Statisztikus fizika 6. házi feladat

Kómár Péter (KOPNAAT.ELTE)

2008. 03. 29.

1. Feladat

A hidrogén ionizációja során az alábbi egyensúlyi reakció játszódik le:

$$H \rightleftharpoons p^+ + e^-$$

Az egyensúlyokra vonatkozó tömeghatás törvény alapján a komponensek arányai:

$$\frac{N_H}{N_e \cdot N_p} = \frac{Z_H^{(1)}}{Z_e^{(1)} \cdot Z_p^{(1)}}$$

Az egyrészecske állapotösszegek pedig az ideális gáz állapotösszegéből, valamint abból a tényből, hogy az ionizált állapot energiája ΔE-vel nagyobb:

$$Z_H^{(1)} = V \cdot \left(\frac{2\pi \left(m_e + m_p \right) \cdot k_B T}{h^2} \right)^{3/2}$$
$$Z_e^{(1)} = V \cdot \left(\frac{2\pi m_e \cdot k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \cdot e^{-\beta \frac{\Delta E}{2}}$$
$$Z_p^{(1)} = V \cdot \left(\frac{2\pi m_p \cdot k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \cdot e^{-\beta \frac{\Delta E}{2}}$$

Behelyettesítve és figyelembe véve, hogy ugyanannyi proton van, mint elektron:

$$\frac{N_H}{N_e^2} = \frac{1}{V} \cdot e^{\beta \Delta E} \cdot \left(\frac{h^2}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{m_p + m_e}{m_e \cdot m_p} \right)^{3/2}$$

Mivel $k_B T = 2.4 \cdot 10^{-4}\, eV$, és a hidrogénatom ionizációs energiája $\Delta E = 13.6\, eV$, ezért az exponenciális kitevője egy 5 jegyű pozitív szám, ami azt okozza, hogy az eredmény hatalmas lesz, amit nem nyom el egyik, tényező sem, tehát:

$$N_H \ggg N_e^2$$

Lényegében minden elektron-proton pár kötött állapotban van.

2. Feladat

Mivel a Nap a sugarához képest 3 nagyságrenddel távolabb van, így tekinthető pontszerű fényforrásnak. A Nap által kisugárzott teljes teljesítményt kétféleképpen is kifejezhetjük, egyszer a Földön mérhető napállandóból:

$$P = 4\pi \left(r_{N-F} \right)^2 \cdot j_E$$

Másodszor a Stefan-Boltzmann-törvény segítségével:

$$P = 4\pi R_N^2 \cdot \sigma \cdot T_N^4$$

Ezek összevetéséből a Nap felszíni hőmérséklete:

$$T_N = \sqrt[4]{\left(\frac{r_{N-F}}{R_N}\right)^2 \cdot \frac{j_E}{\sigma}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1.5 \cdot 10^{11}}{7 \cdot 10^8}\right)^2 \cdot \frac{1360}{5.67 \cdot 10^{-8}}} = 5760\,K$$

3. Feladat

A Földre érkező teljesítmény a napállandóval kifejezve:

$$P = R_F^2 \pi \cdot j_E$$

Míg a Földre felírt Stefan-Boltzmann-törvény szerint:

$$P = 4\pi R_F^2 \cdot \sigma \cdot T_F^4$$

Összevetve a két kifejezést a Föld felszíni hőmérséklete:

$$T_F = \sqrt[4]{\frac{j_E}{4\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{1360}{4 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8}}} = 278\,K = 5\,^\circ C$$

Ha pedig figyelembe vesszük, hogy az energia 30%-a nem éri el a Föld felszínét (de elfelejtkezünk arról, hogy ebből következően a kisugárzódó energia kifejezése is módosulna), akkor:

$$T_F' = \sqrt[4]{\frac{0.7 \cdot j_E}{4\sigma}} = 255\,K = 2\,^\circ C$$

4. Feladat

Jó közelítéssel a feltételezett atomszféra réteg sugara megegyezik a Föld sugarával, ugyanis a valóságban a légkör vastagsága 10 km. Írjuk fel először a légrétegre a hőmérleget:

$$2 \cdot 4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T_A^4 = P = 4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T_F^4$$

A bal oldal 2-es szorzója amiatt van, mert a légréteg mindkét oldalára sugároz (a Föld felé is, és a Világűr felé is), a jobb oldalon csak a Föld sugárzása áll, mert a feltételezés szerint a légréteg, csak az onnan érkező sugárzást nyeli el.

A Föld hőmérlege:

$$4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T_F^4 = \pi R^2 \cdot j_E + 4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T_A^4$$

(A Föld a légrétegtől és a Naptól származó sugárzást is elnyeli.)

A két egyenlet által alkotott egyenletrendszert T_A, T_F-re megoldva, a Föld felszíni hőmérséklete:

$$T_F = \sqrt[4]{\frac{j_E}{2\sigma}} = 330\,K = 57\,^\circ C$$

Az atmoszféra hőmérséklete pedig ugyanannyi, mint az előző feladatban a Földé, hiszen másképp nem teljesülne a teljes rendszer hőmérlege. ($T_A = 278\,K$)

5. Feladat

A fentiekben levezettük, hogy a Föld hőmérséklete arányos a napállandó negyedik gyökével:

$$T_F \sim (j_E)^{1/4}$$

Ha tehát napállandó Δj_E nagyságú oszcillációkat végez a $\overline{j_E}$ átlag körül, akkor a Föld hőmérséklete ΔT_F ingadozásokat fog végezni $\overline{T_F}$ átlag körül, amik között az alábbi összefüggések állnak fenn:

$$\overline{T_F} \lesssim \sqrt[4]{\frac{\overline{j_E}}{2\sigma}} = 330\,K$$

$$\Delta T_F \approx \frac{\partial T_F}{\partial j_E} \cdot \Delta j_E = \frac{1}{4} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{2\sigma \cdot \overline{j_E}^3}} \cdot \Delta j_E = \frac{1}{4} \cdot \overline{T_F} \cdot \frac{\Delta j_E}{\overline{j_E}} \lesssim \frac{1}{4} \cdot 330 \cdot 0.001 = 0.08\,K$$

Ez a változás túl kicsi, önmagában nem magyarázza a jégkorszakok 7 K-es hőmérsékletcsökkenését, ez azonban nem jelenti azt, hogy nincs olyan folyamat, amit éppen ez a pici változás indítana el, és ami végül jégkorszakot eredményezne.