Statisztikus fizika 9. házi feladat

Kómár Péter (KOPNAAT.ELTE)

2008. 04. 22.

2. Feladat

A Stefan-Boltzmann-törvény alapján az energiaáram sűrűség:

$$j_E = \frac{P}{4\pi R^2} = \frac{4\pi r^2 \sigma T^4}{4\pi R^2} = \frac{r^2}{R^2}\sigma T^4 = \frac{0.1^2}{1000^2} \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot \left(10^6\right)^4 = 5.67 \cdot 10^8 \, \frac{W}{m^2}$$

,ahol r a robbanás centrumának tekintett gömb sugara, R a megfigyelési távolság, T pedig a robbanás hőmérséklete.

A Wien-féle eltolódási törvény alapján a legnagyobb intenzitású hullámhossz:

$$\lambda = \frac{2\pi c\hbar}{2.82 \cdot k_B T} = 5.1 \, nm$$

Ez röntgensugárzást jelent.

A robbanás $t = 1\, s$-ig tart, a bőr rossz hővezető, így feltételezhetjük, hogy az ilyen rövid idejű sugárzás valóban csak a bőrt melegíti fel, ami 3 mm vastagnak tekinthetünk, fajhőjét és sűrűségét pedig a vízével azonosnak vesszük, így a kezdetben 20°C-os bőr 1 másodperc alatt:

$$\Delta T = \frac{j_E \cdot t}{c \cdot \rho \cdot d} \approx \frac{5.67 \cdot 10^8 \cdot 1}{4200 \cdot 1000 \cdot 0.003} = 45000 \, C$$

Ez borzasztó nagy érték, ezért valószínűleg reálisabb eredményt kapunk, ha megbecsüljük, hogy ennyi energia milyen vastag vízréteget képes elforralni:

$$d = \frac{j_E \cdot t}{\rho \cdot (100 \cdot c + L_f)} = \frac{5.67 \cdot 10^8 \cdot 1}{1000 \cdot (100 \cdot 4200 + 2.256 \cdot 10^6)} = 0.21 \, m$$

Tehát 20 cm-es vízréteget is kétes elforralni ez az energiamennyiség, ez azt jelenti, hogy a hatás nem korlátozódik a bőrre, hiszen az nagyon gyorsan elpárolog.

4. Feladat

Az előadáson Bose-Einstein-kondenzátumra beláttuk az alábbi két összefüggést:

$$\frac{p}{k_B T} = \lambda^{-3} \cdot \zeta\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$N - N_0 = \lambda^{-3} \cdot V \cdot \zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$

Ezekből osztással megkapható az állapotegyenlet:

$$pV = \frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \cdot (N - N_0) \cdot k_B T = \frac{1.341}{2.612} \cdot (N - N_0) \cdot k_B T = 0.513 \cdot (N - N_0) \cdot k_B T$$

5. Feladat

1 dimenzióban adott p impulzusú "héjon" az állapotok száma:

$$\rho(p)\,dp = \frac{2dp \cdot L}{h} = \frac{L \cdot \sqrt{2m}}{h} \cdot \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} = \rho(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

Így a teljes részecskeszám:

$$N = \frac{L \cdot \sqrt{2m}}{h} \cdot \int_0^\infty \frac{d\varepsilon\,\varepsilon^{-1/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} = \frac{L \cdot \sqrt{2m}}{h} \cdot \sqrt{k_B T} \cdot \int_0^\infty \frac{dx\,x^{-1/2}}{e^{-\beta\mu} e^x - 1}$$

vizsgáljuk a kondenzáció állapotát, amikor $\mu = 0$, ekkor az integrál:

$$\int_0^\infty \frac{dx\,x^{-1/2}}{e^x - 1} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot g_{1/2}(1) = \sqrt{\pi} \cdot \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^{1/2}} = \infty$$

Ebből pedig az következik, hogy a részecskeszám csak úgy lehet nem nulla a kondenzáció állapotában, ha a hőmérséklet 0, ui:

$$N = const \cdot \sqrt{T} \cdot \infty$$

Tehát nem alakul ki véges hőmérsékleten Bose-Einstein-kondenzáció.