1. ZH – megoldásokkal

1. feladat:

Adott egy N db független és megkülönböztethető atomból álló rendszer. A rendszernek 3 energiaszintje van, melyek a hozzájuk tartozó multiplicitással a jobboldali ábrán láthatóak. Számítsd ki a rendszer belső energiáját! *[5 pont]*

$\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1; \quad g_2 = 3$

$\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0; \quad g_1 = 2$

$\varepsilon_0 \quad g_0 = 1$

Megoldás:

Mivel a részecskék függetlenek, ezért az állapotösszeg felírható az egyrészecske-állapotösszegek szorzataként:

$$\mathcal{Z} = \zeta^N$$

Az egyrészecske-állapotösszeg a következőképp írható fel:

$$\zeta = \sum_{\{k,\ell\}} e^{-\beta\varepsilon_k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{g_k} e^{-\beta\varepsilon_k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_k}\sum_{\ell=1}^{g_k} 1 = \sum_{k=0}^{\infty} g_k e^{-\beta\varepsilon_k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{k=2} g_k e^{-\beta\varepsilon_k} = e^{-\beta\varepsilon_0} + 2e^{-2\beta\varepsilon_0} + 3e^{-4\beta\varepsilon_0}$$

Ezzel a belső energia:

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\mathcal{Z} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\zeta^N = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\zeta \underbrace{=}_{\text{beírjuk } \zeta-\text{t}}$$

$$= -N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\left(e^{-\beta\varepsilon_0} + 2e^{-2\beta\varepsilon_0} + 3e^{-4\beta\varepsilon_0}\right) =$$

$$= -N\underbrace{\left(\frac{1}{e^{-\beta\varepsilon_0} + 2e^{-2\beta\varepsilon_0} + 3e^{-4\beta\varepsilon_0}}\right)}_{\partial(\text{külső fv.})}\underbrace{\left(-\varepsilon_0 e^{-\beta\varepsilon_0} - 4\varepsilon_0 e^{-2\beta\varepsilon_0} - 12\varepsilon_0 e^{-4\beta\varepsilon_0}\right)}_{\partial(\text{belső fv.})} =$$

$$= N\varepsilon_0\frac{e^{-\beta\varepsilon_0} + 4e^{-2\beta\varepsilon_0} + 12e^{-4\beta\varepsilon_0}}{e^{-\beta\varepsilon_0} + 2e^{-2\beta\varepsilon_0} + 3e^{-4\beta\varepsilon_0}}$$

2. feladat:

A fotongáz szabadenergiája a következőképp írható fel:

$$F(T,V) = -\frac{1}{3}V \underbrace{\frac{8\pi^5}{15}\frac{k_B^4}{h^3c^3}}_{\text{konstans} \equiv \gamma} T^4 = -\frac{1}{3}\gamma V T^4$$

a) Számítsd ki az entrópia hőmérséklet függését! ($S(T,V) - ?$) *[2 pont]*

b) Az előző pontban kapott eredmény segítségével fejezd ki a szabadenergiából a belső energiát az entrópia és a térfogat függvényeként! (Segítség: Legendre-transzformációt kell végrehajtani: $F(T,V) \overset{\mathcal{L}}{\rightarrow} U(S,V)$.) *[5 pont]*

Megoldás:

a)

$$S(T,V) = -\frac{\partial F(T,V)}{\partial T} = -\frac{\partial}{\partial T}\left[-\frac{1}{3}\gamma V T^4\right] = \frac{1}{3}\gamma V \frac{\partial}{\partial T}[T^4] = \frac{4}{3}\gamma V T^3$$

Tehát:

$$S \sim T^3$$

b) A Legendre-transzformáció általánosan a következőképp írható fel:

$$f(x) \overset{\mathcal{L}}{\rightarrow} g(z); \qquad g(z) \Rightarrow \begin{cases} g(z) = f(x) - xz \\ z = f'(x) = \frac{df}{dz} \end{cases}$$

A hőmérséklet szerinti deriválást az a) pontban már elvégeztük, és azt kaptuk, hogy:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}\left(= \frac{4}{3}\gamma V T^3\right)$$

Így a Legendre-transzformáció az $F(T,V) \overset{\mathcal{L}}{\rightarrow} U(S,V)$ esetben a következőképp írható fel:

$$F(T,V) \overset{\mathcal{L}}{\rightarrow} U(S,V); \qquad U(S,V) \Rightarrow \begin{cases} U(S,V) = F(T,V) + ST \\ S = -\frac{\partial F(T,V)}{\partial T} \end{cases}$$

Elvégezve az átrendezést és a behelyettesítést:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{4}{3}\gamma V T^3 \quad \Rightarrow \quad T = \left(\frac{3}{4}\frac{1}{\gamma V}S\right)^{\frac{1}{3}}$$

T-t egyből átírva:

$$U(S,V) = F(T,V) + ST = -\frac{1}{3}\gamma V T^4 + ST = -\frac{1}{3}\gamma V\left(\frac{3}{4}\frac{1}{\gamma V}S\right)^{\frac{4}{3}} + S\left(\frac{3}{4}\frac{1}{\gamma V}S\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= S^{\frac{4}{3}}\left[\left(\frac{3}{4}\frac{1}{\gamma V}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\gamma V\left(\frac{3}{4}\frac{1}{\gamma V}\right)^{\frac{4}{3}}\right] = S^{\frac{4}{3}}\left[\left(\frac{3}{4}\frac{1}{\gamma V}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\gamma V \frac{3}{4}\frac{1}{\gamma V}\right)\right]$$

$$= S^{\frac{4}{3}}\left[\left(\frac{3}{4}\frac{1}{\gamma V}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{3}{4}S^{\frac{4}{3}}\left(\frac{3}{4}\frac{1}{\gamma V}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Először S-t behelyettesítve, majd T-t:

$$U(S,V) = F(T,V) + ST = -\frac{1}{3}\gamma V T^4 + ST = -\frac{1}{3}\gamma V T^4 + \frac{4}{3}\gamma V T^3 T =$$

$$= T^4\left(\frac{4}{3}\gamma V - \frac{1}{3}\gamma V\right) = \gamma V T^4 = \gamma V\left(\frac{3}{4}\frac{1}{\gamma V}S\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}S^{\frac{4}{3}}\left(\frac{3}{4}\frac{1}{\gamma V}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Tehát: $$U(S,V) \sim S^{\frac{4}{3}}.$$