Statisztikus fizika 8. házi feladat

Kómár Péter (KOPNAAT.ELTE)

2008. 04. 14.

1. Feladat

(i)

3 független, megkülönböztethető, Maxwell-Boltzmann statisztikát követő részecskéből álló rendszer kanonikus állapotösszege kifejezhető az egyrészecske állapotösszeggel:

$$Z = (Z_1)^3 = \left(1 + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-3\beta\varepsilon}\right)^3$$

(ii)

Megkülönböztethetetlen fermionok esetén nem lehet az egyrészecske állapotösszegből kiindulni, ezért a rendszer állapotösszegét az állapotösszeg definíciója alapján határozhatjuk meg. A 3 fermion a 3 szinten pontosan egyféleképpen helyezkedhet el, ha nem számít a sorrendjük, ennek az állapotnak az energiája: $0 + \beta\varepsilon + 3\beta\varepsilon = 4\beta\varepsilon$ így a rendszer kanonikus állapotösszege:

$$Z = e^{-4\beta\varepsilon}$$

(iii)

A megkülönböztethetetlen bozonok esetében is az összes állapot összeszámolásának módszerét kell követnünk, az összes állapot, energiával (E) és kitöltési számokkal(n_0, n_ε, $n_{3\varepsilon}$) :

E/ε	$(n_0, n_\varepsilon, n_{3\varepsilon})$	mulitplicitás
0	(3, 0, 0)	1
1	(2, 1, 0)	1
2	(1, 2, 0)	1
3	(2, 0, 1) , (0, 3, 0)	2
4	(1, 1, 1)	1
5	(0, 2, 1)	1
6	(1, 0, 2)	1
7	(0, 1, 2)	1
9	(0, 0, 3)	1

A táblázatból direkt módon leolvasható a kanonikus állapotösszeg:

$$Z = 1 + e^{-\beta\varepsilon} + e^{-2\beta\varepsilon} + 2e^{-3\beta\varepsilon} + e^{-4\beta\varepsilon} + e^{-5\beta\varepsilon} + e^{-6\beta\varepsilon} + e^{-7\beta\varepsilon} + e^{-9\beta\varepsilon}$$

2. Feladat

A Fermi-energia definíciója:

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

(a) $M = 23 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{mol}$, $\rho = 950 \frac{kg}{m^3}$, 1 vezetési elektron/atom $\Rightarrow \frac{N}{V} = \rho \cdot \frac{N_A}{M} = 2.49 \cdot 10^{28} \cdot m^{-3}$ így :

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(3\pi^2 \rho \cdot \frac{N_A}{M}\right)^{2/3} = 4.98 \cdot 10^{-19}\, J = 3.11\, eV$$

(b) Uránra: $Z = 92$, $A = 238$, $R = 10^{-15}\, m \Rightarrow \frac{N}{V} = \frac{A-Z}{4/3\pi R^3} = 3.49 \cdot 10^{46} \cdot m^{-3}$ így:

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_n}\left(3\pi^2 \cdot \frac{A-Z}{4/3\pi R^3}\right)^{2/3} = 3.39 \cdot 10^{-10}\, J = 2.12\, GeV$$

(c) He^3-ban: $\frac{N}{V} = \left(4.62 \cdot 10^{-29}\, m^3\right)^{-1}$így:

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2 \cdot 3u}\left(3\pi^2 \cdot \frac{N}{V}\right)^{2/3} = 8.30 \cdot 10^{-23} = 0.512\, meV$$

3-4. Feladat

(a)

A mellékelt ábráról leolvasható, hogy: $\frac{c_V}{T} = A \cdot T^2 + B$, ahol A és B illesztési állandók. Így a réz fajhője:

$$c_V = A \cdot T^3 + B \cdot T$$

Ez pedig úgy magyarázható, hogy a réz fajhője a rácsrezgések és az elektrongáz fajhőjének az összege, előbbi köbösen utóbbi pedig lineárisan függ a hőmérséklettől alacsony hőmérsékleten.

(b)

Az elektrongáz fajhőjére levezetett képlet szerint:

$$c_V^{(elektron)} = \frac{\pi^2}{2} \cdot N_A \cdot \frac{k_B^2}{\varepsilon_F} \cdot T = B \cdot T$$

$B \approx 0.65 \cdot 10^{-3}\, \frac{J}{K \cdot mol}$ a grafikon egyenesének tengelymetszetéből leolvasva, innen pedig:

$$\varepsilon_F = \frac{\pi^2}{2} \cdot N_A \cdot \frac{k_B^2}{B} = 8.71 \cdot 10^{-19}\, J = 5.44\, eV$$

(c)

A réz adatai: $\rho = 8900\, \frac{kg}{m^3}$, $M = 63.5 \cdot 10^{-3}\, \frac{kg}{mol}$. A Fermi-energia definíciója alapján:

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(3\pi^2 \cdot \frac{z \cdot N}{V}\right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(3\pi^2 \cdot z \cdot \rho \cdot \frac{N_A}{M}\right)^{2/3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ z = \left(\frac{\varepsilon_F \cdot 2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \frac{M}{3\pi^2 \cdot \rho \cdot N_A} = 0.68$$

Atomonként átlagosan 0.68 vezetési elektron van.

(d)

Az elektronok fajhőjárulékа elhanyagolható a fononokéhoz képest, ha $B \cdot T \ll A \cdot T^3$, azaz ha $\sqrt{\frac{B}{A}} = T_0 \ll T$. A értéke a grafikon ról, mint az egyenes merdeksége, leolvasható: $A \approx 5.3 \cdot 10^{-5} \, \frac{J}{mol \cdot K^3}$. Innen a kérdéses hőmérséklet:

$$T_0 = \sqrt{\frac{B}{A}} = 3.5 \, K$$

E feletti hőmérsékleteken már a fononok járuléka a nagyobb, és jóval e felett már az elektronok járuléka elhanyagolható.

(e)

A hang terjedési sebessége a fononok fajhőjárulékára klasszikusan levezetett képlet segítségével tehető meg:

$$c_V^{(fonon)} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{M}{\rho} \cdot k_B \cdot \left(\frac{k_B T}{h \cdot c} \right)^3 = A \cdot T^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \; c = \frac{k_B}{h} \cdot \sqrt[3]{\frac{2\pi \cdot M \cdot k_B}{3\rho \cdot A}} = 328 \, \frac{m}{s} \approx 330 \, \frac{m}{s}$$

5. Feladat

A mágnesezettség kis mágneses tér esetén:

$$\langle M \rangle = \mu_B^2 \cdot \frac{A}{2} \cdot B \cdot \int_0^\infty d\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^{-1/2}}{e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}$$

A Bethe-Sommerfeld-sorfejtés elsőrendű tagját is felhasználva:

$$\langle M \rangle \approx \mu_B^2 \cdot \frac{A}{2} \cdot B \cdot \left\{ \int_0^\mu d\varepsilon \cdot \varepsilon^{-1/2} + 2 \cdot (k_B T)^2 \cdot \left[\frac{d}{d\varepsilon} \left(\varepsilon^{-1/2} \right) \right]_{\varepsilon = \mu} \cdot \int_0^\infty \frac{z \, dz}{e^z + 1} \right\} =$$
$$= \mu_B^2 \cdot \frac{A}{2} \cdot B \cdot \left\{ 2 \cdot \mu^{1/2} + 2 \cdot (k_B T)^2 \cdot \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \mu^{-3/2} \right] \cdot \left[\frac{\pi^2}{12} \right] \right\} =$$
$$= \mu_B^2 \cdot \frac{A}{2} \cdot B \cdot \left\{ 2\mu^{1/2} - \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{(k_B T)^2}{\mu^{3/2}} \right\}$$

Mivel itt már megtettük az elsőrendű korrekciót, így az A kifejezésében már nem kell, tehát helyettesíthetjük az alábbi formulát:

$$N = \frac{2}{3} \cdot A \cdot \mu^{3/2}$$

Így a mágneses szuszceptibilitás:

$$\chi = \frac{1}{N} \cdot \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial B} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{\mu} - \frac{\pi^2}{24} \cdot \frac{(k_B T)^2}{\mu^3} \right) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_F} - \frac{\pi^2}{24} \cdot \frac{(k_B T)^2}{\varepsilon_F^3} \right)$$