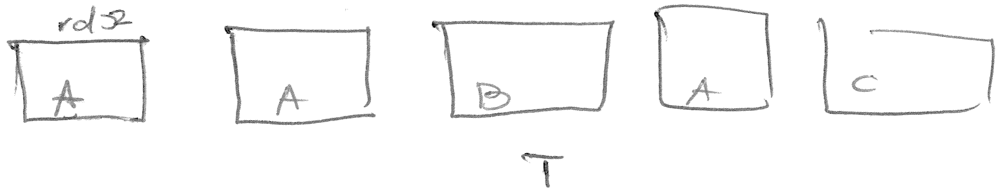
Pont ezt kaptuk,
mint előző órán,
(~~pontosan~~ ez annak,
h a fáziscella méretét
pont h-nak választottuk)

III

Kanonikus tárgymóddal ekvivalens: (Máté szerint)

Maxwell - Boltzmann - statisztika

P_m



$P_B = \dfrac{N_B}{N_{össz}}$ Ez a szabadságkép.

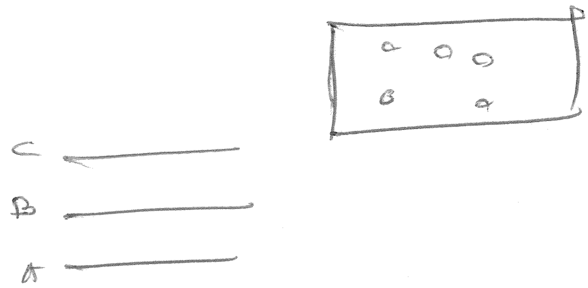
B mikroállk.-rd száma

$N_B = N_{össz} \cdot \dfrac{e^{-\frac{1}{kT}E_B}}{Z}$

$\overline{N_B} \sim e^{-\frac{E_B}{kT}}$

ez csak azt használja ki, h rdszek ... ... függetlenek, + hőmé... környben vannak és + különböző-tet7ők

Ezt a szabadságot + tudja valósítani 1 igazi rdsz.



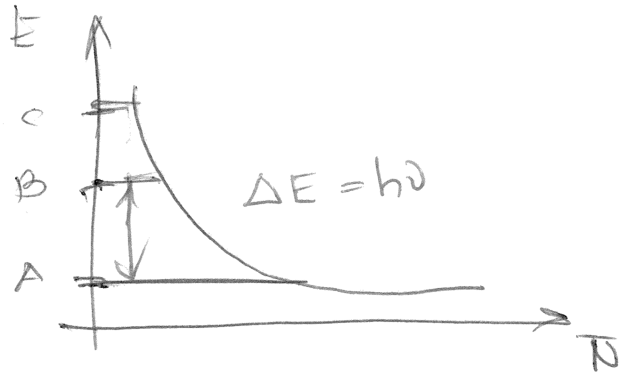
$\overline{N_B} = \dfrac{e^{-\frac{E_B}{kT}}}{e^{-\frac{E_A}{kT}}} = e^{-\frac{\overbrace{E_B-E_A}^{\Delta E \text{ gerj } E}}{kT}}$

300K

$kT = 25\,meV \longrightarrow \Delta E \gg kT$

normális esetekben $\overline{N_B}$ 1-nél jóval kisebb

szám. ⇒ atomok szobahőmen alapállban van



Termo Insúlyban a magasabb E-jű nívók kevésbé vannak betöltve, mint az alacsony E-jű nívók.

Ha B áll.-ban van, indukált és spontán emisszióval visszamegy A-ba.
B betöltöttsége indukált emisszió miatt nem lehet magasabb betöltöttségű, mint A-é.

Fényerősítés feltétele: inverz populáció.
Termikusan ∅ inv. pop. Ahhoz, h legyen, kell 1 3. nívó is.

un

(P1) Maxw-B.

Fehérje, 1400 H-kötés van.
$t = 37\,°C$
1400 H-kötés. $= N_{össz}$
Kötési $E = 18{,}8$ kJ/mol

(Felt.: függetlenek.
Adott hőm. kötések nyílván + különböztetők.
→ Tudja a kritériumokat)

$$A: \xrightarrow{\Delta E} B$$

A: amikor 1 H-kötés kötve van

B: amikor felbomlott.

$$\frac{\overline{N}_B}{N_{össz}} = ? = \frac{e^{-\frac{E_B}{kT}}}{e^{-\frac{E_A}{kT}} + e^{-\frac{E_B}{kT}}} =$$

v

$$= \frac{1}{e^{+\frac{E_B - E_A}{kT}} + 1} = \frac{1}{e^{\frac{18800\,J}{N_A \cdot kT}} + 1} = 6{,}77 \cdot 10^{-4}$$

$N_A \cdot k = R$

kJ/mol miatt

$\overline{N_B} = a\,95$ 37°C - on átlagosan 1 van felbomolva.

M-B-nál ∅ az a lényeg, h a rdsz klassz v kvantumos, hanem h + különböztethetők legyenek az objektumok.

Einstein modellben lokalizált oszcik voltak → megkülönböztethetők → M-B-t használtuk volna rá.

$n=5$ $n=0$ $n=5$

$$\overline{N_n} \sim e^{-\frac{1}{kT}\cdot \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

arányossági tényező: ha $\overline{N_n}$-eket összegezzük, a teljes oszc számra kell normálódnia. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \overline{N_n} = N\right)$

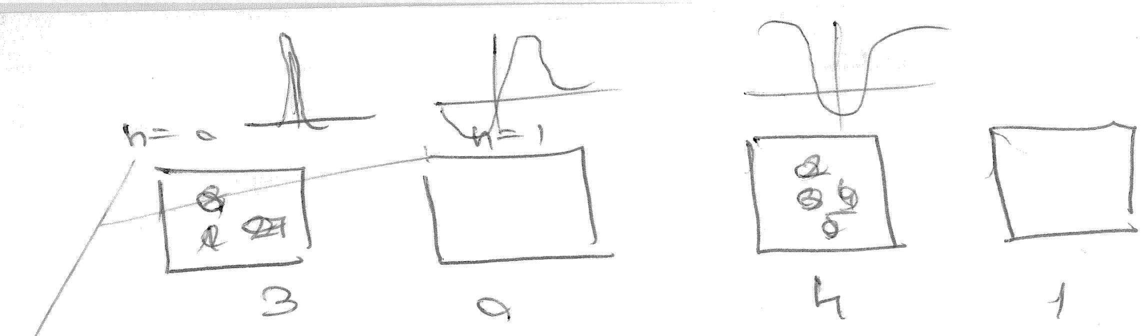
$$\overline{N_n} = N \cdot \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{Z}$$

$$Z = \left[2\,\mathrm{sh}\,\frac{\hbar\omega}{2kT}\right]^{-1}$$

Makroáll. rögzítése: össz. oszcinak + adom a kvszámát.

Most alternatív módon is kijelölhetjük: ha + adom, az egyes dobozoknak mekkora a betöltöttsége

VI



ezek most ⊘ az oszcillátorok, hanem osz c - kvállapotok → a doboz van összesen.

N_n = hány db osz. van az n. dobozban =

$\{N_n\} \equiv (N_0, N_1, N_2 \dots)$ most a koordinátapí vektort adunk.

+ származásai $\sum_{n=0}^{\infty} N_n = N$ ez mellékfeltétel

De ezzel még csak azt mondtam meg, melyikben a b ...
de mivel 4 különböztethetők, olyikra számot kell írni.

Ekvipartíció

Klasszikus tétel:

$H(q_1 \dots q \dots, p_1 \dots p_f) = a \cdot q_i^2 + H'(\dots)$

olyan hamilton fv, amiben vmilyik koordináta négyzetesen leválasztódó a Ham. további részéről. Ekkor a

tétel: $\overline{a q_i^2} = \frac{1}{2} kT$

Ekvipart. Gauss-os tula. a.

Biz.:

$$\overline{a q_i^2} = \frac{\int \cdots \int a q_i^2 \, e^{-\beta \mathcal{H}}}{\int \cdots \int e^{-\beta \mathcal{H}}} =$$

$\mathcal{H} \to \mathcal{H}' + a q_i^2 \Rightarrow \boxed{e^{-\beta \mathcal{H}} = e^{-\beta \mathcal{H}'} \cdot e^{-\beta a q_i^2}}$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dq_i \, a q_i^2 \, e^{-\beta a q_i^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} dq_i \, e^{-\beta a q_i^2}} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dq_i \, e^{-\beta a q_i^2}}_{\sqrt{\frac{\pi}{\beta a}}} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \sqrt{\frac{\pi}{\beta a}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2} kT$$

Példák:

(i) 1 atomos id gáz $\qquad \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m}$ $\qquad p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2$

(ii) 3Ds Einstein. $\qquad \mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_i^2 \cdot r_i^2$ $\qquad x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$

$$\Longrightarrow \bar{\mathcal{H}} = N \cdot \underbrace{3}_{3D} \cdot \underbrace{2}_{2\ E\ tag} \cdot \frac{1}{2} kT$$

(iii) 2atomos molekból álló id gáz

$$\bar{\mathcal{H}} = N \cdot (3+2) \frac{1}{2} kT = \frac{5}{2} NkT$$

(iv) k atomos, id gáz, nem lineáris

(pl )

$$\bar{\mathcal{H}} = N(3+3) \frac{1}{2} kT$$

elhagyjuk a ~~forgó~~ Et

3 transzlációs tag

3 forgó tag

Mi van, ha a rezgések Φeb befagyva. Hány db rezgési módusa van? ↑
Tétel: minden * rdsz transzformálható úgy, h független oszcillátorok rendszerévé 1xülődik.
Ezeket a független oszchat nevezzük módusnak

* csatolt oszcillátorrdsz.

Hány független rezgési szabi fok marad?

$k \cdot 3 - 3 - 3 = \underline{3k - 6}$ a rezgési módusok száma

összszabi fok — kiszedtem a TKP-t — merev!

A fentikez ($\bar{\mathcal{H}}$) rezgé módusonként $kT \left(= 2 \cdot \frac{1}{2} kT\right)$ E jut.

Minden rezgési módushoz tartozik egy karakterisztikus hőm. Ált a szobah. alacsony ezekhez képest $\longrightarrow$ pl. 3R a moláris hőkapacitása a vizgőznek.

Fermi és Bose rdszek

olyan rdszeket nézünk, ami független részecskékből áll, és T hőmű hőtartállyal áll kapcsban.

Pl. Brown-mozgás
ideális gáz
fémekben a szabad é-k

Függetlenséget hon veszi figybe a kvm?

- $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \dots \hat{H}_N$ az Eop. oldaláról

(csak az 1-es számú részecske koordira h.

- $\Psi(r_1, r_2, r_3, \dots, r_N) = \Psi(r_1) f(r_2) \dots \xi(r_N)$ a leg legegyszerűbb esetben. Ez csak a +kü-lönböztethető esetben igaz!

Ált.: az 1részecske ~fgvből kell vhogy kikombinálni a rdsz ~fgv.-t.

Vizsgáljuk:

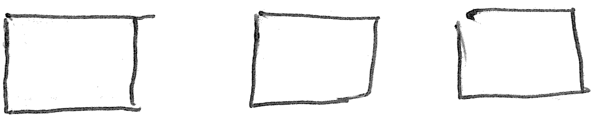
(i) +különböztethető klasszs (Maxwell-Boltzmann) statisztika (volt.

(ii) Fermi-részecskék +különböztethetetlensége (feles spin!)

(iii) Bose-részecskék +különböztethetetlensége.

ii) +különböztethető objk

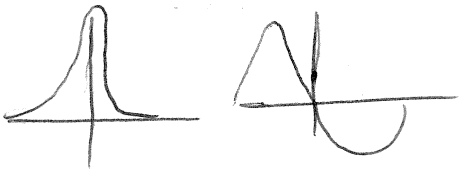
Pl.: Einstein oszcrdsz



ezek a dobozok jelölik az 1részecske állapot

$n=0$ $\quad$ $n=1$

$\psi_{n=0}(x)$ $\quad$ $\psi_{n=1}(x)$



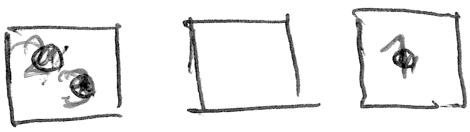
$$\underbrace{\psi(x_1,x_2,x \ldots x_N)}_{\text{ez általban az oszcrdsz ~fgve}} = c\cdot\psi_{n_1}(x_1)\,\psi_{n_2}(x_2)\ldots\psi_{n_N}(x_N)$$

Pl $N=3$

$n_1=2,\quad n_2=0,\quad n_3=0$

$c\psi_2(x_1)\cdot\psi_0(x_2)\psi_0(x_3)$

ezt a betöltési-szám reprezentációban:



$n=0$

$\psi_{n=0}(x)$ .... --

Betettem a golyókat, de meg is kell számozni őket, akkor lesz csak ekvivalens a fenti ~fgvénnyel.

ez a ~fgv semmilyen Részecskék felcserélésére szimmval Ø rendelkezik!

$\{N_s\} = \{2,0,1,0,0\ \ldots\}$

hány golyó van az s. 1részecske-állban

betöltési konfiguráció Mikroáll. ezzel nincs tadva! +számozás kell

$\Updownarrow$

m ≡ telj rdsz mikroállapot megadása ≡ ~fgv tadása . . .

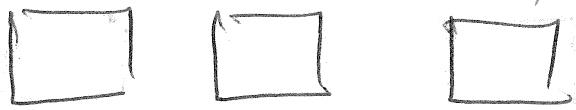
Ilyen reprezentációval hogy számolunk?

$$\begin{cases} N = \sum_s N_s \\ E_m = \sum_s N_s \varepsilon_s \end{cases}$$

mikroáll. E-ja

s kvázirészecske-áll. E-ja

$\varepsilon_{n=0} = \frac{\hbar\omega}{2}$ $\varepsilon_{n=1} = \frac{\hbar\omega}{2}(\cancel{1}+\frac{1}{2})$



n=0 n=1 n=2

$c\psi_2(x_1)\psi_0(x_2)\psi_0(x_3)$ állnak mi az E-ja?

$\hat{H} c\psi_2(x_1)\psi_0(x_2)\psi_0(x_3) =$ sajátértékre

$\hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3$

$$= \overbrace{[\hat{H}_1 \psi_2(x_1)]}^{\varepsilon_2 \psi_2} \psi_0 \psi_0 + \overbrace{[\hat{H}_2 \psi_0(x_2)]}^{\varepsilon_0 \psi_2} \psi_2 \psi_0$$

$$+ \varepsilon_0 \psi_2 \psi_0 \psi_0 =$$

$$= (\varepsilon_2 + 2\varepsilon_0)\psi_2\psi_0\psi_0$$

$Z = \sum_m e^{-\frac{1}{kT}E_m}$ = volt. =

$\sum_m = \dots \sum_{\{N_s\}} \frac{N!}{N_1! N_2! \dots}$ m: $\boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{\cdot} \dots$ $\{N_s\}$

$\sum_s N_s = N$

azt jelenti, h mindent felcserélünk, de túlszámolunk

ez a kombinatorikai faktor veszi figyelembe, hogy hányféleképpen számozhatunk

$$= \sum_{\{N_s\}} \frac{N!}{N_1! N_2! \dots} \underbrace{e^{-\frac{1}{kT}\sum_s N_s \varepsilon_s}}_{\prod_s \left(e^{-\frac{1}{kT}\varepsilon_s}\right)^{N_s}}$$

ez van

ezt binoms tétellel

$(a+b+c\ldots)^k = (\ldots)(\ldots)$

$$\boxed{Z = (\underbrace{e^{-\beta\varepsilon_0} + e^{-\beta\varepsilon_1} + \ldots}_{\sum_s e^{-\beta\varepsilon_s} = z})^N = z^N}$$

egyrészecske állapotösszeg

Ha nem lenne ott a kombi faktor, ∅ tudnánk használni a binomis tételt!

kombi faktor

Legérdekesebb a +különböztet(h)etőségen múlik!

Továbbiakban

$\overline{N_s}$ - k lesznek a fontosak.

$$\overline{N_s} = \frac{1}{Z}\sum_{\{N_s\}} N_s \cdot e^{-\frac{1}{kT}N_s\varepsilon_s} =$$

$$= \frac{1}{Z}\sum_{\{N_s\}} \frac{N!}{N_1!N_2!\ldots} N_s \cdot e^{-\frac{1}{kT}\sum_s N_s\varepsilon_s} =$$ def szerint az a betöltött-ségi átlag

$$= -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_s}\ln Z = -kTN\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ln z = \cancel{+}\frac{NkT}{z}e^{-\beta\varepsilon_s}\ (\cdot\cancel{\beta})$$

kisε szerint → csak az s. tag kiválasztja

$$\boxed{\overline{N_s} = \frac{N}{z}e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}}}$$

+k.ZO, kétlyuk kapcsban álló....

....

Ez a Maxwell-Boltzmann-statisztika!

ugye $\sum_s e^{-\frac{\varepsilon_s}{kT}} = z$

M-B ∅ csak a függetlenségből, hanem a +különböztethetőségből együtt következik!

Fejezzük ki z-t a μ-val! (h. majd a 3 stat. összehasonló legyen) szabad E $= -kT \ln Z = -kT \ln z^N$

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = -kT \frac{\partial}{\partial N} \ln \longrightarrow z^N \text{ (Einstein)} =$$

$$\frac{z^N}{N!} \text{ (id. gáz)} =$$

$$= -kT\left[\ln z - \frac{\partial}{\partial N} \ln N!\right] =$$

$$= -kT \ln z \Longrightarrow \boxed{e^{\frac{\mu}{kT}} = \frac{1}{z}}$$ Einstein-

$$= -kT\left[\ln z + \underbrace{\frac{\partial}{\partial N}(N \ln N - N)}_{\ln N + 1 - 1}\right] =$$

$$= -kT\left[\ln\left(\frac{z}{N}\right)\right] \Longrightarrow \boxed{e^{\frac{\mu}{kT}} = \frac{N}{z}}$$ id gáz

Összefogl: Maxwell-Boltzmann:

$$\overline{N_s} = \xrightarrow{\text{Einstein}} N e^{-\frac{1}{kT}(\varepsilon_s - \mu)}$$ (fgtlen, +különb.ztő, lokalizált)

id gáz: $$e^{-\frac{1}{kT}(\varepsilon_s - \mu)}$$

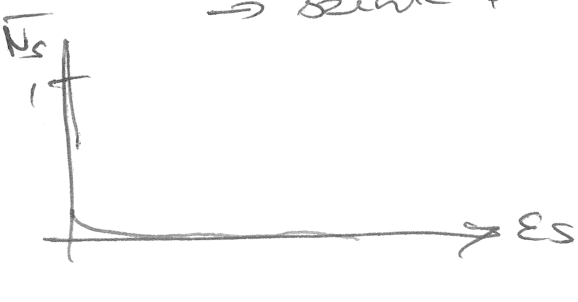
fgtlen, +különböztető, de nem lokalizált részek statisztikája;

a normálási faktor az, ami más

μ-je bl. id gáznak nagy − szám → szinte 0 a vszg-ek

$\overline{N_s}$ kicsi.

vabba az 1-részecske állba 2 is bekerüljön.

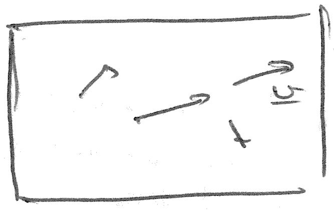


$\underline{m}$: teljes rdsz mikro állapota

$$\overline{N_s} = \frac{N}{Z} e^{-\frac{1}{kT}\varepsilon_s} = \underbrace{e^{-\frac{1}{kT}(\varepsilon_s-\mu)}}$$

ebben az alakban az ideális gázra vonatkozik.

Maxwell-féle sebeloszl.:



id. gáz.

$$\underbrace{n(\bar r,\bar p)}_{\text{vsz.s}}\ \underbrace{d^3r}_{\text{Velem}}\ \underbrace{d^3p}_{\text{imptérbeli Velem}} :$$

az még nem a Maxwell-féle sebeloszl.

$$\int d^3r\ n(\bar r,\bar p)\, d^3r\, d^3p \qquad f(p)dp : [p, p+dp]$$

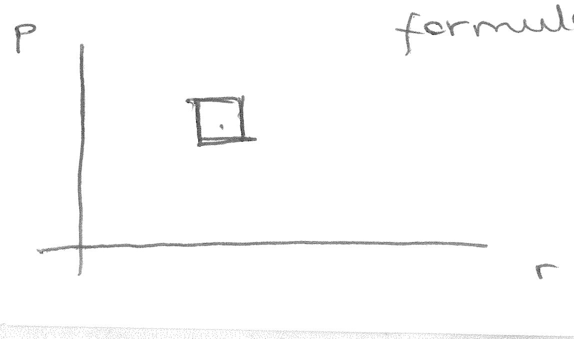
Amiből mi kiindultunk, az tk. ez az $n(\bar r,\bar p)$ fgv.

Amit itt kvan részecske áll.nak neveztünk, az klasszikusan 1etlen egy rész. fáziscellája

$s \longleftrightarrow \bar r, \bar p$ által kijelölt fáziscellával ekvivalens.

$$\overline{N_s} = N \cdot \frac{1}{V}\frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-\frac{1}{kT}\frac{p^2}{2m}}$$

Ha a gáznak a hely szerinti eloszlását nézem: barometrikus magasság-formula.



$$\boxed{\overline{N_s}}\cdot\boxed{\frac{d^3r\cdot d^3p}{h^3}} = n(\bar r,\bar p)\,d^3r\,d^3p$$

azt mondja meg, h adott fázistérfogatba hány elemi cella van.

egy cellának mennyi a betöltöttsége

$d^3p = 4\pi^2 p\,dp$

$$f(p)dp = V\frac{N}{\cancel{h^3}}\frac{\cancel{h^3}}{V(2\pi mkT)^{3/2}}\,\overbrace{4\pi p^2dp}^{d^3p}\,e^{-\frac{1}{kT}\frac{p^2}{2m}}$$

imp iránya γ, csak az imp nagysága érdekel, azért jött a p^2

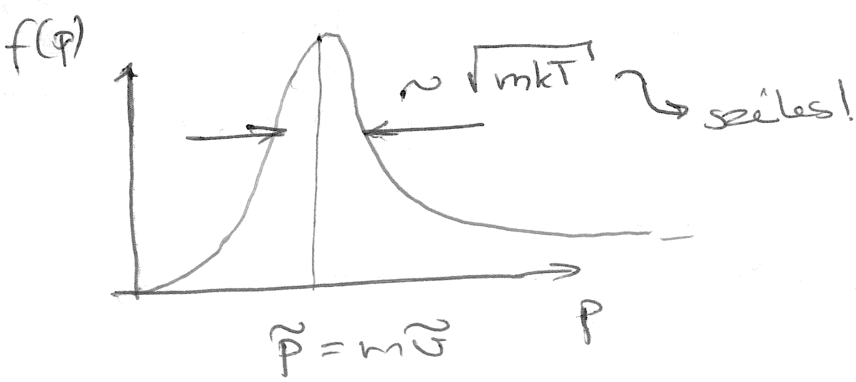
$$\boxed{f(p) = N\frac{4\pi}{(2\pi mkT)^{3/2}}\,p^2\,e^{-\frac{p^2}{2mkT}}}$$

Ez th. az imp nagyságának eloszlása *

f(p) : vsz g

f(p) dp = átlagosan hány atom van a p és dp között

ha $p=mv$: sebesség szerinti eloszlás



tipikus impulzus.

$$\tilde p = \sqrt{2mkT} \longrightarrow \tilde v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

az a seb, amivel a legtöbb atom rendelkezik.
Ez pár száz m/s.

* $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$

független eloszlásúak.
És egyenként Maxwell-Boltzmannt követnek, ahol ϕ
benne p^2 $\longrightarrow$ egyszerű normális eloszlás

p_x, p_y, p_z: iránytól független Gauss-eloszlások.

$|p|$ eloszlása $n=3$ szab. i fokú Khi-eloszlás.

Ezzel klasszikus részt bevégeztük.

Független, de +különböztethetetlen részecskékből álló rdszk.

pl. kvantumideális gáz

ϕ kh.

azonos részecskék kvantum elvét figyeljük

Itt viszont kettő kell választani a tárgyalást.

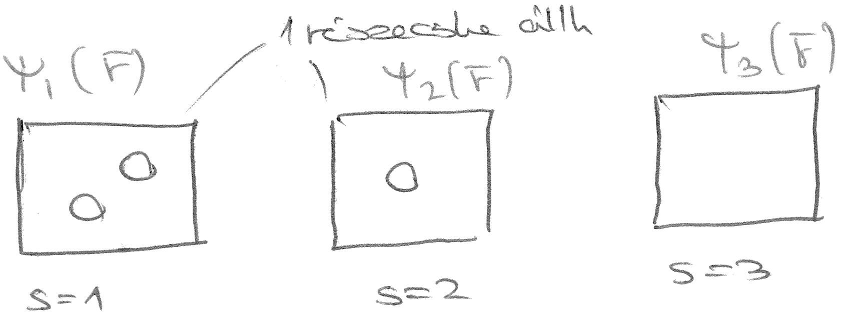
bozon: egész spinű. pl. α-részecske (0 spin)
foton (1 spin)

fermion: feles spin. pl. e^-
p^+
n^0

$\boxed{\text{Bose rdszk}}$ (akárhány golyót tehetek be)

Betöltési szám repr.

Adott mikroállapot golyók ilyen kiosztása



Nem számoztuk őket $\longrightarrow$ ϕ klasszikus.

Minden 1 részecske állhoz tartozik !

1 részecske ~ fgv.

(1 koordinátától függ)

$$\Psi(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3) = c\left[\psi_1(\bar{r}_1)\psi_1(\bar{r}_2)\psi_2(\bar{r}_3) + \psi_1(\bar{r}_1)\psi_1(\bar{r}_3)\psi_2(\bar{r}_2) + \psi_1(\bar{r}_2)\psi_1(\bar{r}_3)\psi_2(\bar{r}_1)\right]$$

Bose ~fgv-nek olyannak kell lennie, h bmely 2 tagot felcserélem, uaz legyen
$\longrightarrow$ szimmetrizálni kell!

az 1 szimmetrizált ~fgv.

ucbben az esetbe

HF $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3$

csak az $\bar{r}_1$ koord ra hat.

Ezt hattassuk a $\Psi(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3)$ ~fgv-re és vegyük figybe: $H_1\psi_1(\bar{r}_2) = \varepsilon_1\psi_1(\bar{r}_2)$

Kiderül:

$$\hat{H}\Psi = (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\Psi$$

$\longrightarrow$ teljes rdsz E-ja az trészecske allk E-inak összege.

Adott mikroáll.: $E_m = \sum_s N_s \varepsilon_s$

ez volt a képlet a különböztető esetben is

$$N = \sum_s N_s$$

Ha ezeket tudjuk, az áll összeg:

$$\underbrace{Z = \sum_m e^{-\frac{1}{kT}E_m}}_{\text{általában.}} = \sum_{\substack{\{N_s\} \\ \sum_s N_s = N}} e^{-\frac{1}{kT}\sum_s N_s \varepsilon_s}$$

/részecskeszám rögzített. (mellék-feltétel)

N_s konfigurációkra

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}$

megkülönböztető esetben itt volt egy kombinatorikai faktor. Anélkül ezt az összeg nem írható fel zárt alakban.

→ kanonikus tárgymód ∅ alkalmas ~~...~~ a kvantumideális gázok tárgyalására, mert a részecskeszám rögzítettsége lehetetlenné teszi ezt.

→ Átlépünk nagykanonikus tárgymódba: részecskeszám is fluktuálhat, ∅ csak az E.

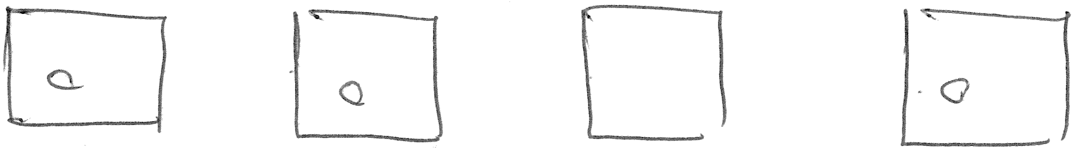
$$\overline{N}_s = -kT \frac{\partial}{\partial \varepsilon_s} \ln Z$$

ez érvényben van még. De amíg ∅ zárt alak, addig ∅ tudunk továbbmenni.

Fermi rendszerek

minden 1 részecske állnak csak 2 betöltöttsége lehet.

Hullámfgvnek antiszimmnak kell lennie bármely 2 vtgr felcserélésére.



s = 1 s = 2 s = 3 s = 4

$$\Psi(\bar r_1, \bar r_2, \bar r_3) = c\left[\psi_1(\bar r_1)\psi_2(\bar r_2)\psi_4(\bar r_3) + \quad - \quad\right] =$$

$$= c \det \begin{vmatrix} \psi_1(\bar r_1) & \psi_2(\bar r_1) & \psi_4(\bar r_1) \\ \psi_1(\bar r_2) & \psi_2(\bar r_2) & \psi_4(\bar r_2) \\ \psi_1(\bar r_3) & \psi_2(\bar r_3) & \psi_4(\bar r_3) \end{vmatrix}$$ Slater-det.

antiszimm. egy detet jelent

Pauli-elv: 1 dobozban csak 1 részecske.
Ha nem, 2 sora v 2 oszlopa ua a mátrixnak $\Rightarrow$ detje $\emptyset$.

Mikroáll. tadása Fermi-rdsznél:

$$m \longleftrightarrow \{N_s\} = \{1,1,0,1,0,1,1 \dots\}$$

tkötés: $\sum_s N_s = N$

Igazi k: $E_m = \sum_s N_s \varepsilon_s$

$N = \sum_s N_s$

Nagykanonikus tárgyalásmód

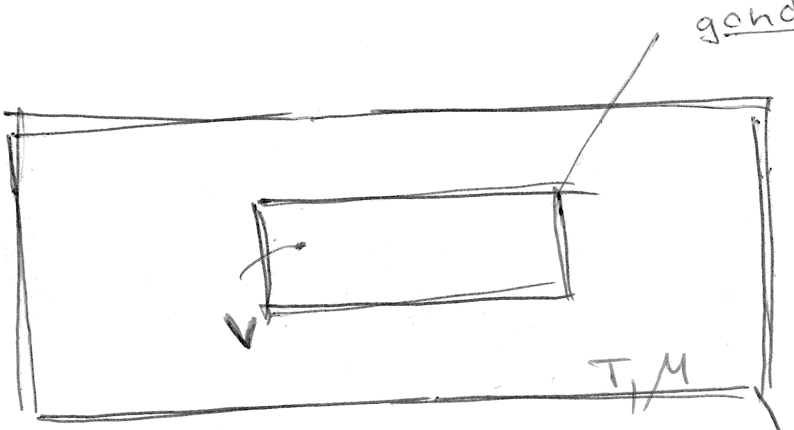
kans T, N, V áll.

mikrokans: E, N, V áll. (izolált, zárt rdsz.)

nagyks. T, μ, V áll.

gondolatban kiválasztom ezt a részét.

→ részecskék ki-be röpködnek



zárt rdsz

Mikroáll.: éppen hány részecske van benne ($N=2$) és hol vannak

Mikroáll vszge: $$\boxed{P_{\underset{\smile}{m}} = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\frac{1}{kT}(E_{\underset{\smile}{m}} - \mu N)}}$$

M-B.

elo. paraméterei.

$$\sum_{\underset{\smile}{m}} P_{\underset{\smile}{m}} = 1 \Longrightarrow \mathcal{Z} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum \ldots$$

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\underset{\smile}{m}} e^{-\frac{1}{kT}(E_{\underset{\smile}{m}} - \mu N)} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\frac{\mu}{kT} N} \sum_{\underset{\smile}{m}} e^{-\frac{1}{kT} E_{\underset{\smile}{m}}}$$

N fix!

$Z(N, V, T)$

ez a kans állösszeg

ez ott ad domns értéket, ahol $N \simeq N_{átl}$.

$N_{átl} \sim N_A$

22. 8.

Nagykanonikus tárgymódnak mi a tdi tárgymódja?

Minden tmódhoz tartozik 1 potenciál, ami a
változók fgvben 1 fundamentális egyenlet.
Most:

Φ : nagykanonikus pot.
Ez a szabadE. Legendre-trafója.

$$\boxed{\begin{gathered}\Phi = F - \mu N \\ \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T} = \mu\end{gathered}}$$

(ez nem elég $\Rightarrow$)

ez a 2 adja Φ-t mint μ fgvt.
$\longrightarrow \Phi(V, T, \mu)$

H fund. eglet ez? Ehhez nézzük Φ teljes változását:

$$d\Phi = dF - \cancel{\mu dN} - N d\mu =$$

$$-SdT - pdV + \cancel{\mu dN}$$

$$F(T, V, N)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial V}\right)_{\mu, T = \text{áll}} = -p$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}\right)_{V, p = \text{áll}} = -N$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_{\mu, V} = -S$$

parc. derivált-tal megkaphatók
tdi fgvek $\Rightarrow$
ettől fund. eglet.

1etlen extenzívtől függ
most itt.
De olyan tdi pot már Φ,
ami 1től sem függ.

<u>Mi a Φ? Hogy lehet kiszámolni?</u>

Először az S-t, aztán a
2 közti összefüggést
használjuk!

S általánosan: Neumann-entrópia

$$\boxed{S = -k \sum_m P_m \ln P_m}$$ ez az S ált. def-ja.

vszi változó eloszlása.

$$S = -k \sum_m P_m \ln P_m = -k \sum_m P_m \ln\left(\frac{e^{-\frac{1}{kT}(E_m - \mu N)}}{\mathcal{Z}}\right) =$$

$\sum_N \sum_m$

$$= -k \sum_m P_m \left[-\frac{1}{kT}(E_m - \mu N) - \ln \mathcal{Z}\right] =$$

$$= \frac{1}{T}\bar{E} - \frac{\mu}{T}\bar{N} + k\ln\mathcal{Z}\cdot 1$$ $/\cdot T$, rend

$\bar{E}$ = U, belső E

$$\underbrace{TS + \mu\bar{N} - \bar{E}}_{= -\Phi} = kT\ln\mathcal{Z}$$

$$\boxed{\Phi = -kT\ln\mathcal{Z}} \longrightarrow \Phi(T,V,\mu)$$

Nyomással mi a helyzet?

$$p = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial V}\right)_{T,\mu=\text{áll.}} = | = -\frac{\Phi}{V}$$

Φ maga extenzív és 1 szál extenzívtől függ.

→ ~~kell lenni egy f~~ V-ben lin-s. a Φ.

$$\longrightarrow \Phi(T,V,\mu) = V\cdot f(T,\mu) \Longrightarrow$$

f: lokális nagyks p.

$$\Longrightarrow \boxed{\Phi = -pV}$$ Euler-féle összefüggés

$p(T,\mu)$ ez nem szokásos

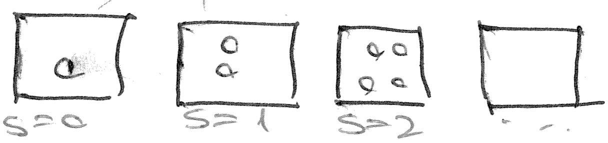
μ nem mér$\mathcal{H}$ő. $\mu(S,T) = ?$

2.2 10

Nagykan. alk. sa. kvgázokra: (V rögzített)

részecskeszám akármekkora lehet

1 részecske állh.



ha Bose-típusú a rdsz

$$\sum_{\{n\}} \dots = \sum_{N_0=0}^{\infty} \sum_{N_1=0}^{\infty} \dots \qquad \boxed{\text{Bose}}$$

Innentől függetlenül összegezhetők ki.

$$\sum_{\{n\}} \dots = \sum_{N_0=0}^{1} \sum_{N_1=0}^{1} \dots \qquad \boxed{\text{Fermi}}$$

Amit ki szeretnénk számolni:

mert a der. viszont 1 adott ε_s-et nagy

$$\overline{N_s} = -kT \frac{\partial}{\partial \varepsilon_s} \ln \tilde{Z} = -kT \frac{\partial}{\partial \varepsilon_s} \ln\left[\sum_{\{n\}} e^{-\frac{1}{kT}\sum_{s'}(\varepsilon_{s'}-\mu)\cdot N_{s'}}\right]$$

Ehhez — nagyk. állösszeg — összes izére

$$\bullet\ \tilde{Z} = \begin{cases} \sum_{N_0=0}^{1} \sum_{N_1=0}^{1} \dots \prod_s e^{-\frac{1}{kT}(\varepsilon_s-\mu)N_s} = \prod_s \left[1 + e^{-\frac{1}{kT}(\varepsilon_s-\mu)}\right] & \boxed{\text{Fermi}} \\ \sum_{N_0=0}^{\infty} \left[e^{-\frac{1}{kT}(\varepsilon_0-\mu)}\right]^{N_0} \cdot \left[e^{-\frac{1}{kT}(\varepsilon_1-\mu)}\right]^{N_1} \dots = \prod_s \frac{1}{1-e^{-\frac{1}{kT}(\varepsilon_s-\mu)}} & \boxed{\text{Bose}} \end{cases}$$

$$\bullet\ \ln \tilde{Z} = \pm \sum_{s'} \ln\left[1 \overset{F\ B}{\pm} e^{-\frac{1}{kT}(\varepsilon_{s'}-\mu)}\right]$$

$$\overline{N}_s = \cancel{-kT}\cdot\cancel{(\pm)}\,\frac{\cancel{(\pm)}\, e^{-\frac{1}{kT}(\varepsilon_s-\mu)}\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{kT}\right)}}{1\pm e^{-\frac{1}{kT}(\varepsilon_s-\mu)}} =$$

$$\boxed{\overline{N}_s = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{kT}(\varepsilon_s-\mu)}+1} \\[2ex] \dfrac{1}{e^{\frac{1}{kT}(\varepsilon_s-\mu)}-1} \end{cases}}$$

Fermi (-Dirac eloszlás)

Bose (-Einstein eloszlás

(uez Maxwell-Boltzmannban így nézett ki:

$\overline{N}_s = e^{-\frac{1}{kT}(\varepsilon_s-\mu)}$ (A 2nek a limesze)

M-B a +különböztethető részecskék statisztikája)

Ezzel már kiszámítható:

(rejtve)

$U = \overline{E} = \overline{\sum_s \varepsilon_s N_s} = \sum_s \varepsilon_s \overline{N}_s = U(V,\mu,T)$

$\overline{N} = \sum_s \overline{N}_s = \overline{N}(V,\mu,T)$

(T, V, N) az általános Ehhez.

$\mu\left(T, \frac{\overline{N}}{V}\right)$

részecskesűr.

$U(V, \overline{N}, T)$

Állalletet h kapjuk +?

$+pV = \Phi = +kT \ln Z =$

$= \pm kT \sum_{s'} \ln[\ldots] = \Longrightarrow p(T,\mu)$

Ez Φ a szokásos.

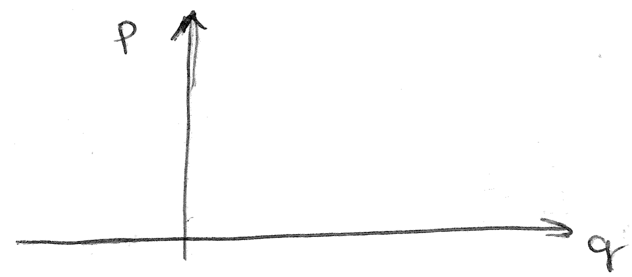
$p\left(T, \frac{\overline{N}}{V}\right)$

→ Nagyks hátránya: mindig μ jön ki, ami viszont kísérletileg $\emptyset$ hozzáférhető. + mati műveleteket kell végeznünk.

ε, $\varepsilon + d\varepsilon$ mennyi ... $g(\varepsilon)\, d\varepsilon$

ES.

Tdi limesz miatt $\Longrightarrow$ kvázi klasszikus Gáz-eset:



Először $\tilde{g}(p)$ érdekel. Ez

$\tilde{g}(p)dp$: p, $p+dp$

megadja, h a 2 közt hány db egyrészecske áll van ($\emptyset$ érdekel az imp nagysága és a hely sem).

p sugarú gömb (3Ds) V-a

fázis V

$$\frac{V \frac{4\pi}{3} p^3}{h^3}$$

megadja, hány fáziscella van, amiknek impa $< p$, és bhol van helyben.

$[0,p]$ intv-ban mennyi van.

Ekkor:

$$\tilde{g}(p)dp = V \frac{4\pi}{\cancel{3} h^3}\, d(p^3) =$$

$$\cancel{3} p^2 dp$$

Mi nem az impulzustérbeli $\tilde{\rho}$-t, hanem ES-t hajtunk. Kell $\varepsilon \Longleftrightarrow p$ közötti ösf.: (diszperziós reláció)

2 eset:

$\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$ (szokásos, nemrelativisztikus összefüggés)

ultrarels eset: rdsz: ami csak fénysebességgel mozgó részecskékből áll. (fotonok)

$\varepsilon = cp$

~~ultrarels~~ nemrels

$d\varepsilon = c\,dp$

$\tilde{\rho}(p)dp = \frac{V 4\pi}{h^3}\frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{c^3}$

$d\varepsilon = \frac{p}{m}dp$,

$\tilde{\rho}(p)dp) = \frac{V 4\pi}{h^3} \overbrace{m\,d\varepsilon}^{p\,dp} \overbrace{\sqrt{2m\varepsilon}}^{p} =$

$= \boxed{\frac{V 2\pi}{h^3}(2m)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon} = \rho(\varepsilon)$

Összefoglalva:

$$\boxed{\rho(\varepsilon) = \begin{cases} g V \frac{2\pi}{h^3}(2m)^{3/2}\sqrt{E} & \text{ha } \varepsilon = \frac{p^2}{2m} \\ g V \frac{4\pi}{h^3 c^3}\varepsilon^2 & \varepsilon = cp \text{ . fotonok esete} \end{cases}}$$

(g = 2)

Mire használók ezek a fgvk? Átírók $\int$ra:

$$\bar{N} = \sum_s \bar{N}_s = \int_0^\infty d\varepsilon\, g(\varepsilon) \frac{1}{e^{\frac{1}{kT}(\varepsilon-\mu)} \pm 1}$$

$$U = E = \int_0^\infty d\varepsilon\, g(\varepsilon) \cdot \varepsilon \frac{1}{e^{\frac{1}{kT}(\varepsilon-\mu)} \pm 1}$$

$$\frac{pV}{kT} = \pm \int_0^\infty d\varepsilon\, g(\varepsilon) \ln\left[1 \pm e^{-\frac{1}{kT}(\varepsilon-\mu)}\right]$$

$g(\varepsilon)$ - ban nem adtuk meg a spint. Spin miatt van 1 elfajultsága minden egyes 1részecske-állapot.

$2s+1 = g$

Foton g-je.: relo okok miatt 3. spinbeállás $\emptyset$ tud megvalósulni.
$g_f = 2$

---

p és U közti ö.f.

$$\left(\text{MB: } \left.\begin{matrix} pV = NkT \\ U = \frac{3}{2} NkT \end{matrix}\right\} \rightarrow pV = \frac{2}{3} U\right)$$

$$\frac{pV}{kT} = \text{volt.} = \pm \int \dots$$

Feltételezzük: ha $g(\varepsilon) \sim \varepsilon^l$: akkor $g(\varepsilon) = \underbrace{\frac{[\varepsilon \cdot g(\varepsilon)]'}{l+1}}_{\text{ez azért jó: tud parcsan } \int \text{ni}}$

$$\frac{pV}{kT} = \pm \frac{1}{l+1} \int_0^\infty d\varepsilon\, (\varepsilon \cdot g(\varepsilon))' \ln\left[1 \pm e^{-\frac{1}{kT}(\varepsilon-\mu)}\right] =$$

$$\frac{pV}{kT} = 0\,\cancel{(\pm)}\,\frac{1}{l+1}\,\cancel{(-)}\int_0 d\varepsilon\cdot\varepsilon\, g(\varepsilon)\,\frac{\cancel{(\pm)}\,e^{-\frac{1}{kT}(\varepsilon-\mu)}\left(-\frac{1}{kT}\right)}{1\pm e^{-\frac{1}{kT}(\varepsilon-\mu)}}$$

$$\Longrightarrow \quad pV = \frac{1}{l+1}\cdot U \quad \longrightarrow \quad pV = \frac{2}{3}U \ ✓$$

független a statisztikától és fgtlen a T-től!

$$\downarrow \quad pV = \frac{1}{3}U$$

Alacsony hőmű (degenerált) Fermi-gáz esete

e^--gázszerűség van a fémekben. Ezek között van kh? e^--k között ∞ Gótávú Coulomb! De a ⊕ atomtörzsek hátteret képeznek, ez a háttér ~~[illegible]~~ 0. rendben leárnyékolja az e^--k közti taszítást. Vezető rendben az e^--gázt lehet szabad e^--gázként kezelni.

Miért alacsony a hőm? ....

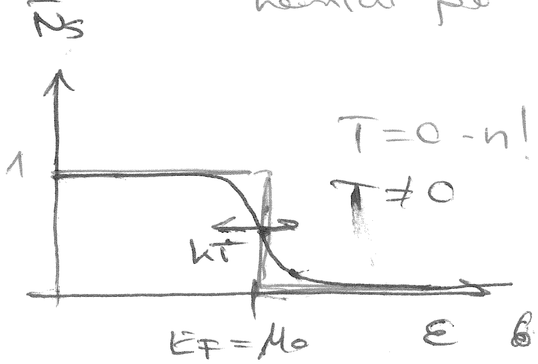
$T \Rightarrow 0$. Hl néz ki Fermi-D?

$$\bar{N}_s = \frac{1}{e^{\frac{1}{kT}(\varepsilon_s-\mu)}+1} \qquad \mu(T=0) = \mu_0 = E_F$$

a hőmér a kémiai po

Hl néz ez ki?

- $\varepsilon_s > \mu_0 = E_F$: $\bar{N}_s \longrightarrow 0$
- $\varepsilon_s < E_F \Longrightarrow$: $\bar{N}_s = 1$



Fermi E függ mitől?

μ-állt $= \mu(T, \frac{\overline{N}}{V})$

$E_F = \mu_0 = \mu(0, \frac{\overline{N}}{V})$

csak az e^--k g től függ, mint makroszko-pikus mntől.

$$\overline{N} = \int_0^{E_F} d\varepsilon\, g(\varepsilon) \ldots \underbrace{F\text{-}D}_{\text{ha lépcső + írjuk ide } = 1} \ldots = \underbrace{2}_{\text{degs faktor}} \frac{2\pi}{h^3}\underbrace{(2m)^{3/2}}_{e^-\text{-tang}} \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon} =$$

$$= \frac{2}{3} E_F\, g(E_F)$$

$$= \frac{8\pi}{3} V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} E_F^{3/2}$$

$$\hookrightarrow \boxed{E_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3}{8\pi}\frac{\overline{N}}{V}\right)^{2/3}}$$

volt:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mu(T=0) = E_F = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \\ &\bar{N} = \frac{2}{3} E_F\, g(E_F) \quad : \quad g(\varepsilon) = c\sqrt{\varepsilon} \end{aligned}}$$

$\sqrt{20}$ perc h.

$$\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \gg \lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k T}}$$

ez a feltétele volt MB-nal

$$\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \ll \lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k T}}$$

degenerált Fermi-gáz.

ez a baro ~~[illegible]~~ közti reláció ekvivalens a T-k közöttiekkel:

$$kT \ll \frac{h^2}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \sim E_F = kT_F$$

$$\boxed{T \ll T_F}$$

Abszolút deg.-t (0 K hőmű) Fermi rdsz

- Mi ekkor a tdi belső E? (ugye az alapállapoti E kell)

$$U = \overline{E} = \sum_s \varepsilon_s \overline{N}_s = \int_0^{E_F} d\varepsilon\, \underbrace{g(\varepsilon)}_{c\sqrt{\varepsilon}} \cdot \varepsilon \cdot 1 = \frac{2}{5} E_F^{5/2} \cdot c = \frac{2}{5} E_F^2\, g(E_F)$$

alapállati E.

Fermi-D-fgv.
Ez T=0 ban lépcsőfgv.

$$= \frac{3}{5} E_F \overline{N} \implies \frac{U}{V} \sim \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}$$

(e^--s függ az alapállapoti E)

- Van ennek az $\bar{e}$-gáznak nyomása?

Van!

Volt a statisztika-független összefüggésünk:

$$pV = \frac{2}{3} U$$

ha nemrels!

$$\Downarrow$$

$$p \sim \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}$$

(Ugyanezen a hőmen egy Ø hőmű Bose gáz másképp viselkedne: Ø E-jű állapotba bepakolhatná az összes részecskét. 0 E-jű áll. impulzusa is Ø. $\boxed{N}$ ($\varepsilon = 0$) ⟹ Bose-kondenzáció.

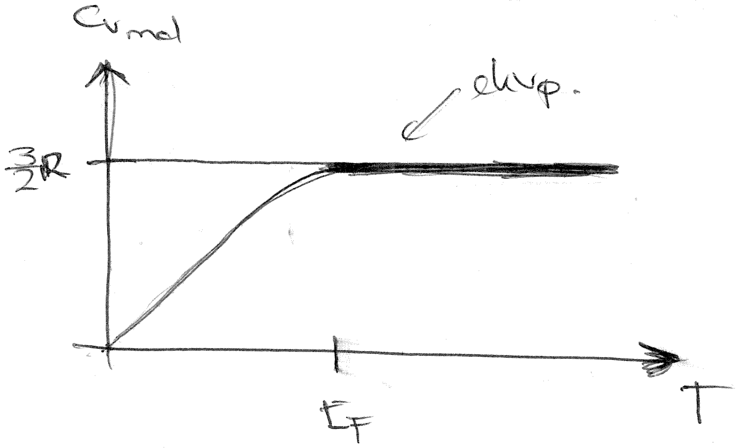
Ha a hőm nem teljesen nulla, de közel van a kondenzációs hőm-hez...

(h az a nyomás Ø K-en nem Ø, a Pauli-elv következménye!

[I]

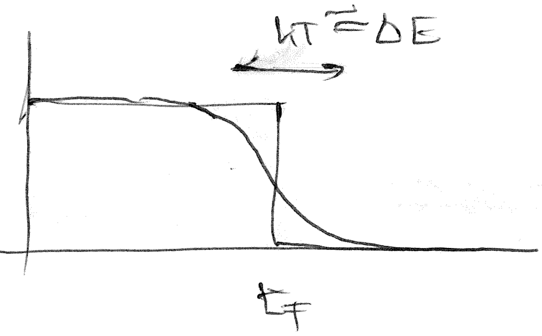
• Mi a hőkapacitása? (alacsony hőm. limeszben?)

$U(T) - U(0) = \Delta U$



$\downarrow$

Ha a hőm 0-tól megváltozik, F-D-~~statisztikai~~ fgv. begörbül! Csak a Fermi-E közelében lévő e^--k gerjesztődnek.



$\underbrace{g(E_F) \cdot \Delta E}$ tudja a E_F-körüli o. állk. számát

$\Delta U \approx$ gerjesztett e^--k száma $\cdot \Delta E$ =
gerji E.

$\simeq g(E_F) \cdot (kT)^2$

$\Delta U \cong \frac{\bar{N}}{\varepsilon_F} (kT)^2$

$\Downarrow$

R, ha 1 mol van.

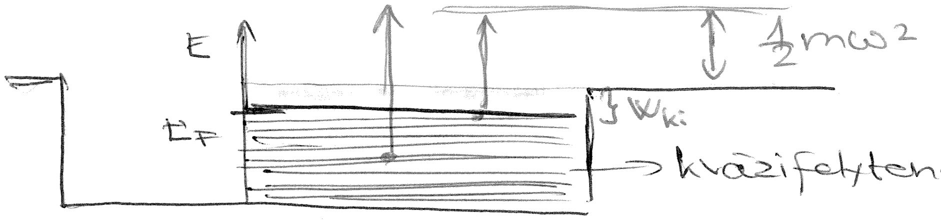
$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v \sim \bar{N}k \cdot \frac{kT}{E_F} \longrightarrow$ lin. $\frac{kT}{E_F} = \frac{T}{T_F}$

Ez csak becslés, de a Bethe-Sommerfelddel ki lehetett volna ~~számitani~~:

$C_v = \frac{\pi^2}{2} k \bar{N} \frac{T}{T_F} + O\left(\left(\frac{T}{T_F}\right)^2\right)$

[III].

e^- kilépési E-ja:



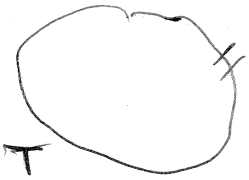
Einstein-egyenlet: $hf = W_{ki} + \frac{1}{2}mv^2$

ez akkor igaz, ha a legfelsőt lőjük ki

4

Fotongáz

Feketetest sugárzás: fotongáz tdinamikája | egymáshoz koccannak a molekulák



spindegeneráció

Tudjuk: $\varepsilon = cp \longrightarrow \begin{cases} g(\varepsilon) = 2V\frac{4\pi}{h^3c^3}\varepsilon^2 \\ pV = \frac{1}{3}U \end{cases}$

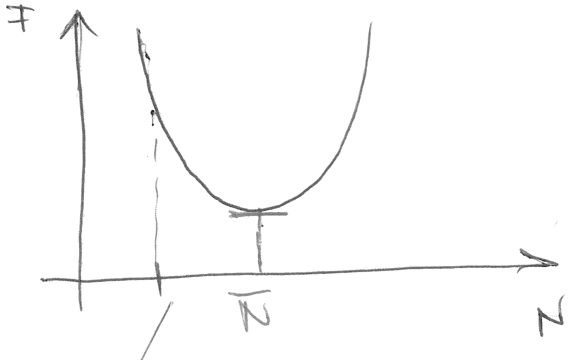
Fotonnak a kémiai potja: $\mu = 0$ minden hőmen!

$\left(\overline{N}_s = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} \right)$ Ennek oka, h fotonok számát $\emptyset$ lehet beállítani kézzel.

F(N, V, T)

kezdetben adott

végig állandók!



kezdeti $\Longleftrightarrow$ nem

fal + a szabadE minimumának!

L //

Spontán, magától beállítja a rdsz az lnsúlyi fotonszámot.
Az lnsúlyi fotonszámot a szabadE min. - a adja t.

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T} \qquad N = \bar{N} \longrightarrow \mu = 0$$

Planck - trv

$\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$ Ek között mennyi átlagos E(?) van?

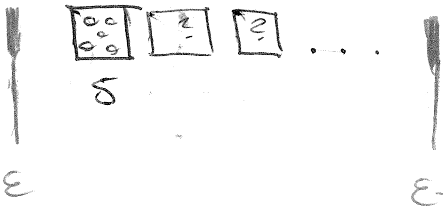
$\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$:

$$\bar{N}_s \varepsilon \cdot g(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} \varepsilon V \cdot \frac{8\pi}{(hc)^3} \varepsilon^2 d\varepsilon$$

1 doboz Eja

egyetlen foton Eja

$$\sim V \frac{\varepsilon^3}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} d\varepsilon$$



$g(\varepsilon) d\varepsilon$: azon dobozok számát adja ti, melyeknek az Eja ε és $\varepsilon + d\varepsilon$ intervalban van.

az tk a Planck-trv.
$(\varepsilon = hf)$

[redacted]

$$U = V \frac{8\pi}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{d\varepsilon\, \varepsilon^3}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} \overset{\frac{\varepsilon}{kT} = x}{=} (kT)^4 V \frac{8\pi}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{dx\, x^3}{e^x - 1}$$

$$\frac{\pi^4}{14}$$

$U \sim V \cdot T^4$

$M = \sigma \cdot T^4$ Stefan - Boltzmann trv.

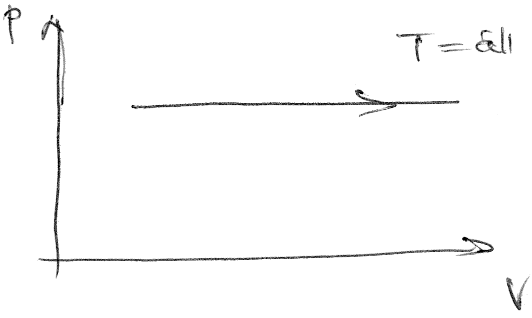
c.IV.

Fotongáz adiabátája

$pV = \frac{1}{3}U \longrightarrow p \sim T^4$

(normális állapotban függhetne még ϱ-tól, de itt most ϱ ∅ beállítódó)

Izotermák és izobárok egybeesnek.



N nem szabad paraméter

$F(T,V) = V \cdot f(T)$

nem lehet más.

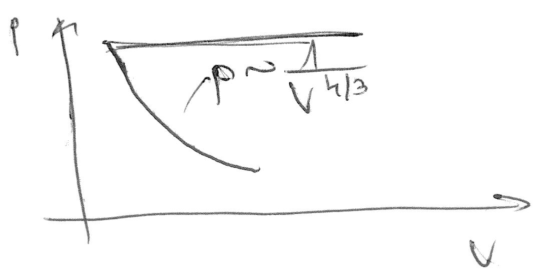
és tudjuk: $\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p \Longrightarrow \boxed{F = -pV} \sim VT^4$

Adiabata menete: (~~adiabata deltás~~ nincs hőcsere $\Rightarrow$ $TdS = 0 \rightarrow dS = 0 \Rightarrow \underline{S = \text{áll}}$)

$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \sim VT^3 \Longrightarrow S = \text{áll}$: akkor $\underbrace{VT^3}$ = áll

$Vp^{3/4} = \text{áll.}$

$\boxed{pV^{4/3} = \text{áll}}$ adiabata menete a p-V diagramon



(klasszikus id. gáznál hasonló: $p \sim \frac{1}{V^{\kappa}}$, $\kappa_p = \frac{c_p}{c_v}$. Attól függően, h a gáz 1-, 2-, ... atomos, κ_p változik.)

De itt $\frac{4}{3} \neq \frac{c_p}{c_v}$ $\quad c_v = \frac{\partial F}{\partial T}$ $\quad c_p = \infty$