Statisztikus fizika 10. házi feladat

Kómár Péter (KOPNAAT.ELTE)

2008. 05. 06.

1. Feladat

Ritka gázokra a Viriál-sorfejtés az első korrekcióig:

$$pV = \frac{N}{V} + B_2\left(T\right)\left(\frac{N}{V}\right)^2$$

ahol

$$B_2\left(T\right) = -2\pi\int_0^\infty dr\, r^2\left(e^{-\beta U(r)} - 1\right)$$

A megadott $U\left(r\right)$ -rel az integrál szakaszonként elvégezhető:

$$B_2\left(T\right) = -2\pi\left[\left(\int_0^a \oplus \int_a^b \oplus \int_b^\infty\right) dr\, r^2\left(e^{-\beta U(r)} - 1\right)\right] =$$
$$= -2\pi\left[\frac{a^3}{3}\cdot\left(e^{-\beta\cdot\infty} - 1\right) + \left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right)\left(e^{\beta u_0} - 1\right) + 0\right] = -\frac{2\pi}{3}\left[b^3\left(e^{\beta u_0} - 1\right) - a^3\cdot e^{\beta u_0}\right]$$

Így az állapotegyenlet:

$$pV = \frac{N}{V} - \frac{2\pi}{3}\left[b^3\left(e^{\beta u_0} - 1\right) - a^3\cdot e^{\beta u_0}\right]\cdot\left(\frac{N}{V}\right)^2$$

2. Feladat

Először meghatározzuk az m rendparaméter spontán beállását: Egyensúly esetén a szabad energia m szerinti deriváltja zérus:

$$\frac{\partial F}{\partial m} = a_0\left(T - T_c\right)m + bm^3 \overset{!}{=} 0 \quad\Rightarrow\quad m_1 = 0\,,\ m_2 = \sqrt{\frac{a_0}{b}\left(T_c - T\right)}$$

Így kicsivel a kritikus hőmérséklet alatt a szabad energia:

$$F = F_0\left(T\right) + \frac{a_0}{2}\left(T - T_c\right)\cdot\frac{a_0}{b}\left(T_c - T\right) + \frac{b}{4}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(T_c - T\right)^2$$

A kritikus hőmérséklet két oldalán pedig:

$$F = \begin{cases} F_0\left(T\right) - \frac{a_0^2}{4b}\left(T - T_c\right)^2 & ,\ ha\ T < T_c \\ F_0\left(T\right) & ,\ ha\ T \geq T_c \end{cases}$$

A fajhőt a szabad energiából általánosan az alábbi módon kaphatjuk meg:

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}(F + ST) = \frac{\partial}{\partial T}\left(F - \frac{\partial F}{\partial T} \cdot T\right) = -T \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$$

Így a fajhő a kritikus pont körül:

$$C = \begin{cases} -T \cdot F_0''(T) + T \cdot \frac{a_0^2}{2b} & , \; ha \; T < T_c \\ -T \cdot F_0''(T) & , \; ha \; T > T_c \end{cases}$$

3. Feladat

Egy cellára az energia:

$$E = J \cdot (S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_4 + S_4 S_1) + 2J \cdot m \cdot (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$$

Ebből az állapotösszeg:

$$Z = \sum_{S_1} \sum_{S_2} \sum_{S_3} \sum_{S_4} e^{-\beta E} = ... = e^{4J} \cdot ch(8mJ) + 4e^{-J} \cdot ch(4mJ) + 2 + e^{-4J}$$

A konzisztenciafeltétel szerint:

$$m \stackrel{!}{=} \overline{S} = \frac{1}{Z} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \sum_{S_3} \sum_{S_4} S_1 \cdot e^{-\beta E} = \frac{e^{4J} \cdot sh(8mJ) + 2sh(4mJ)}{e^{4J} \cdot ch(8mJ) + 4e^{-J} \cdot ch(4mJ) + 2 + e^{-4J}}$$

A kritikus hőmérsékleten a konzisztencia egyenlet jobb oldalának m szerinti deriváltja 1:

$$8 \cdot J_c \cdot \frac{e^{4J_c} + 1}{e^{4J_c} + 6 + e^{-4J_c}} \stackrel{!}{=} 1$$

Innen a kritikus érték $J_c \approx 0.29$, az egzakt eredmény 0.411, míg a molekuláris elméletből kapott 0.25, így azt mondhatjuk, hogy ez a modell kicsivel jobb, mint a molekuláris elmélet, de még messze van a valóságtól.

4-5. Feladat

(i)

A magnonok állapotsűrűsége:

$$\rho(\varepsilon) = \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi k^2 \cdot \frac{dk}{d\varepsilon} = \frac{V}{4\pi^2} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{D^{3/2}}$$

Így az energiájuk:

$$E = \int_0^\infty d\varepsilon \, \frac{V}{4\pi^2} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{D^{3/2}} \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{e^{\varepsilon\beta} - 1} = (kT)^{5/2} \cdot \frac{V}{4\pi^2 D^{3/2}} \cdot \int_0^\infty dx \, \frac{x^{3/2}}{e^x - 1} = (kT)^{5/2} \cdot \frac{V}{4\pi^2 D^{3/2}} \cdot \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \zeta\left(\frac{5}{2}\right)$$

Innen a fajhő:

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \frac{5}{8\pi^2} \cdot T^{3/2} \cdot k^{5/2} \cdot \frac{V}{D^{3/2}}$$

(ii)

1 dimenzióban az állapotsűrűség:

$$\rho^{(1)}(\varepsilon) = \frac{L}{2\pi} \cdot \frac{dk}{d\varepsilon} \cdot 2 \propto \varepsilon^{-1/2}$$

Így ha $\beta \neq \infty$akkor a részecskeszám:

$$N^{(1)} \propto \int_0^\infty dx\, \frac{x^{-1/2}}{e^x - 1} = \infty$$

2 dimenzióban az állapotsűrűség:

$$\rho^{(2)}(\varepsilon) = \frac{A}{(2\pi)^2} \cdot \frac{dk}{d\varepsilon} \cdot 2\pi k \propto const.\ \left(\varepsilon^0\right)$$

$\beta \neq \infty$ esetben a részecskeszám:

$$N^{(2)} \propto \int_0^\infty dx\, \frac{1}{e^x - 1} = \infty$$

Ez azt jelenti, hogy a 3 az a legkisebb dimenziószám ahol van értelme a feltételezett alapállapot körül sorfejteni. Alacsonyabb dimenziókban az általunk feltételezett homogén alapállapot nem stabil, ezért az a körüli sorfejtés nem ad valóságos eredményt.

(iii)

Mágneses tér mellett megváltozik az állapotsűrűség:

$$\rho(\varepsilon) = \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi \cdot \frac{\varepsilon - \Delta}{D} \cdot \frac{dk}{d\varepsilon} = \frac{V}{(2\pi)^2} \cdot D^{-3/2} \cdot (\varepsilon - \Delta)^{1/2}$$

Energiájuk:

$$E = \frac{V}{(2\pi)^2} \cdot D^{-3/2} \cdot \int_0^\infty d\varepsilon\, \varepsilon \cdot (\varepsilon - \Delta)^{1/2} \cdot \frac{1}{e^{\varepsilon\beta} - 1}$$

bevezetjük az $x = \beta(\varepsilon - \Delta)$ jelöléseket:

$$E = \frac{V}{(2\pi)^2} \cdot D^{-3/2} \cdot (kT)^{5/2} \cdot \int_0^\infty dx\ (x + \beta\Delta) \cdot x^{1/2} \cdot \frac{1}{e^{\beta\Delta} \cdot e^x - 1}$$

az integrál így már két tagra bomlik, amik külön-külön elvégezhetők:

$$E = \frac{V}{(2\pi)^2} \cdot D^{-3/2} \cdot (kT)^{5/2} \cdot \left[\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \cdot g_{5/2}\left(e^{-\beta\Delta}\right) + \beta\Delta \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot g_{3/2}\left(e^{-\beta\Delta}\right)\right]$$

A fajhő így:

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{5}{2} \cdot T^{3/2} \cdot \frac{V}{(2\pi)^2} \cdot D^{-3/2} \cdot k^{5/2} \cdot \left[\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \cdot g_{5/2}\left(e^{-\beta\Delta}\right) + \beta\Delta \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot g_{3/2}\left(e^{-\beta\Delta}\right)\right]$$

Extra 1

A Fermi-sebesség:

$$v_F = \sqrt{\frac{2\varepsilon_F}{m}} = \frac{\hbar}{m}\left(3\pi^2 n\right)^{1/3} \overset{!}{\approx} \frac{c}{10}$$

innen a sűrűség:

$$n \approx \left(\frac{mc}{10\hbar}\right)^3 \cdot \frac{1}{3\pi^2} = 7 \cdot 10^{32}\,\frac{1}{m^3}$$

Ultrarelativisztikus esetben az energia kifejezéséhez vezessük le az állapotösszeget:

$$Z^{(1)} = \frac{V}{h^3} \cdot \int\limits_0^\infty dp_x \int\limits_0^\infty dp_y \int\limits_0^\infty dp_z\, e^{-\beta\cdot cp} = \frac{V}{h^3} \cdot \int\limits_0^\infty dp\, 4\pi p^2 \cdot e^{-\beta\cdot cp} =$$

$$= \frac{V}{h^3} \cdot 4\pi \frac{1}{(\beta c)^3} \cdot \int\limits_0^\infty dx\, x^2 \cdot e^{-x} = 8\pi V \cdot \frac{1}{(\beta c)^3}$$

$$Z = \frac{1}{N!} \cdot \left(Z^{(1)}\right)^N = (8\pi)^N \cdot \frac{V^N}{N!} \cdot \frac{1}{(\beta c)^3}$$

Innen az energia és a nyomás:

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = 3NkT$$

$$p = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial V}\ln Z = \frac{NkT}{V}$$

Leolvasható, hogy $pV = \frac{1}{3}E$.

Extra 2

A Fermi-impulzusra:

$$2 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot p_F^3 = N \cdot \frac{(2\pi)^3\,\hbar^3}{V}$$

Ultrarelativisztikus esetben az átlagos kinetikus energia ebből:

$$\langle\varepsilon_{kin}\rangle = \frac{\int_0^{p_F} 4\pi p^2 \cdot cp\, dp}{\int_0^{p_F} 4\pi p^2\, dp} = \frac{3}{4} c p_F$$

Így a teljes kinetikus energia:

$$E_{kin} = N \cdot cp_F = N \cdot \frac{3\pi}{2} \cdot \hbar c \cdot \left(\frac{N}{V} \cdot \frac{3}{8\pi}\right)^{1/3} = \left(\frac{243}{256}\pi\right)^{1/3} \cdot c\hbar \cdot \left(\frac{M}{m}\right)^{4/3} \cdot \frac{1}{R} \propto \frac{M^{4/3}}{R}$$

Mivel ez is R (-1)-edik hatványával arányos (ahogyan a gravitációs energia is), így csak a tömegtől függ az, hogy össze tud-e omlani. Ehhez ismerni kell még a gravitációs energia pontos képletét:

$$E_{grav} = -\frac{3}{5} \cdot G \cdot \frac{M^2}{R}$$

Akkor nem tud összeomlani, ha:

$$\frac{3}{5} \cdot G \cdot M^2 < \left(\frac{243}{256}\pi\right)^{1/3} \cdot c\hbar \cdot \left(\frac{M}{m}\right)^{4/3}$$

Innen az M-re vonatkozó feltétel:

$$M < \left[\left(\frac{243}{256}\pi\right)^{1/3} \cdot c\hbar \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^{4/3} \cdot \frac{5}{3G}\right]^{3/2} = M_c$$