

# Statisztikus fizika 5. házi feladat

Kómár Péter (KOPNAAT.ELTE)

2007. 03. 14.

## 1. Feladat

Figyelembe véve a degenerációkat is, az állapotösszeg egyetlen atomra:

$$Z_1 = 1 + 3 \cdot e^{-\beta\varepsilon}$$

,ahol  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ ,  $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$ .

Innen  $N$  db egymástól független He atom közül a gerjesztettek aránya:

$$\frac{N_g}{N} = P(E = \varepsilon) = \frac{1}{Z_1} \cdot 3 \cdot e^{-\beta\varepsilon} = \frac{3 \cdot e^{-\beta\varepsilon}}{1 + 3 \cdot e^{-\beta\varepsilon}} = 6.77 \cdot 10^{-17}$$

ugyanis  $\varepsilon = 19.81 \text{ eV}$  és  $k_B T = 0.517 \text{ eV}$ .

## 2. Feladat

Jelöljük a henger magasságát  $H$ -val, alapterületét pedig  $A$ -val, így  $V = A \cdot H$ . Az egyensúlyt  $z$  paraméter függvényében akarjuk megkeresni, amit úgy teszünk, hogy  $z$ -t állandónak tételezzük fel, és kiszámítjuk a szabad energiát. Ehhez először felírjuk az állapotösszegeket:

A felső térrészbeli gázra:

$$Z_1 = \frac{(A(H-z))^N}{N!} \cdot \left( \frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3N}{2}}$$

Az alsó térrészbeli gázra:

$$Z_2 = \frac{(Az)^N}{N!} \cdot \left( \frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3N}{2}}$$

A dugattyúra pedig:

$$Z_3 = \int e^{-\beta E} \cdot \delta(Mgz - E) dE = e^{-\beta Mgz}$$

A rendszer teljes szabadenergiája így

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -k_B T \cdot \ln(Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3) = -k_B T \cdot [\ln Z_1 + \ln Z_2 + \ln Z_3] = \\ &= Mgz - k_B T \cdot \left[ 2N \cdot \ln A + N \cdot \ln z + N \cdot \ln(H-z) - 2 \cdot \ln N! + 3N \cdot \ln \left( \frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Az egyensúlyi helyzet kritériuma az, hogy ott a szabadenergia minimális legyen, amiből következik, hogy

$$0 = \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} \right)_{T,V} = -k_B T \cdot \left[ -\frac{N}{H-z} + \frac{N}{z} - \beta M g \right]$$

Innen átalakítva az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk:

$$0 = \left(\frac{z}{H}\right)^2 + \frac{z}{H} \cdot (-1 - 2\lambda) + \lambda$$

ahol  $\lambda = \frac{N \cdot k_B T}{H \cdot Mg}$ . Figyelembe véve, hogy  $\frac{z}{H} < 1$ , a megoldás:

$$\frac{z}{H} = \frac{1}{2} + \lambda - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot \lambda^2}$$

Ez az eredmény egyezik a mechanikai egyensúlyból számolhatóval, ugyanis a szabad energia deriváltjára felírt egyenlet átalakítható:

$$\frac{Mg}{A} = \frac{N \cdot k_B T}{V_1} - \frac{N \cdot k_B T}{V_2}$$

ami éppen azt mutatja, hogy az alsó gáz nyomása a dugattyú (keresztmetszetén keresztüli) járulékaival nagyobb, mint a felső gázé.

### 3. Feladat

Tegyük fel, hogy a külső elektromos tér kicsi, ahhoz, hogy jelentősen eltolja az energiaminimumok helyeit, ekkor a pozitív töltés 4 lehetséges pozíciója közül kettőnek csökken az energiája, a másik kettőhöz képest. Jelölje  $P_+$  az alacsonyabb és  $P_-$  a magasabb energiájú pozíciókban való tartózkodás valószínűségét, mivel az energiakülönbség:  $\varepsilon = e \cdot Ea$ , így kétállapotú rendszernek tekintve a pozitív töltés helyét, a valószínűségek:

$$P_+ = \frac{1}{1 + e^{-\beta\varepsilon}} \quad , \quad P_- = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{1 + e^{-\beta\varepsilon}}$$

Ha 1 valószínűséggel lenne a tér irányába eltolódva a pozitív töltés helye ( $P_+ = 1$ ), akkor  $e \cdot \frac{a}{2}$  lenne a dipólmomentum, így egy általános esetben momentum várható értéke:  $e \cdot \frac{a}{2} \cdot (P_+ - P_-)$ . Mivel egységnyi térfogatban  $N$  db szabad pozitív töltés van, ezért az ezekből összeadó dipólmomentum:

$$\frac{d}{V} = N \cdot e \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1 - e^{-\beta\varepsilon}}{1 + e^{-\beta\varepsilon}} = N \cdot e \cdot \frac{a}{2} \cdot \tanh\left(\frac{e \cdot Ea}{2k_B T}\right)$$

### 4. Feladat

(a)

Rezgési szabadsági fokok nélkül a szilárd fázis csupán az egyetlen molekulára vonatkozó párolgáshővel ( $\varepsilon_0$ ) jellemezhető:  $Z_s = e^{\beta\varepsilon_0 N_s}$ . Ahonnan a kémiai potenciálja:  $\mu_s = -k_B T \cdot \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial N_s}\right) = -\varepsilon_0$ . A gáz fázist tekinthetjük ideális gáznak:  $\mu_g = -k_B T \cdot \ln\left(\frac{V}{N_g} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3/2}\right)$ . Egyensúly esetén a két kémiai potenciál megegyezik, így a gázfázisban lévő molekulák száma kiszámítható:

$$N_g = V \cdot e^{-\beta\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3/2}$$

Behelyettesítve ezt és a megadott adatokat:

$$N_g \approx 10^{-3} \cdot \exp\left(-\frac{0.5}{0.0192}\right) \cdot \left(\frac{2\pi \cdot \frac{0.018}{6 \cdot 10^{23}} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 223}{(6.63 \cdot 10^{-34})^2}\right)^{3/2} = 2.3 \cdot 10^{17}$$

Ez 3 nagyságrenddel kisebb, mint amennyi anyagot beletettünk az edénybe, így tehát mindenképpen van szilárd fázis, azaz jég.

(b)

A szilárd fázist most oszcillátorok halmazának tekintjük, amikre  $\hbar\omega \approx 1 \text{ eV}$  (infravörös fény), akkor az órán levezetett képlet alapján a gázfázisban lévő részecskék száma:

$$N_g = V \cdot e^{-\beta\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)^3 \cdot \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3/2} \approx \left(\frac{1}{0.0192}\right)^3 \cdot 2.3 \cdot 10^{17} = 3.2 \cdot 10^{22}$$

Mivel ez nagyobb, mint amennyi molekula az edényben van ezért azt következtetjük, hogy nem alakul ki stabil szilárd fázis.

## 5. Feladat

(a)

Mint hogy a részecskék szabadon mozognak így az állapotösszeg az ideális gáz mintájára felírható:

$$Z = e^{\beta U_0 N} \cdot \frac{(N \cdot v_0)^N}{N!} \cdot \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3N/2}$$

ahonnan a kémiai potenciál:

$$\begin{aligned} \mu_f &= \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial N}\right)_T = \frac{\partial}{\partial N} (-k_B T \cdot \ln Z) \approx -k_B T \cdot \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{U_0 N}{k_B T} + N \cdot \ln(N v_0) - N \cdot \ln N + N + \frac{3}{2} N \cdot \ln\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)\right) = \\ &= -U_0 - k_B T \cdot \ln v_0 - k_B T - \frac{3}{2} k_B T \cdot \ln\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right) \end{aligned}$$

(b)

Ideális gáz kémiai potenciálja:

$$\mu_g = -k_B T \cdot \ln\left(\frac{V_g}{N_g} \cdot \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3/2}\right)$$

(c)

Egyenlővé téve a két kémiai potenciált:

$$-U_0 - k_B T \cdot \ln v_0 - k_B T = -k_B T \cdot \ln \frac{V_g}{N_g}$$

ez átalakítva a gáz nyomása az ideális gáz állapotegyenlete alapján:

$$p_g = k_B T \cdot \left(\frac{V_g}{N_g}\right)^{-1} = \frac{k_B T}{v_0} \cdot \exp\left(-\frac{U_0}{k_B T} - 1\right)$$