Statisztikus fizika 1. házi feladat

Kómár Péter (KOPNAAT.ELTE)

2007. 02. 17.

1. Feladat

3 kockával dobunk egyszerre, a mutatott értékeik valószínűségi változói: u_1, u_2, u_3, melyek felvehetnek 1,2,3,4,5,6 értékeket. Így a teljes eseménytér $\Omega = \{(u_1, u_2, u_3| \; u_i = 1,2,3,4,5,6\}$, ami $6^3 = 216$ db elemi eseményből áll; az egyenlő okok elve alapján mindegyik bekövetkezési valószínűsége $\frac{1}{216}$. Jelölje a dobott számok összegéhez tartozó valószínűségi változót u. Annak a valószínűsége, hogy u nagyobb vagy egyenlő mint 6:

$$P(u \leq 6) = P(u = 3) + P(u = 4) + P(u = 5) + P(u = 6)$$

Felhasználtuk, hogy független eseményekről van szó. A különböző összegekhez tartozó valószínűségek az eseménytér oda tartozó elemi eseményeinek leszámolásával kaphatók meg:

$$\begin{aligned}
P(u=3) &= P(\{1,1,1\}) = \frac{1}{216} \\
P(u=4) &= P(\{2,1,1\} \cup \{1,2,1\} \cup \{1,1,2\}) = \frac{3}{216} \\
P(u=5) &= P(\{3,1,1\} \cup \{1,3,1\} \cup \{1,1,3\} \cup \{2,2,1\} \cup \{2,1,2\} \cup \{1,2,2\}) = \frac{6}{216} \\
P(u=6) &= P(\{4,1,1\} \cup \{1,4,1\} \cup \{1,1,4\} \cup \\
&\cup \{3,2,1\} \cup \{3,1,2\} \cup \{1,3,2\} \cup \{1,2,3\} \cup \{2,1,3\} \cup \{2,3,1\} \cup \{2,2,2\}) = \frac{10}{216}
\end{aligned}$$

Így a kérdéses valószínűség: $P(u \leq 6) = \frac{20}{216} = \frac{5}{54}$.

2. Feladat

A tökéletesen rugalmasan pattogó labda periodikus mozgást végez $z \in [0, h]$ intervallumban. Sok fénykép készítése után z empirikus eloszlásfüggvénye egy elméleti eloszlásfüggvényhez tart, ami úgy határozható meg, ha meggondoljuk, hogy adott z és $z + dz$ között a labda egy fél periódus alatt mennyi dt időt tölt:

$$dt(z) = \frac{dt}{dz}(z) \cdot dz = \frac{1}{v(z)} \cdot dz$$

A sűrűségfüggvény innen a T félperiódusidővel kifejezve:

$$\rho(z) \cdot dz = \frac{dt}{T} = \frac{1}{v(z) \cdot T} \cdot dz$$

Az energiamegmaradás felhasználásával:

$$v(z) = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot mg(h-z)} = \sqrt{2g(h-z)}$$

A periódusidő fele pedig a sebesség maximális értékéből és a gyorsulásból számítható a legkönnyebben:

$$T = \frac{\sqrt{2gh}}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Így a sűrűségfüggvény:

$$\rho(z) = \frac{1}{v(z) \cdot T} = \frac{1}{\sqrt{4h(h-z)}}$$

Melyből a várható érték:

$$\overline{z} = \int_0^h \rho(z) \cdot z \, dz = \int_0^h \frac{z}{\sqrt{4h(h-z)}} \, dz = \frac{1}{2\sqrt{h}} \int_0^h \frac{h-(h-z)}{\sqrt{h-z}} \, dz$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{h}} \left[\int_0^h \frac{h}{\sqrt{h-z}} \, dz - \int_0^h \frac{h-z}{\sqrt{h-z}} \, dz \right] = \frac{1}{2\sqrt{h}} \left[2h^{1/2} - \frac{2}{3} h^{3/2} \right] = \frac{2}{3} h$$

A fényképekről leolvasható magasságok $\frac{1}{N} \sum z_i$ átlaga közelít a $\overline{z}$ várható értékhez, ami pedig éppen kétharmada a h pattogási magasságnak.

3. Feladat

A szükséges mérési pontosság meghatározásához ki kell számítani a két modell eloszlásfüggvényéhez tartozó $K := \frac{\sqrt{\overline{x^4}}}{\overline{x^2}}$mennyiséget:

Brown-mozgás:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N \ell^2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2N\ell^2}} =: \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \cdot e^{-\lambda x^2}$$

$$\overline{x^2} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = \frac{1}{2\lambda}$$

$$\overline{x^4} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^2 \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = \frac{3}{4\lambda^2}$$

Így: $K_{Brown} = \sqrt{3}$.

Molekuláris motorok:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{4N\ell^2}} \cdot e^{-\frac{|x|}{\sqrt{N\ell^2}}} =: \frac{\lambda}{2} \cdot e^{-\lambda |x|}$$

$$\overline{x^2} = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\lambda|x|} dx = \frac{\lambda}{2} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda|x|} dx = \frac{\lambda}{2} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^2 \frac{2}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\overline{x^4} = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot e^{-\lambda|x|} dx = \frac{\lambda}{2} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^4 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda|x|} dx = \frac{\lambda}{2} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^4 \frac{2}{\lambda} = \frac{24}{\lambda^4}$$

Így: $K_{MM} = \sqrt{6}$. Ha tehát különbséget akarunk tenni a két elmélet között, akkor a mérési hiba legfeljebb a K_{MM}és a K_{Brown} különbségének a felel lehet, azaz: $\Delta K \leq \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{2} \approx 0.359$.

4. Feladat

A közvélemény kutatás során egyetlen ember válaszának megfelelő I valószínűségi változó két értéket vehet fel: p valószínűséggel $A \to 1$ és $(1-p)$ valószínűséggel $B \to 0$. Ennek várható értéke: $\overline{I} = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$, szórásnégyzete pedig: $\sigma_I^2 = p \cdot (1-p)^2 + (1-p) \cdot (0-p)^2 = p \cdot (1-p)$.

Ha N db ilyen I_i valószínűségi változót átlagolunk, akkor az így kapott u valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete a nagy számok törvénye szerint:

$$u = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} I_i \,, \qquad \overline{u} = \overline{I} \,, \qquad \sigma_u^2 = \frac{\sigma_I^2}{N}$$

Mivel σ_I maximális értéke 0.5 ($p \in [0,1]$), ezért σ_u felülbecsülhető:

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{\sigma_I^2}{N}} \leq \frac{1}{2\sqrt{N}} < \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$N = 1000$ megkérdezett ember esetén ez a korlát 0.0316, ami közelítőleg 3%.

$N = 10000$ ember esetén pedig 0.01, ami 1%.

Megjegyzés: A hiba %-os kifejezése nem a relatívságára utal, hiszen abszolút szórásról van szó, hanem csupán annak a következménye, hogy maga a várható érték is %-os formában van megadva, hiszen "46%" $\equiv$ "$u = 0.46$".

5. Feladat

A bank marginálisan működik, tehát a profit eloszlását megadó Gauss-eloszlás várható értéke 0, szórásának meghatározása abból az információból tehető meg, hogy -100 millió Ft alatt átlagosan csak minden 100. napon van a profit, azaz (x változó millió Ft-os egységekben jelenti a profitot):

$$\frac{1}{100} = \int_{-\infty}^{-100} P(x)dx = \int_{-\infty}^{-100} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{-\frac{100}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \Phi\left(-\frac{100}{\sigma}\right)$$

Φtáblázatból visszakeresve vagy Z táblázat használatával:$-\frac{100}{\sigma} \approx -2.33 \;\Rightarrow\; \sigma \approx 42.9$.

Azokon a napokon, amikor -100 millió Ft alatt van a profit, a várható értéke a feltételes valószínűséggel való súlyozásból kapható meg:

$$\overline{Profit} = \int_{-\infty}^{-100} x \cdot \left(\frac{P(x)}{\int_{-\infty}^{-100} P(x)dx} \right) dx = \frac{\int_{-\infty}^{-100} x \cdot P(x)dx}{\int_{-\infty}^{-100} P(x)dx} = 100 \cdot \int_{-\infty}^{-100} x \cdot P(x)dx$$

$$= \frac{100}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{-100} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{100}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \left[-\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right]_{-\infty}^{-100} = -\frac{100}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sigma \cdot e^{-\frac{100^2}{2\sigma^2}} \approx -113$$

A profit várható értéke azokon a napokon, amikor -100 millió Ft alatt van tehát kb. -113 millió Ft ,azaz a veszteség várható értéke 113 millió Ft.