Statisztikus fizika 4. házi feladat

Kómár Péter (KOPNAAT.ELTE)

2007. 03. 08.

1. Feladat

Amikor s db kapocs van nyitva, akkor a teljes energia $E = s \cdot \varepsilon$. Mindenfajta s-hez tartozó állapot csak egyetlen egyféleképpen valósulhat meg, így az állapotösszeg az alábbi:

$$Z = \sum_{s=0}^{N} \Omega\left(s\varepsilon\right) \cdot e^{-\beta \cdot s\varepsilon} = \sum_{s=0}^{N} \left(e^{-\beta\varepsilon}\right)^{s} = \frac{\left(e^{-\beta\varepsilon}\right)^{N+1} - 1}{e^{-\beta\varepsilon} - 1} = \frac{1 - e^{-\beta\varepsilon(N+1)}}{1 - e^{-\beta\varepsilon}}$$

$\beta\varepsilon \gg 1$ limeszben az állapotösszeg az alábbi egyszerűbb alakban írható:

$$Z \approx \frac{1}{1 - e^{-\beta\varepsilon}} \approx 1 + e^{-\beta\varepsilon}$$

innen a nyitott kapcsok átlagos száma:

$$\langle s \rangle = \frac{\langle E \rangle}{\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z \approx -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial\beta} \ln\left(1 + e^{-\beta\varepsilon}\right) \approx -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial\beta} e^{-\beta\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon e^{-\beta\varepsilon} = e^{-\beta\varepsilon}$$

Ez jóval kisebb, mint 1, hiszen a limesz szerint a hőmérséklet alacsonyabb, minthogy akár egyetlen kapocs is jelentős valószínűséggel nyitva legyen.

2. Feladat

A feltételezés szerint: $R \sim P_{sz} \sim \left\langle A^2 \right\rangle = 3 \cdot \left\langle A_1^2 \right\rangle$.

Egy oszcillátorra $k_B T$ energia jut, így az amplitúdójának várható értéke: $\left\langle A_1^2 \right\rangle = \frac{2}{D} \cdot k_B T$, így tehát a fém ellenállása szobahőmérsékleten arányos a hőmérséklettel, ami összhangban is áll a fémekre vonatkozó gyakorlatban használt ellenállás-hőmérséklet képletekkel.

3. Feladat

(a) Matematikai inga potenciális energiája: $E_{pot} = mg\ell\left(1 - \cos\phi\right) \approx mg\ell\frac{\phi^2}{2}$, egyensúlyban 0. Így mivel kvadratikus a koordinátában, ezért az ekvipartíció tétele szerint T hőmérsékleten a rá jutó energia átlaga $\frac{1}{2}k_B T$. Így pedig a kitérés négyzetes fluktuációja:

$$\left\langle \phi^2 - \langle\phi\rangle^2 \right\rangle = \left\langle \phi^2 \right\rangle = \frac{k_B T}{mg\ell} = \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{10^{-3} \cdot 10 \cdot 1} = 4.1 \cdot 10^{-19} = \left(6.4 \cdot 10^{-10}\, rad\right)^2$$

(b) Kondenzátor elektrosztatikus energiája: $E = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q^2$, egyensúlyban 0. Hasonlóan a fentiekhez mivel ez is kvadratikus:

$$\left\langle Q^2 - \langle Q\rangle^2 \right\rangle = \left\langle Q^2 \right\rangle = C \cdot k_B T$$

4. Feladat

(a) A q változó által meghatározott szabadsági fok a feltételezés szerint a teljes Hamilton-függvényhez alábbi módon járul hozzá: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \alpha|q|^k$, így az állapotösszeg: $Z = Z_0 \cdot \int dq\, e^{-\beta\alpha|q|^k}$. Mivel nem maga ez integrál, hanem annak logaritmusa a kérdés (pontosabban az átlagos energia, ami a logaritmus deriváltja) ezért kiszámítása helyett dimenzióanalízist használunk:

1. $[\beta] = J^{-1}$,
2. Mivel $\alpha|q|^k$ energia dimenziójú kell legyen ezért $[\alpha] = J \cdot [q]^{-k}$.
3. Az integrál dimenziója megegyezik q dimenziójával, hiszen q szerint integráljuk a dimenziótlan integrandust.

Továbbá feltesszük, hogy az integrál improprius, így a végeredményt az integradus két paramétere (k, $\beta\alpha$) határozza csak meg. Ezek közül $\beta\alpha$ adja a eredmény dimenzióját. Figyelembe véve, hogy $[\beta\alpha] = [q]^{-k}$, a fentiek alapján:

$$\int dq\, e^{-\beta\alpha|q|^k} = I(k,\, \beta\alpha) = f(k) \cdot (\beta\alpha)^{-1/k}$$

Az átlagos energia kiszámítása ez alapján:

$$\langle E_q \rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln\left[f(k) \cdot (\beta\alpha)^{-1/k}\right] = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left[f(k) - \frac{1}{k}\ln(\beta\alpha)\right] = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\beta\alpha} \cdot \alpha = \frac{1}{k} \cdot k_B T$$

Ez általánosítása az ekvipartíció tételének, ami $k = 2$ helyettesítéssel visszaadja a kvadratikus energiajárulékokra érvényes (ismert) képletet.

Ezt alkalmazva a homogén gravitációs térbe helyezett ideális gázra: a gravitációból következő potenciális energia a z koordinátában lineáris ($k = 1$), így erre a szabadsági fokra a fentiek szerint $k_B T$ energia jut, így pedig a gáz fajhője $2 \cdot \frac{1}{2} k_B$-vel több, mintha csak a kinetikus szabadsági fokokból eredne. (Ez azonban csak akkor igaz, ha elég magas a doboz, amiben a gáz van, ugyanis, ha kis magasságú, akkor a fent kiszámított integrálba a doboz magassága is bekerül, így az eredmény változik. Ebben az esetben a gáz súlypontjának van egy maximális értéke, ebből következően a gravitációs energiatároló szabadsági fok telítődésbe tud menni, így magas hőmérsékleten nem szól bele a fajhőbe.)

(b) Kétdimenziós kristályrácsban is alacsony hőmérsékleten ($T \to 0$) már csak a hangszerű módusok maradnak meg, a többi kifagy, így ha a minta lineáris mérete L, akkor a benne lévő lehetséges módusok hullámszáma: $k_i = \frac{2\pi}{L} \cdot n_i$, energiája: $\hbar\omega = \hbar v k = \hbar v \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = \frac{hv}{L}\sqrt{n_1^2 + n_2^2}$. Adott hőmérsékleten átlagosan $k_B T$ energiánál kisebb energiájú módusok élnek még, azaz azok, amikre: $\sqrt{n_1^2 + n_2^2} \leq \frac{k_B T \cdot L}{hv}$. A T hőmérséklethez tartozó módusok összeszámolását egy integrállal közelítjük, ami éppen egy negyedkör területe:

$$n(T) = \frac{1}{4} \cdot \pi \left(\frac{k_B T \cdot L}{hv}\right)^2 \sim T^2$$

5. Feladat

Kvalitatíve: Hasonlóan a mágneses hűtéshez, itt is az történik, hogy a gravitációs szabadsági fok (a gravitáció erősségének csökkenésével) egyre jelentősebben belép a rendszerbe (felolvad), így a rendszer energiája több szabadsági fokon oszlik el, tehát csökken a hőmérséklet.

Kvantitatíve: A felszállás során izentropikusan változik a rendszer állapottere. Azaz az $S(T, g)$ entrópia állandó, ami ekvivalens azzal, hogy:

$$\dot{g}\left(\frac{\partial S}{\partial g}\right)_T + \dot{T}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_g = 0$$

Az entrópia ez energiával és a szabad energiával kifejezve:

$$S = \frac{1}{T}\left(E - \mathcal{F}\right) = \frac{1}{T}\left(-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z - \left(-\frac{1}{\beta}\ln Z\right)\right) = k_B \cdot \left(1 - \beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\ln Z$$

Az állapotösszeget pedig az alábbi módon számíthatjuk:

$$\begin{aligned} Z &= \int d^N x \int d^N y \int d^N p_x \int d^N p_y \int d^N p_z \, e^{-\beta\frac{p^2}{2m}} \cdot \int d^N z \prod_{i=1}^{N} e^{-\beta\cdot mgz_i} = \\ &= Z_0 \cdot \int d^N z \, e^{-\beta\cdot mg\sum_{i=1}^{N} z_i} \approx Z_0 \cdot e^{-\beta\cdot Nmg\cdot\langle z\rangle} \cdot (\delta z)^N \end{aligned}$$

Így az entrópia nehézségi gyorsulás szerinti deriváltja:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial g}\right)_T = k_B\left(1 - \beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\frac{\partial}{\partial g}\ln Z \approx k_B\left(1 - \beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\left(-\beta Nm\langle z\rangle\right) = k_B \cdot \beta^2 Nm \cdot \frac{\partial\langle z\rangle}{\partial\beta}$$

Az gáz részecskéinek átlagmagassága a barometrikus magasságformulából: $\langle z\rangle = \frac{k_B T}{mg} = \frac{1}{\beta mg}$. Így az izentropikusság egyenletét átrendezve és behelyettesítve:

$$\dot{T} = -\dot{g} \cdot \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial g}\right)_T}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_g} = -\dot{g} \cdot \frac{k_B\beta^2 Nm \cdot \frac{1}{mg} \cdot \left(-\frac{1}{\beta^2}\right)}{\frac{1}{T} \cdot C_{V,g}} = \dot{g} \cdot \frac{k_B N}{C_{V,g}} \cdot \frac{T}{g} = \dot{g} \cdot \frac{R}{c_{V,g}} \cdot \frac{T}{g}$$

Átrendezve:

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{R}{c_{V,g}} \cdot \frac{\dot{g}}{g}$$

Integrálva idő szerint:

$$\ln T = \frac{R}{c_{V,g}} \cdot \ln g + \ln A$$

Így a hőmérséklet g-függése:

$$T = A \cdot g^{\frac{R}{c_{V,g}}}$$

Leolvasható, hogy g csökkenésével T is csökken.

Ez a képlet azonban csak addig érvényes, amíg a tárolóedény végtelennek tekinthető a gáz súlypontjának magasságához képest (erős gravitáció). Valójában a gáz hőmérséklete nem 0-hoz, csupán egy az eredetinél alacsonyabb értékhez tart, miközben $g \to 0$.