Statisztikus fizika 7. házi feladat

Kómár Péter (KOPNAAT.ELTE)

2008. 04. 06.

1. Feladat

A világűr $1\,m^3$-ében lévő sugárzás energiája ill. fajhője: $\left(V = 1\,m^3,\ T = 2.9\,K\right)$

$$E = V \cdot \frac{\pi^2}{15} \cdot \frac{\left(k_B T\right)^4}{\left(\hbar c\right)^3} \qquad \Rightarrow\ C_f = V \cdot \frac{4\pi^2}{15} \cdot \frac{k_B^4 T^3}{\left(\hbar c\right)^3} = 7.4 \cdot 10^{-14}\ \frac{J}{K}$$

Ebben a térfogatban lévő 1 hidrogénatom fajhője pedig az ideális gáz fajhőjének kifejezéséből:

$$C_H = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot N_H = \frac{3}{2} \cdot k_B = 2.1 \cdot 10^{-23}\ \frac{J}{K}$$

Így a két fajhő aránya: $\frac{C_f}{C_H} = 3.5 \cdot 10^9$.

2. Feladat

(a)

A hőmérsékleti sugárzás nagykanonikus állapotösszege:

$$\Omega_G = -\frac{E}{3} = -V \cdot \frac{\overline{u}}{3}$$

innen a nyomás:

$$p = -\left(\frac{\partial \Omega_G}{\partial V}\right)_{T,\mu} = -\frac{\partial}{\partial V}\left(-V \cdot \frac{\overline{u}}{3}\right) = \frac{\overline{u}}{3}$$

(b)

Gáz nyomása:

$$p_g = \frac{n}{V} \cdot RT$$

Fotongáz nyomása:

$$p_f = \frac{1}{3}\overline{u} = \frac{4\sigma T^4}{3}$$

A két nyomás az alábbi hőmérsékleten egyenlő:

$$T = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot \frac{n}{V} \cdot \frac{R}{\sigma}} = \begin{cases} 4.8 \cdot 10^4\,K & ,ha\ \frac{n}{V} = 10^6\,\frac{mol}{m^3} \\ 2.2 \cdot 10^5\,K & ,ha\ \frac{n}{V} = 10^8\,\frac{mol}{m^3} \end{cases}$$

3. Feladat

(a)

Feltételezzük, hogy a Nap tömegeloszlása homogén. A gravitációs energiáját úgy számíthatjuk ki, hogy a végtelenből hozva az anyagot dr vastagságú héjanként építjük fel, melyek sűrűsége állandó. Egy héj tömege: $dm = \rho 4\pi r^2 dr$, ennek már ott lévő r sugarú gömb potenciálgödrében a gravitációs energiája:

$$dE = -G \cdot \frac{1}{r} \cdot \left[\rho \frac{4}{3}\pi r^3\right] \cdot dm = -G \cdot \rho^2 \frac{16\pi^2}{3} \cdot r^4 \cdot dr$$

Ezt integrálva az R sugarú gömb gravitációs energiája:

$$E_{pot} = -G \cdot \rho^2 \frac{16\pi^2}{3} \cdot \int_0^R r^4 \cdot dr = -G \cdot \rho^2 \frac{16\pi^2}{15} R^5 = -\frac{3}{5} \cdot G \cdot \frac{M^2}{R} = -2.3 \cdot 10^{41}\, J$$

(b)

A viriál-tétel szerint a kinetikus energia: $E_{kin} = -\frac{1}{2} E_{pot}$

Másrészt viszont a szabadsági fokokból is kifejezhetjük: $E_{kin} = \frac{1}{2} k_B T \cdot 3N$

Innen a hőmérséklet: $T = \frac{-E_{pot}}{3Nk_B} = 5.5 \cdot 10^6\, K$

4. Feladat

A Nap összes kisugárzott teljesítménye $P = 4\pi \left(r_{N-F}\right)^2 \cdot j_E = 3.85 \cdot 10^{26}\, W$

Ebből a fúziós reakció sebessége: $\left|\frac{\Delta N_{He}}{\Delta t}\right| = \left|\frac{1}{4}\frac{\Delta N_H}{\Delta t}\right| = \frac{P}{(4m_H - m_{He})c^2} = 8.9 \cdot 10^{37}\, \frac{1}{s}$

Feltételezzük, hogy kezdetben 10^{57} db H-atom volt, ennek a tizede kell átalakuljon ehhez:

$$t = \frac{10^{56}}{4\left|\frac{1}{4}\frac{\Delta N_H}{\Delta t}\right|} = 2.8 \cdot 10^{17}\, s = 8.9 \cdot 10^9\, \acute{e}v$$

5. Feladat

A Föld felszíni hőmérsékletét és az atmoszféra hőmérsékletét tekintve felírhatjuk a dinamikai egyenleteket:

$$C_F \cdot \dot{T}_F = j_E \cdot \alpha\left(T_F\right) \cdot R^2\pi - 4\pi R^2 \sigma T_F^4 + 4\pi R^2 \sigma T_A^4$$
$$C_A \cdot \dot{T}_A = 4\pi R^2 \sigma T_F^4 - 8\pi R^2 \sigma T_A^4$$

a stacionárius megoldás: $\dot{T}_F = 0$, $\dot{T}_A = 0$, $T_{F0} = 288.15\, K$, $T_{A0} = 242.30\, K$

$$\alpha\left(T_{F0}\right) = \frac{2\sigma T_{F0}^4}{j_E} = 0.575$$

A kifejezések rövidítése kedvéért éljünk azzal a feltevéssel, hogy a légkör hőkapacitása jeletősen kisebb, mint a Föld felszíné: $C_A \ll C_F$.

Így az egyenletrendszer az alábbi egyszerű alakú lesz:

$$\frac{C_F}{2\pi R^2 \sigma} \cdot \dot{T}_F = \frac{j_E}{2\sigma} \cdot \alpha(T_F) - 2T_F^4 + 2T_A^4$$
$$0 = T_F^4 - 2T_A^4$$

behelyettesítve az alsó egyenletet a felsőbe:

$$\frac{C_F}{2\pi R^2\sigma}\dot{T_F} = \frac{j_E}{2\sigma}\cdot\alpha(T_F) - T_F^4$$

Sorba fejtve az egyenletet a stacionárius megoldás körül: $(T_F = T_{F0} + \tau_F)$

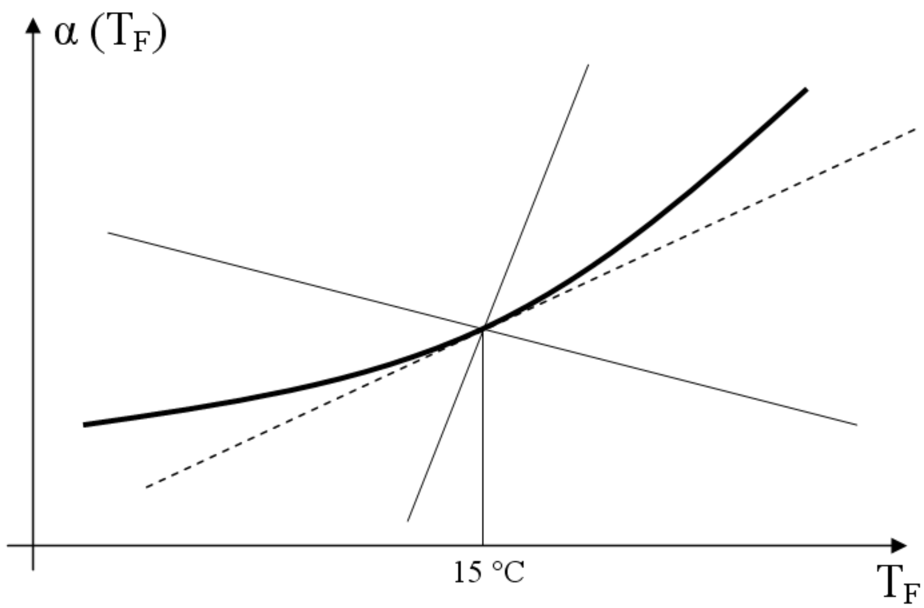
$$\frac{C_F}{2\pi R^2\sigma}\dot{\tau_F} = \left(\frac{j_E}{2\sigma}\cdot\alpha'(T_{F0}) - 4T_{F0}^3\right)\cdot\tau_F + \frac{1}{2}\left(\frac{j_E}{2\sigma}\cdot\alpha''(T_{F0}) - 12T_{F0}^2\right)\tau_F^2 + ...$$

A stacionárius megoldás elsőrendben stabil, ha $\left(\frac{j_E}{2\sigma}\cdot\alpha'(T_{F0}) - 4T_{F0}^3\right) < 0$, azaz ha

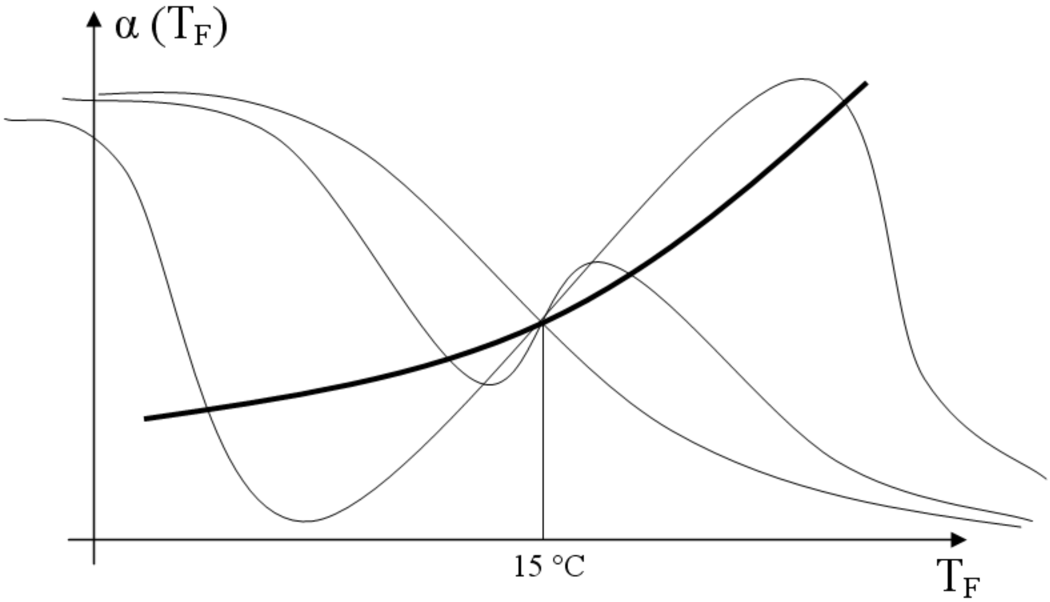
$$\alpha'(T_{F0}) < T_{F0}^3\frac{8\sigma}{j_E} = 7.98\cdot 10^{-3}\,\frac{1}{K}$$

Ha $\alpha(T_F)$ olyan, hogy a deriváltja 288.15 K-nél kisebb, mint a fenti érték, akkor első közelítésben stabilnak mondhatjuk a Föld hőmérsékletét. Ha azonban ennél nagyobb a derivált, akkor bármilyen kis kitérés a hosszú idő után elmozdítja a stacionárius megoldás közeléből a rendszert, ami azt jelenti, hogy kis pozitív eltérés az ideálistól hosszú idő után melegedést, míg bármely kis negatív irányú eltérés hűlést okoz.

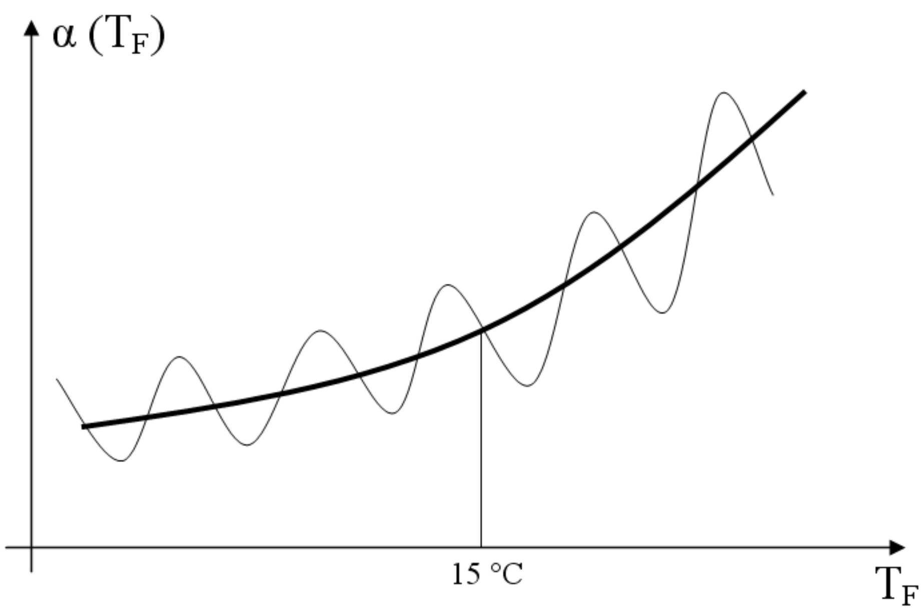
Általánosan úgy vizsgálhatjuk meg a helyzetet, hogy kiszámítjuk bármely T_{F0}-hoz $\alpha(T_{F0})$-t, ezt ábrázolva kapjuk az albedó értékeit a feltételezett egyensúlyokban. Ezután erre a grafikonra lehet felrajzolni a különböző feltételezett $\alpha(T_F)$ függvényeket. Ahol ez a második görbe metszi az elsőt, ott vannak ténylegesen egyensúlyok, továbbá ha alulról felfelé metszi akkor instabil, míg ha felülről lefelé akkor stabil a metszésponthoz tartozó stacionárius megoldás. Az alábbi grafikonokon különböző albedó-függvények láthatók, némelyiknek több stabil ill. instabil stacionárius megoldása is van.



1. ábra: Egy megoldással rendelkező albedó függvények



2. ábra: Több megoldással rendelkező albedó függvények



3. ábra: Sok stabil és instabil megoldással rendelkező albedó-függvény