Statisztikus fizika 2. házi feladat

Kómár Péter (KOPNAAT.ELTE)

2007. 02. 23.

1. Feladat

A jel a_S amplitúdója egy konstans szám, míg a zajé (a_n) egy valószínűségi változó, aminek a várható értéke $\langle a_n \rangle = 0$, szórása pedig: $\sqrt{\langle a_n^2 \rangle} \approx 1000\, a_s$. Az érzékelt amplitúdó a kettő összege: $a = a_s + a_n$. Ha N egymás utáni amplitúdót összegzünk, akkor a jel amplitúdók összege N-nel arányosan nő, míg a zaj amplitúdók összege a nagy számok törvénye alapján egy továbbra is 0 várható értékű és $\sqrt{N}$-nel arányos szórású valószínűségi változó lesz:

$$A_n = \sum_{i=1}^{N} (a_n)_i \qquad \sqrt{\langle A_n^2 \rangle - \langle A_n \rangle^2} = \sqrt{\langle A_n^2 \rangle} = \sqrt{N} \cdot \sqrt{\langle a_n^2 \rangle}$$

A jelamplitúdók összege pedig:

$$A_s = N \cdot a_s$$

Akkor nevezhetjük megfigyelhetőnek az összegzett jelet a zaj mellett, ha: $A_s \approx \sqrt{\langle A_n^2 \rangle}$, azaz:

$$\sqrt{N} \cdot \sqrt{\langle a_n^2 \rangle} \approx N \cdot a_s$$

$$\sqrt{N} \cdot 1000\, a_s \approx N \cdot a_s$$

Innen pedig: $N \approx 10^6$, azaz egymillió amplitúdót kell összegezni, hogy a jel/zaj viszonyt 1000-szeresére javítsuk.

2. Feladat

i)

A hőmérséklet: $T = 300\, K$, a CO moláris tömege: $M = 0.028 \frac{kg}{mol}$. A Maxwell-féle sebességeloszlás:

$$P(v_x, v_y, v_z) = P(\mathbf{v}) = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(-\lambda v^2\right)$$

ahol $\lambda = \frac{m}{2k_B T} = \frac{M}{2RT}$, $R = 8.314\, \frac{J}{K \cdot mol}$.
Térjünk át polár koordinátákra a sebességtérben:

$$(v_x, v_y, v_z) \leftrightarrow (v, \vartheta, \phi)$$

A sebesség abszolút értékének várható értéke (átlaga) így:

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty dv \cdot v \cdot \int_0^\pi d\vartheta \, \sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\phi \, P(v, \vartheta, \phi) \cdot v = \int_0^\infty dv \, 4\pi v^3 \cdot \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\lambda v^2\right) =$$

$$= 4\pi \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial\lambda}\right) \int_0^\infty dv \, v \cdot \exp\left(-\lambda v^2\right) = 4\pi \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial\lambda}\right) \frac{1}{2\lambda} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\lambda\pi}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{RT}{M}} \approx 476\, \frac{m}{s}$$

A legvalószínűbb értéket a sebesség abszolút értékétől függő sűrűségfüggvény maximumának helye adja:

$$\frac{d}{dv}\left[4\pi v^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\lambda v^2\right)\right] = 0$$

$$2v \cdot \exp\left(-\lambda v^2\right) + v^2 \cdot (-2\lambda v) \exp\left(-\lambda v^2\right) = 0$$

$$2v \cdot \exp\left(-\lambda v^2\right) \cdot \left(1 - v^2\lambda\right) = 0$$

Maximumot a $v = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{RT}{M}} \approx 422\,\frac{m}{s}$-nál találunk, ezért ez a legvalószínűbb sebesség.

ii)

Az energia várható értéke a fenti polár koordinátákban integrálva:

$$\langle E \rangle = 4\pi \int_0^\infty dv\, v^2 \cdot \frac{1}{2}mv^2 \cdot \exp\left(-\lambda v^2\right) = 2\pi m \cdot \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \int_0^\infty dv\, v^4 \cdot \exp\left(-\lambda v^2\right) =$$

$$= 2\pi m \cdot \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^2 \int_0^\infty dv\, \exp\left(-\lambda v^2\right) = 2\pi m \cdot \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{3}{8} \cdot \lambda^{-5/2} =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot m \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{3}{2} k_B T$$

Második momentuma:

$$\left\langle E^2 \right\rangle = 4\pi \int_0^\infty dv\, v^2 \cdot \left(\frac{1}{2}mv^2\right)^2 \cdot \exp\left(-\lambda v^2\right) = \pi m^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \int_0^\infty dv\, v^6 \cdot \exp\left(-\lambda v^2\right) =$$

$$= \pi m^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^3 \int_0^\infty dv\, \exp\left(-\lambda v^2\right) = \pi m^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{3/2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{15}{16} \cdot \lambda^{-7/2} =$$

$$= \frac{15}{16} \cdot m^2 \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{15}{16} \left(k_B T\right)^2$$

Így a szórás valamint a relatív szórás (relatív fluktuáció):

$$\sigma_E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} k_B T \qquad \frac{\sigma_E}{\langle E \rangle} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.82$$

A relatív fluktuáció tehát alig kisebb, mint maga az energia átlagos értéke, ez azonban nem okoz gondot, hiszen az értelmezés szerint a makroszkopikusan megfigyelhető energiafluktuációk a sok Maxwell-eloszlású valószínűségi változó összegének fluktuációi, ami pedig a nagy számok törvénye szerint relatíve kicsi.

3. Feladat

M tömegű, gömbszimmetrikus tömegeloszlású, R sugarú gömbön kívül a egy m tömegű részecske gravitációs potenciális energiája:

$$E_{pot}(r) = -\frac{1}{\gamma} \frac{Mm}{r}$$

A Maxwell-Boltzmann-eloszlás szerint a gáz sűrűsége r magasságban barometrikus egyensúly esetén

$$\rho(r) = \rho(r_0) \cdot \exp\left(-\frac{E_{pot}(r) - E_{pot}(r_0)}{k_B T}\right)$$

Ez a mi esetünkben:

$$\rho(r) = \rho(R) \cdot \exp\left(\frac{Mm}{\gamma \cdot k_B T} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\right)$$

Figyelembe véve, hogy a nagyobb sugarú gömbhéjaknak nagyobb a felszíne is kapjuk a sugár szerinti sűrűségfüggvényt:

$$P(r) = A \cdot r^2 \cdot \exp\left(\frac{Mm}{\gamma \cdot k_B T} \cdot \frac{1}{r}\right)$$

ahol A egy illesztendő konstans.
Az illesztés nem történhet normálással, mert a fenti függvény nem normálható ugyanis végtelenben nem tart 0-hoz. Ezért gyanítjuk, hogy nem lehetséges, hogy ilyen eloszlású legyen a légkör a Föld körül. Az ok pedig az, hogy a légkör nem izotermikus, a hőmérséklet a Földtől távol már a Nap és az Univerzum által meghatározott átlaghőmérséklettel egyenlő, ami jelentősen alacsonyabb, mint a felszíni hőmérséklet. A légkör azért nem szökik el a Földről, bár a fenti számolás azt jósolná, mert az alacsony hőmérséklet a kinetikus energiát a részecskék közötti kölcsönhatási energia alá nyomja, így a gáz megszűnik ideális lenni és lecsapódik, kötötté válik elsősorban önmagához, és közvetve a Földhöz is.

4. Feladat

A gyémántdarabok tömegei ($m_i \quad i = 1, 2, ..., N$, amikre fennáll, hogy összegük M) koordinátázzák az eseményteret:

$$\left\{(m_1, m_2, ..., m_N) \in \mathbb{R}^N \,|\, \forall i:\ 0 < m_i\,,\ \sum_{i=1}^{N} m_i = M\right\}$$

A feltételezés szerint mindnefajta N darabra törés egyenlően valószínű, azaz ezen a téren konstans valószínűség sűrűség van. Az egyszerűség kedvéért egy gyémánt értékét tekintsük egyenlőnek a tömegének a négyzetével, így a várható összérték N darabra törés esetén:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{N} m_i^2 \right\rangle = N \cdot \langle m_i^2 \rangle$$

,ahol a jobb oldalon m_i jelölheti bármelyik tömeget, ugyanis mindegyik tömeg ugyanolyan eloszlású valószínűségi változó, hiszen indexelésük csupán önkény volt. Egyetlen tömeg négyzetének várható értéke pedig (legyen $i = N$):

$$\langle m_N^2 \rangle = \frac{\int dm_1\, dm_2 ... dm_N\, m_N^2 \cdot \left[\prod_{i=1}^{N} \Theta(m_i)\right] \cdot \delta\left(\sum_{i=1}^{N} m_i - M\right)}{\int dm_1\, dm_2 ... dm_N\, \left[\prod_{i=1}^{N} \Theta(m_i)\right] \cdot \delta\left(\sum_{i=1}^{N} m_i - M\right)}$$

,ahol Θ a Heaviside-függvény, ami 0 ha az argumentuma negatív és 1 ha pozitív. A továbbiakban a nevezőben és a számlálóban álló két integrált számítjuk ki:
A nevezőt koordinátánként egymás után integráljuk. Először leválasztjuk az első változót:

$$\int dm_1\, dm_2 ... dm_N \left[\prod_{i=1}^{N} \Theta(m_i)\right] \cdot \delta\left(\sum_{i=1}^{N} m_i - M\right) =$$
$$= \int dm_2 ... dm_N \left[\prod_{i=2}^{N} \Theta(m_i)\right] \cdot \int dm_1\, \Theta(m_1) \cdot \delta\left(\sum_{i=2}^{N} m_i + m_1 - M\right) = ...$$

Az első változóra való integrálás eredménye:

$$I_1 = \int dm_1|, \Theta(m_1) \cdot \delta\left(\sum_{i=2}^{N} m_i + m_1 - M\right) = \Theta\left(M - \sum_{i=2}^{N} m_i\right)$$

a következő változó szerinti integrálás is leválasztható:

$$... = \int dm_2\, dm_3 ... dm_N \left[\prod_{i=2}^{N} \Theta(m_i)\right] \cdot \Theta\left(M - \sum_{i=2}^{N} m_i\right) =$$

$$= \int dm_3 ... dm_N \left[\prod_{i=3}^{N} \Theta(m_i)\right] \cdot \int dm_2\, \Theta(m_2) \cdot \Theta\left(M - \sum_{i=3}^{N} m_i - m_2\right)$$

A második változóra való integrálás eredménye:

$$I_2 = \int dm_2\, \Theta(m_2) \cdot \Theta\left(M - \sum_{i=3}^{N} m_i - m_2\right) = \left(M - \sum_{i=3}^{N} m_i\right) \cdot \Theta\left(M - \sum_{i=3}^{N} m_i\right)$$

Általánosan felírható, hogy a $(k+1)$. változó szerinti integrál az k.-ból az alábbi rekurzió alapján képződik:

$$I_{k+1} = \int dm_{k+1}\, \Theta(m_{k+1}) \cdot I_k$$

Továbbszámolva megsejthető az explicit képlet:

$$I_k = \Theta\left(M - \sum_{i=k+1}^{N} m_i\right) \cdot \frac{1}{(k-1)!} \left(M - \sum_{i=k+1}^{N} m_i\right)^{k-1}$$

A bizonyítást teljes indukcióval végezzük:

1. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy $k = 1$-re visszakapjuk a fent kiszámított formulát (ugyanis $0! = 1$).

2. Második lépésként alkalmazzuk a rekurziót a k. elem sejtett alakjára:

$$I_{k+1} = \int dm_{k+1}\, \Theta(m_{k+1}) \cdot \Theta\left(M - \sum_{i=k+1}^{N} m_i\right) \cdot \frac{1}{(k-1)!} \left(M - \sum_{i=k+1}^{N} m_i\right)^{k-1} =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \cdot \Theta\left(M - \sum_{i=k+2}^{N} m_i\right) \cdot \int_0^{M - \sum_{i=k+2}^{N} m_i} dm_{k+1} \left(M - \sum_{i=k+2}^{N} m_i - m_{k+1}\right)^{k-1} =$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \Theta\left(M - \sum_{i=k+2}^{N} m_i\right) \cdot \left(M - \sum_{i=k+2}^{N} m_i\right)^{k}$$

Megkaptuk az explicit formula $k+1$ helyen felvett értékét, ezzel bebizonyítottuk a sejtést.
Felhasználva az explicit formulát:

$$I_{N-1} = \Theta(M - m_N) \cdot \frac{1}{(N-2)!} \cdot (M - m_N)^{N-2}$$

$$I_N = \Theta(M) \cdot \frac{1}{(N-1)!} \cdot M^{N-1} = \frac{M^{N-1}}{(N-1)!}$$

A második formula éppen a tömeg négyzetének a kifejezésében a nevezőben lévő integrál értéke, hiszen benne már az N. változó szerinti integrál is elvégzésre került.
Most számítsuk ki a számlálóban lévő integrált:

$$\int dm_1\, dm_2 ... dm_N\, m_N^2 \cdot \left[\prod_{i=1}^{N} \Theta(m_i)\right] \cdot \delta\left(\sum_{i=1}^{N} m_i - M\right) = \int dm_N\, m_N^2 \cdot \Theta(m_N) \cdot I_{N-1} = ...$$

ugyanis az $1, 2, 3, ... N-1$ változókra elvégzendő integrálok nem változnak, így (m_N-ről elhagyva az indexet):

$$... = \frac{1}{(N-2)!} \cdot \int dm\, m^2 \cdot \Theta(m) \cdot \Theta(M-m) \cdot (M-m)^{N-2} = \frac{1}{(N-2)!} \cdot \Theta(M) \cdot \int_0^M dm\, m^2 \cdot (M-m)^{N-2} =$$

$$= \frac{1}{(N-2)!} \cdot \int_0^M dm\, m^2 \cdot (M-m)^{N-2} = \frac{1}{(N-2)!} \cdot \int_0^M \left[(M-m)^2 - 2M\,(M-m) + M^2 \right] \cdot (M-m)^{N-2} =$$

$$= \frac{1}{(N-2)!} \cdot M^{N+1} \left[\frac{1}{N+1} - \frac{2}{N} + \frac{1}{N-1} \right] = \frac{M^{N+1}}{(N-2)!} \cdot \frac{2}{(N+1)\,N\,(N-1)}$$

Összegezve az eredményeket:

$$\left\langle m_N^2 \right\rangle = \frac{\frac{M^{N+1}}{(N-2)!} \cdot \frac{2}{(N+1)N(N-1)}}{\frac{M^{N-1}}{(N-1)!}} = 2M^2 \cdot \frac{(N-1)!}{(N+1)!} = \frac{2M^2}{(N+1)\,N}$$

Így pedig a gyémántdarabok várható összértéke (ahol előzetes megállapodás szerint M^2 jelöli az eredeti gyémánt értékét):

$$N \cdot \left\langle m_N^2 \right\rangle = \frac{2M^2}{(N+1)}$$

A mikrokanonikus eloszlással analóg a feladat, ha a gyémánt össztömegét a zárt rendszer teljes energiájával, az egyes darabokat a rendszert alkotó részecskékkel azonosítjuk. Ebben az esetben a feladat végeredménye éppen az egyes részecskék energia-eloszlásának második momentumát adja, ami a fluktuációk kiszámítása szempontjából fontos.

5.Feladat

Egydimenziós, klasszikus

Az egydimenziós klasszikus harmonikus oszcillátor Hamilton-függvénye:

$$\mathcal{H}(p,x) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

A kiszámítandó fázistérfogat:

$$\Omega\,(E) = \int dx \int dp\, \Theta(E - \mathcal{H}(p,x))$$

Ez éppen egy ellipszis területe, így kiszámítható a tengelyeinek a hosszából:

$$x_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \qquad p_{max} = \sqrt{2Em}$$

$$\Omega\,(E) = \pi \cdot p_{max} \cdot x_{max} = 2\pi \frac{E}{\omega}$$

Egydimenziós, kvantumos

Energiasajátállapotai:

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Azon állapotok száma, amelyeknek adott E-nél kisebb energiájuk van: $n_{max} + 1$.

$$\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \le E \;\Rightarrow\; n \le \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; n_{max} = \left\lfloor \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

így az állapotok száma:

$$\Omega_q\,(E) = \left\lfloor \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{\Omega\,(E)}{h} - \frac{1}{2} \right\rfloor + 1 \approx \frac{\Omega\,(E)}{h}$$

N-dimenziós, klasszikus

A Hamilton-függvény:

$$\mathcal{H}(\mathbf{p},\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{2m} p_i^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x_i^2 \right]$$

Az E-nél kisebb energiájú állapotok egy $2N$ dimenziós ellipszoidban foglalnak helyet, aminek térfogatát a tengelyeinek hosszából ki lehet számítani:

$$(p_i)_{max} = \sqrt{2mE} \qquad (x_i)_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$$

$$\Omega(E) = \int dx_1\, dx_2 ... dx_N \int dp_1\, dp_2 ... dp_N\, \Theta(E - \mathcal{H}(\mathbf{p},\mathbf{x})) =$$

$$= v_{2N}(1) \cdot \prod_{i=1}^{N} (p_i)_{max} \cdot (x_i)_{max} = v_{2N}(1) \cdot \left(\frac{2E}{\omega}\right)^N = \frac{\pi^N}{N!} \cdot \left(\frac{2E}{\omega}\right)^N$$

ahol $v_{2N}(1)$ a $2N$ dimenziós egység sugarú gömb térfogatát jelöli.

N-dimenziós, kvantumos

Energia sajátállapotok:

$$E_{n_1,n_2,...,n_N} = \hbar\omega \left[\sum_{i=1}^{N} n_i + \frac{1}{2} N \right] \qquad n_i = 0, 1, 2, ...$$

E energia alatt vannak mindazon állapotok, amikre:

$$\sum_{i=1}^{N} n_i \leq \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} N$$

Azaz $\sum_{i=1}^{N} n_i$ felvehet 0,1,2,...stb. értékeket egészen $\left\lfloor \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}N \right\rfloor$-ig. Kiszámítjuk, hogy N oszcillátor között, hányféleképpen lehet legfeljebb $\left\lfloor \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}N \right\rfloor$ db megkülönböztethetetlen energiaadagot szétosztani: Képzeletben egymás után téve az oszcillátorokat és az energiaadagokat egy $N + \left\lfloor \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}N \right\rfloor$ absztrakt elemből álló sorozatot kapunk. Minden lehetséges sorozat egy-egy szétosztást jelent, oly módon, hogy egy oszcillátorhoz az őt követő energiaadagok tartoznak (a sorozat elején lévő energiaadagok pedig nem tartoznak egyik oszcillátorhoz sem). Az így felépíthető sorozatok száma éppen a lehetséges állapotok száma:

$$\Omega_q(E) = \binom{N + \left\lfloor \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}N \right\rfloor}{N} = \frac{\left(N + \left\lfloor \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}N \right\rfloor\right)!}{N! \cdot \left\lfloor \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}N \right\rfloor !}$$

Nagy E-re a klasszikus oszcillátorok rendszerének fázistérfogatával kifejezve:

$$\Omega_q(E) \approx \frac{\left(\frac{E}{\hbar\omega}\right)^{\left\lfloor \frac{E}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}N \right\rfloor}}{N! \cdot \left(\frac{E}{\hbar\omega}\right)^{\left\lfloor \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}N \right\rfloor}} = \frac{1}{N!} \cdot \left(\frac{E}{\hbar\omega}\right)^N = \frac{\Omega(E)}{h^N}$$