Statisztikus fizika 3. házi feladat

Kómár Péter (KOPNAAT.ELTE)

2007. 03. 01.

1. Feladat

Abszorpció: $a = \alpha \cdot \left(\frac{N_- - N_+}{N}\right)$.
Várható értéke:

$$\langle a \rangle = \frac{1}{N} \langle \alpha \cdot (N_- - N_+) \rangle = -\frac{\alpha}{\varepsilon N} \cdot \langle \varepsilon \cdot (N_+ - N_-) \rangle = -\frac{\alpha}{\varepsilon N} \cdot \langle E \rangle$$

Kanonikus eloszlás állapotösszege:

$$Z = \int \Omega(E) \cdot e^{-\beta E} dE = \sum_{K=0}^{N} \binom{N}{K} \cdot e^{\beta\varepsilon(N-2K)} = \sum_{K=0}^{N} \binom{N}{K} \cdot \left(e^{-\beta\varepsilon}\right)^K \cdot \left(e^{\beta\varepsilon}\right)^{N-K} = \left(e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon}\right)^N$$

Így az energia várható értéke:

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = -\frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} Z = -N \cdot \frac{\varepsilon e^{\beta\varepsilon} - \varepsilon e^{-\beta\varepsilon}}{e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon}} = -\varepsilon N \cdot \tanh(\beta\varepsilon)$$

Így az abszorpció várható értéke: $\langle a \rangle = \alpha \cdot \tanh(\beta\varepsilon) = \alpha \cdot \tanh\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right)$

2. Feladat

Először számítsuk ki, hogy a kibocsátott fény hányad része jut a megfigyelő szemébe: Mivel $\frac{R}{l} = \frac{0.1\,m}{10\,m} \ll 1$, azaz a megfigyelés távolsága sokkal nagyobb, mint a gömb kiterjedése, így az tekinthető pontszerű fényforrásnak. Egy szem pupillájának sugara kb $r = 2.5\,mm$, így mivel két szemünk van, az érzékelt fotonok száma:

$$N_s = N_{ki} \cdot \frac{2\pi r^2}{4\pi l^2} = N_{ki} \cdot 3.125 \cdot 10^{-8}$$

Adott T hőmérsékleten a kibocsátott λ hullámhosszúságú fotonok száma valamilyen választott időtartam alatt arányos azon részecskék átlagos számával, akiknek több energiájuk van, mint $\frac{hc}{\lambda}$, és mivel termalizált ideális gázról van szó, így a Boltzmann-eloszlás szerint:

$$N_{ki} = N \cdot e^{-\frac{hc}{\lambda \cdot k_B T}}$$

ahol N a gáz teljes anyagmennyisége $= \frac{m}{m_{Na}} = \frac{m \cdot N_A}{M_{Na}}$. A feltételezés szerint egy fotont is képesek vagyunk érzékelni, így akkor válik láthatóvá a gáz, amikor:

$$1 \approx \frac{m \cdot N_A}{M_{Na}} \cdot e^{-\frac{hc}{\lambda \cdot k_B T}} \cdot \frac{r^2}{2 \cdot l^2}$$

innen a határ hőmérséklet:

$$T \approx \frac{hc}{\lambda \cdot k_B} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{m \cdot N_A}{M_{Na}} \cdot \frac{r^2}{2 \cdot l^2}\right)} = 710\,K$$

3. Feladat

(a)

CH_4 molekula 5 részecskéből áll, így 30 szabadsági foka van, ebből 3 a TKP helyét, 3 a TKP impulzusát, 3 az Euler-szögeket, 3 pedig a szögsebességeket jelenti, a maradék 18 szabadsági fok mind oszcillátorokhoz tartozik. Mivel az energia kifejezésében nem szerepel a TKP helye és az Euler-szögek (hiszen ideális gázról van szó) valamint mindegyik oszcillátort harmonikusnak tekintjük, így az ekvipartíció tétele alapján nagy hőmérsékleten a metán fajhője:

$$C_V = N_A \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{2}k_B + 3 \cdot \frac{1}{2}k_B + 18 \cdot \frac{1}{2}k_B\right) = 12 \cdot R$$

(b)

Egy felületen mozgó atomnak 4 szabadsági foka van, így egy kétatomos molekulának összesen 8, az a TKP 2 hely és 2 impulzus koordinátájából, a forgáshoz tartozó 1 szög és 1 szögsebesség koordinátából valamint további 2 oszcillációs szabadsági fokból áll. Mivel a TKP helye és a forgási szög nem ad energiajárulékot, így a rendszerben összesen 2+1+2 energiatároló szabadsági fok van (és mindegyik kvadratikus), így magas hőmérsékleteken a fajhő: $C_V = \frac{5}{2}R$. A hőmérséklet csökkenésével az oszcillációs szabadsági fokok befagyhatnak, így a fajhő alacsony hőmérsékleten $\frac{3}{2}R$-re eshet vissza. (Feltéve, hogy továbbra is ideálisnak tekinthető a gáz.)

4. Feladat

Az 1. Feladatban már kiszámítottuk a spinek átlagos energiáját:

$$\langle E \rangle = -\varepsilon N \cdot \tanh\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)$$

A fajhő pedig:

$$C_V = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{N,\varepsilon} = -\varepsilon \cdot \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)} \cdot \left(-\frac{\varepsilon}{k_B T^2}\right) = \frac{\varepsilon^2}{k_B T^2} \cdot \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}$$

5. Feladat

a) Az ideális gáz csak fluktuációkat ad a rendszerhez, az egyensúlyi helyzetet nem tolja el, így: $\overline{z} = \frac{mg}{D}$.
b) Az egyensúlyi helyzet körül felírt potenciális energia formulája kvadratikus a kitérésben, így az ekvipartíció tétele alapján $\frac{1}{2}k_B T$ energia jut rá, azaz

$$\frac{1}{2}k_B T = \langle E_{pot} \rangle = \frac{1}{2}D \cdot \left\langle (z-\overline{z})^2 \right\rangle$$

ahonnan a négyzetes fluktuáció: $\left\langle (z-\overline{z})^2 \right\rangle = \frac{k_B T}{D}$.
c) A súlymérés hibája 100%-ossá válik, ha:

$$\frac{mg}{D} = \overline{z} \approx \sqrt{\left\langle (z-\overline{z})^2 \right\rangle} = \sqrt{\frac{k_B T}{D}}$$

innen a tömeg limit:

$$m_{min} \approx \frac{\sqrt{k_B T \cdot D}}{g}$$