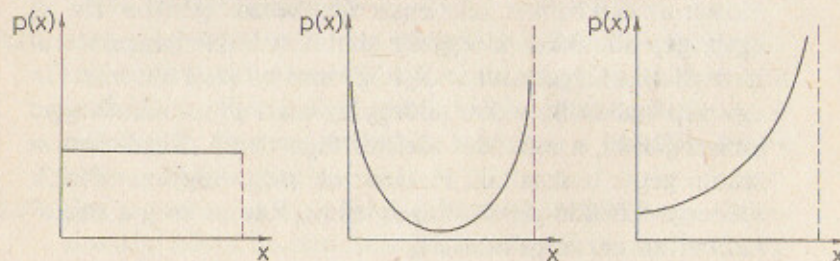


## 11. Bevezető feladatok. Alapfogalmak

- 11.1. Legyen egy  $V$  térfogatú tartályban  $N$  darab nem kölcsönható gázmolekula.
- Mi a valószínűsége annak, hogy egy kiszemelt  $\Delta V$  térfogatban  $n$  molekula tartózkodik? Vizsgáljuk a  $V \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$ ,  $\rho = N/V = \text{konst.}$  határátmenetet!
  - Számítsuk ki a  $\Delta V$  térfogatban tartózkodó molekulák átlagos számát, valamint a molekulaszám szórását!
- 11.2. Pattogó labdáról véletlenszerű időpontokban pillanatfelvételeket készítünk. Ezekről leolvashatjuk a labda pillanatnyi magasságát. Becsüljük meg a pattogás magasságát és adjuk meg a becslés pontosságát! (A pattogások egyforma magasak, az energiavesztés elhanyagolható.)
- 11.3. Mozgó, pontszerű objektumokról véletlenszerűen pillanatfelvételeket készítettünk. Annak a valószínűsége, hogy az objektum  $x$  és  $x+dx$  között tartózkodik,  $p(x)dx$ . Elég sok felvétel alapján meghatároztuk a  $p(x)$  függvényt. Az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ábrákon ezt ábrázoltuk három különböző esetben. Próbáljuk meg kitalálni, hogy milyen mozgást végző testekről van szó!



- 11.4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy rendszer felosztható olyan azonos részrendszerekre, amelyek közt nincs kölcsönhatás, és ha egy fizikai mennyiség egyenlő a részrendszereken felvett értékek

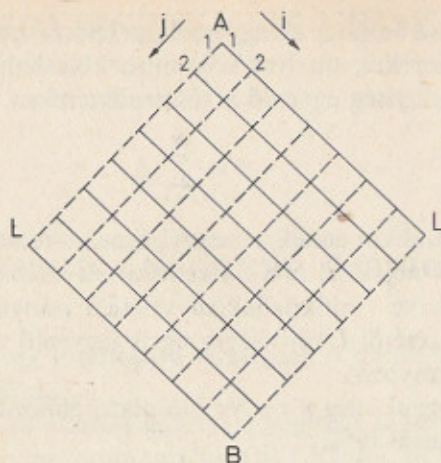
$$f = \sum_{i=1}^N f_i$$

összegével, akkor ennek a mennyiségnek a relatív szórása arányos  $1/\sqrt{N}$ -nel, ahol  $N$  a részrendszerek száma.

- 11.5. Egy részecske  $\tau$  időközönként véletlen irányú erő hatására előző helyzetétől  $L$  távolságra ugrik (egyenlő valószínűséggel minden irányban).
- Határozzuk meg a  $t = N\tau$  idő alatti elmozdulás négyzetének átlagát ( $\bar{x}^2$ ).
  - Függ-e az eredmény attól, hogy hány dimenziós térben vizsgáljuk a problémát?
  - Kísérletekben a háromdimenziós mozgás kétdimenziós vetületét figyeljük meg. Mennyiben különbözik a megfigyelt  $\bar{x}^2$  az a) pontban számítottaktól?
  - Tegyük fel, hogy egy ugrás nagysága 0 és  $L$  között akármilyen értéket felvehet (minden értéket egyenlő valószínűséggel, függetlenül az ugrás irányától). Számítsuk ki az  $\bar{x}^2$  átlagot!
- 11.6. Vizsgáljuk a bolyongásproblémát kétdimenziós négyzetrácson! Legyen a bolyongó részecskének „tehetetlensége”, azaz ha az előző lépésben valamilyen irányban lépett, akkor a következő lépésben nagyobb valószínűséggel fog ugyanabba az irányba lépni, mint arra merőlegesen vagy visszafelé. Számítsuk ki az elmozdulás négyzetének átlagát  $N$  lépés után, ha az ugyanolyan irányba lépés valószínűsége  $\alpha$ , a visszafelé lépés valószínűsége  $\beta$ , s az előző lépésre merőleges elmozdulás valószínűsége  $\gamma$  ( $\alpha + \beta + 2\gamma = 1$ )!
- 11.7. Véletlen rendszerekben kialakuló végtelen korrelációkkal kapcsolatosak az ún. *perkolációs problémák*. Amorf anyagok vezetőkéességét, falak nedvesedését stb. leíró fizikai modellek egyszerűsítéséből született az alábbi feladat.

Az  $L \times L$  rácspontot tartalmazó négyzetrácson a szomszéd-





dos rácspontok az  $i$  irányban összekötöttek. A  $j$  irányban viszont csak  $p$  valószínűséggel van meg az összeköttetés. Az  $A$  pontból kiindulva egy golyó gurul lefelé az összekötött rácspontok mentén. Ha a golyó olyan rácsponthoz ér, amely összeköttetésben áll mind az  $i$ , mind pedig a  $j$  irányban levő szomszédjával, akkor  $1/2$  valószínűséggel lép az  $i$ , ill. a  $j$  irányba.

Számítsuk ki a  $B$  pontba való eljutás valószínűségét! Milyen  $p \geq p_c$  értékek esetén jutunk el a  $B$  pontba véges valószínűséggel akkor is, ha  $L \rightarrow \infty$ ?

- 11.8.  $m$  tömegű részecske  $V$  térfogatú dobozban mozog. Hány olyan állapota van a részecskének, melyben impulzusa a  $\mathbf{p}$  érték körüli  $d^3\mathbf{p}$  térfogatba esik, s hány olyan, melyben az impulzus nagysága  $p$  és  $p+dp$  közötti? Határozzuk meg az  $E$  és  $E+dE$  közötti energiaértékkel jellemzett állapotok számát is!
- 11.9. Hasonlítsuk össze az  $E$ -nél kisebb energiájú állapotok számát klasszikus, illetve kvantumos rendszerek esetén!
- Egydimenziós klasszikus és kvantumoszcillátor!
  - Egydimenziós „dobozba” zárt klasszikus részecske, kvantumos részecske, ill. kvantumos részecske periodikus határfeltétellel!

- 11.10. Legyen  $N$  független részecskéből álló rendszerünk. Minden részecske két energiaértéket vehet fel, ezek  $-\varepsilon_0$  és  $+\varepsilon_0$ .

- Állapítsuk meg az  $E = M\varepsilon_0$  ( $M = -N, \dots, N$ ) energiájú mikroállapotok számát! Vizsgáljuk meg a rendszer termodinamikai viselkedését (betöltési szám, hőkapacitás)!
- Milyen különbségeket találunk az  $E > 0$  és az  $E < 0$  energiájú állapotok között?

- 11.11.  $N$  független kvantumoszcillátorból álló rendszer energiája

$$E = \frac{1}{2} N\hbar\omega + M\hbar\omega.$$

- Határozzuk meg, hányféleképpen jöhet létre ez az állapot!
- Számítsuk ki a rendszer hőkapacitását!

- 11.12. Valamely makroszkopikus rendszer hőkapacitása

$$C_v = AkT^n,$$

ahol  $n > 0$  és  $A$  pozitív szám, mely a rendszer térfogatával vagy részecskeszámával arányos. Hogyan függ az állapotszám a belső energiától rögzített térfogat és részecskeszám mellett? Milyen rendszert írhat le az  $n=3$  eset? Vizsgáljuk az  $n \rightarrow 0$  esetet is!

- 11.13. Az ismert elemi részek tömegeiből arra következtethetünk, hogy a hadronok állapotszáma az energiának rendkívül gyorsan növekvő függvénye. Kísérleti eredményekből a hadronanyag állapotszámára a következő kifejezés adódik:

$$\Omega(E) \sim E^{\alpha N} e^{E/kT}, \quad (E \geq 0),$$

ahol  $N$  a hadronok száma,  $\alpha$  egységnyi nagyságrendű szám és  $T^* \sim 10^{12}$  K. Mi a  $T^*$  jelentése?

- 11.14. Számítsuk ki  $N$  független klasszikus oszcillátorból álló rendszer entrópiáját, energiáját és hőkapacitását!
- 11.15. Valamely rendszer állapotösszege  $Z(T) = A(kT)^{\alpha N}$ , ahol  $A$  és  $\alpha$  állandók. Határozzuk meg az állapotsűrűséget! Milyen rendszerről lehet szó?
- 11.16. Legyen  $N$  független részecskéből álló rendszerünk. Minden részecske két energiaértéket vehet fel ( $\varepsilon_0, 0$ ). A felső energiaszint



kétszeresen degenerált. Számítsuk ki a rendszer hőkapacitását!

- 11.17. A kétdimenziós harmonikus oszcillátor energiaspektruma a következő alakban írható:  $E_n = (n+1)\hbar\omega$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , és az  $n$ -edik energiaszint  $(n+1)$ -szeresen degenerált. Határozzuk meg egy  $N$  számú kétdimenziós harmonikus oszcillátorból álló rendszer hőkapacitását!
- 11.18. Legyen  $B$  erősségű mágneses térben  $N$  számú független,  $1/2$  spinnel rendelkező részecske. Legyen az egész rendszer egy  $T$  hőmérsékletű hőtartályban. Vizsgáljuk a rendszer energiáját, entrópiáját, hőkapacitását, mágnesezettségét, szuszeptibilitását  $T$  és  $B$  függvényeként!
- 11.19. Határozzuk meg az előző feladatban leírt rendszerben a mágnesezettség négyzetének átlagát, valamint a mágnesezettség szórását!
- 11.20. Vizsgáljuk az  $I$  tehetetlenségi nyomatékú,  $d$  dipólnyomatékú klasszikus rotátort  $T$  hőmérsékletű környezetben,  $E$  elektromos erőter jelenlétében! Milyen valószínűséggel mutat a rotátor a tér adott irányának kis környezetébe?
- 11.21. Hasonlítsuk össze az  $I$  tehetetlenségi nyomatékú klasszikus és kvantumrotátor hőkapacitását alacsony, illetve magas hőmérsékleten!
- 11.22. Lokalizált,  $d$  dipólnyomatékkal rendelkező klasszikus dipólokat külső  $E$  elektromos térbe helyezünk. A dipólok függetlenek, számuk  $N$ , a környezet hőmérséklete  $T$ . Határozzuk meg az átlagos polarizációt  $P(T, E)$  függvényét és a szuszeptibilitást!
- 11.23. Az előző feladatban szereplő rendszert állandó és homogén  $E$  térerősségű elektromos térbe helyezzük. Határozzuk meg az  $E$  irányára mérőleges irányban mérhető szuszeptibilitást  $E$  függvényében!
- 11.24. Lokalizált,  $J$  spinű ionok rendszerét külső  $B$  mágneses térbe helyezzük. Az ionok száma  $N$ , egymás közötti kölcsönhatásokat elhanyagoljuk. Egy ion mágneses momentumának adott irányú  $\mu m_J$  komponense csak a  $-\mu J$ ,  $-\mu(J-1)$ ,  $\dots$ ,  $\mu(J-1)$ ,  $\mu J$  értékeket veheti fel.

a) Mutassuk meg, hogy az eredő mágnesezettség:

$$M = -\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_T$$

b) Adjuk meg az  $M(T, B)$  függvényt!

c) Számítsuk ki a

$$\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_{B=0}$$

szuszeptibilitást!

d) Mutassuk meg, hogy a  $J \rightarrow \infty$ ,  $\mu J = \mu_0$  határesetben visszakapjuk a klasszikus spinekre vonatkozó eredményeket!

11.25. Határozzuk meg a  $v(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \alpha x^4$  anharmonikus potenciálban egydimenziós mozgást végző részecskékből álló rendszer hőkapacitását  $\alpha$ -ban vezető rendig!

11.26.  $N$  darab független lineáris oszcillátort vizsgálunk. Az oszcillátorok frekvenciája különböző.  $g(\omega)d\omega$  megadja, hogy hány olyan oszcillátor van, amelynek frekvenciája  $\omega$  és  $\omega + d\omega$  közé esik.  $\left(\text{Nyilván } \int_0^\infty g(\omega)d\omega = N.\right)$

a) Számítsuk ki, hogyan függ a rendszer belső energiája és hőkapacitása a hőmérséklettől!

b) Tegyük fel, hogy  $\omega \rightarrow 0$  esetén  $g(\omega)$  úgy viselkedik, mint  $\omega^\gamma$  ( $\gamma > 0$ ), és vizsgáljuk a magas- és alacsony hőmérsékleti határesetet!

c) Mutassuk meg, hogy

$$\int_0^\infty [C(\infty) - C(T)] dT = E(T=0)!$$

11.27. Oszcillátorokból álló  $T$  hőmérsékletű rendszerben az oszcillátorok átlagenergiája:

$$E = \frac{\sum_n \varepsilon_n e^{-\varepsilon_n/kT}}{\sum_n \exp(-\varepsilon_n/kT)},$$

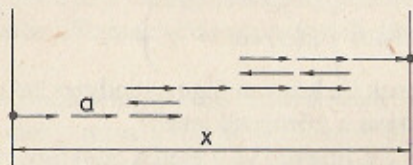


ahol  $\varepsilon_n = n\varepsilon_0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). A klasszikus határátmenet esetén ( $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ ) megkapjuk-e a klasszikus statisztikus fizikából jól ismert eredményt? Mekkora  $\bar{\varepsilon}$  a klasszikus határesetben, ha  $\varepsilon_n = n^2\varepsilon_0$  és a nívó multiplicitása  $g_n = n^2g_0$ ?

11.28. Leejtettünk egy  $M$  tömegű gyémántot, ami  $N$  darabra törött szét. Várhatóan mekkora lesz a gyémántdarabok összértéke, ha egy gyémántdarab értéke tömegének négyzetével arányos és bármilyen  $N$  darabra törés egyenlően valószínű? Magyarázzuk meg a probléma kapcsolatát a mikrokanonikus eloszlással!

11.29. Oldjuk meg az előző „gyémántos” feladatot kanonikus eloszlással!

11.30. Legyen egy lineáris láncunk, amely  $N$  darab  $a$  hosszúságú elemből áll. Ezek az elemek szabadon foroghatnak a kapcsolódási helyeken. Az egész rendszer  $T$  hőmérsékletű hőtartályban van. Vizsgáljuk meg, hogy mekkora erő szükséges ahhoz, hogy a lánc két végpontját  $x$  távolságra tartsuk egymástól! Mutassuk meg, hogy ha  $x \ll Na$ , akkor az erő arányos a végpontok távolságával, azaz érvényes a Hook-törvény!



11.31. A háromdimenziós láncmolekula egyszerű modellje a következő: A lánc  $N$  egyforma,  $a$  hosszúságú egységből áll, melyek úgy kapcsolódnak egymáshoz, hogy az összekötő csuklók körül szabadon foroghatnak. Határozzuk meg a lánc végpontjai közötti átlagos távolságot, ha a lánc két végén  $F_x$  nagyságú feszítő erő hat!

11.32. Határozzuk meg az előző feladatban leírt polimer molekula átlagos négyzetes végtávolságát, feszítő erő nélküli esetben!

11.33. Határozzuk meg a 11.31. feladatban leírt polimer molekulát feszítő  $F_x$  erő irányába eső átlagos négyzetes végtávolságot, valamint a teljes négyzetes végtávolságot!

11.34. A polimerlánc valamivel realisabb modelljéhez jutunk, ha figyelembe vesszük, hogy a rögzített vegyiértékszőgek következményeként minden egyes elem egy 3 félnyílásszögű kúp felületén mozoghat, melynek tengelye az előző elem. Határozzuk meg ezen lánc átlagos négyzetes végtávolságát!

11.35. Számítsuk ki  $x^2$  és  $p^2$  várható értékét a  $T$  hőmérsékletű hőtartállyal kapcsolatban álló lineáris oszcillátor esetén mind klasszikus, mind kvantumos tárgyalásban! Hasonlítsuk össze a klasszikus és a kvantumos eredményt! Összhangban van-e az eredmény a határozatlansági relációval?

11.36. Vizsgáljuk meg, hogyan írhatjuk le a polarizált, ill. a polarizálatlan fényt sűrűségmátrix segítségével! Mutassuk meg, hogy tiszta állapotban

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & e^{-i\beta} \sin \alpha \cos \alpha \\ e^{i\beta} \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}$$

ahol  $\alpha$  és  $\beta$  a polarizáltságot jellemző paraméterek!

11.37. Mutassuk meg, hogy az  $1/2$  spinű részecskét leíró sűrűségmátrix

$$\frac{1}{2}(I + P_1\sigma_1 + P_2\sigma_2 + P_3\sigma_3) = \frac{1}{2}(I + \mathbf{P}\boldsymbol{\sigma})$$

alakú, ahol  $I$  az egységmátrix,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  pedig a három Pauli-mátrix. Vizsgáljuk meg, hogy mi a  $P_1, P_2, P_3$  paraméter fizikai jelentése! Milyen feltételt kell kielégítenie  $\mathbf{P}$ -nek tiszta állapotban?

11.38. Írjuk fel  $1/2$  spinű részecske sűrűségmátrixát mágneses térben! Számítsuk ki segítségével a mágnesezettség várható értékét!

11.39. Egy kristályban az atomoknak két energia-sajátállapota van:  $|+\rangle$  és  $|-\rangle$ , melynek energiái  $E_+ = \Delta/2$ ,  $E_- = -\Delta/2$ . Az atom mágnesező momentumának ( $z$ -komponens) mátrixelemei:

$$\begin{aligned} \langle -|M_z|-\rangle &= \langle +|M_z|+\rangle = 0, \quad \langle +|M_z|-\rangle = \\ &= \langle -|M_z|+\rangle = m. \end{aligned}$$

Határozzuk meg adott hőmérsékleten és  $B$  mágneses térben a mágnesezettség várható értékét és a szuszceptibilitást!



- 11.40. a) Határozzuk meg  $T$  hőmérsékletű környezetben az  $m$  tömegű részecske sűrűségmátrixát koordináta-reprezentációban, feltételezve, hogy a részecske hullámfüggvénye a  $V$  térfogatú makroszkopikus dobozban periodikus határfeltételnek tesz eleget.
- b) A sűrűségmátrix ismeretében számítsuk ki az állapotösszeget és az energia átlagértékét!
- c) Adjuk meg a sűrűségmátrixot, impulzus-reprezentációban is!

## 12. Klasszikus ideális gázok

- 12.1. Az entrópia meghatározása:  $S(E, V, N) = k \ln \Omega(E, V, N, \delta E)$ , ahol  $E, V, N$  a rendszer energiája, térfogata és a rendszerben levő részecskék száma,  $\Omega$  az állapotok száma, és  $k$  a Boltzmann-állandó.

A fenti formula helyett rendszerint a következőt írjuk:

$$S(E, V, N) = k \ln \Omega_0(E, V, N),$$

vagyis az  $E$  energiájú hiperfelület körüli réteg térfogatát felváltjuk a hiperfelület által határolt térfogattal. Miért tehetjük ezt meg? Vizsgáljuk konkrétan a klasszikus ideális gáz esetét!

- 12.2. Számítsuk ki a klasszikus ideális gáz termodinamikai potenciáljait a különböző sokaságokban! (Mikrokanonikus, kanonikus, nagykanonikus, és  $T$ - $p$  sokaság.)
- 12.3. Határozzuk meg a klasszikus ideális gáz kémiai potenciálját mint  $T$  és  $\rho$ , illetve  $T$  és  $p$  függvényét!
- 12.4. Mutassuk meg, hogy a klasszikus ideális gáz kémiai potenciálja légköri nyomáson mindig negatív abban a hőmérséklettartományban, amelyben a gázok még nem cseppfolyósodnak!
- 12.5. Számítsuk ki klasszikus ideális gázban
- $|v|^n$  középértékét,
  - $|v|$  négyzetes szórását,
  - a kinetikus energia középértékét és négyzetes szórását!

- 12.6. Mekkora a molekulák legvalószínűbb és átlagos sebessége, sebességük szórása és mozgási energiájuk 800 K és 1000 K hőmérsékleten CO-gázban?
- 12.7. Írjuk fel egy atom kinetikus energiájának eloszlásfüggvényét  $T$  hőmérsékleten! Miért lapos az eloszlásfüggvény? Nem kellene éles csúcsnak lennie az átlagértéknél az energiaeloszlásfüggvényben?
- 12.8. Határozzuk meg az  $N$  részecskéből álló, klasszikus ideális gáz energiájának eloszlásfüggvényét  $T$  hőmérsékleten! Megegyezik-e az energia legvalószínűbb értéke az átlagossal?
- 12.9. Ideális gázt  $M$  tömegű dugattyú zár le. Határozzuk meg a gáz állapotegyenletét!
- 12.10. Ideálisnak tekintett gáz atomjai egy felület  $B$  számú helyén adszorbeálhatnak. Egy adszorbeált atom energiája  $-u_0$ , az adszorbeált atomok között kölcsönhatás nincs. Állapítsunk meg összefüggést az adszorbeált atomok száma és a gáz nyomása között!
- 12.11. Bizonyítsuk be, hogy ha az ideális klasszikus gáz molekuláinak belső szabadsági foka is van, akkor attól az állapotegyenlet még nem változik!
- 12.12. A He-atom szinglett alapállapotának és triplett első gerjesztett állapotának energiakülönbsége 15984300/m. A gáz hányad része van gerjesztve 6000 K fokon?
- 12.13. Határozzuk meg az egyatomos klasszikus ideális gáz szabadenergiáját, figyelembe véve az atomok első gerjesztett állapotát is! Az első gerjesztett állapot  $g_1$ -szeresen degenerált, gerjesztési energiája  $\epsilon_1$ . Milyen hőmérsékleten lenne jelentős a fajhőhöz, ill. a kémiai potenciálhoz adódó járulék?
- 12.14. Igazoljuk, hogy  $x_i \frac{\partial H}{\partial x_j} = kT \delta_{ij}$  (itt  $x_i$  a rendszer valamely általános koordinátája vagy impulzusa,  $H$  a Hamilton-függvénye, és  $\delta_{ij}$  a Kronecker-féle deltafüggvény)!
- 12.15. Számítsuk ki a következő rendszerek fajhőjét magas hőmérsékleten:
- kétagatomos molekulákból álló gáz;
  - háromatomos, lineáris molekulákból álló gáz;



c) kétatomos molekulákból álló gáz, amelynek rezgéseit a

$$H = \frac{p^2}{2m} + ax^4 \text{ anharmonikus oszcillátor írja le!}$$

- 12.16. Bebizonyíthatjuk-e fajhőmérés alapján, hogy a  $\text{H}_2\text{O}$ -molekula nem lineáris?
- 12.17. Hogyan módosul a kinetikus energiára vonatkozó ekvipartíciótétel a relativisztikus tartományban?
- 12.18. Határozzuk meg az ultrarelativisztikus ideális gáz állapotegyenletét, energiáját és hőkapacitását! (Az ultrarelativisztikus gázban egy részecske energiája  $\varepsilon = cp$ , ahol  $p$  az impulzus nagysága.)
- 12.19. Számítsuk ki az ideális gáz sűrűségeloszlását, belső energiáját és hőkapacitását homogén gravitációs térben, állandó hőmérsékleten! Fejezzük ki a belső energiát a súlypont koordinátáinak segítségével!
- 12.20. Az előző feladatban leírt rendszerben a Föld felszínétől  $z$  magasságban kiválasztunk egy kis,  $V$  térfogatú tartományt, melyben  $N$  számú molekula van. Határozzuk meg, mennyivel tér el ennek a részrendszernek a kémiai potenciálja a Föld felszínén mért kémiai potenciáljától!
- 12.21. Nagy tömegű égitestről lassan felszálló rakétában legyen egy hőszigetelt doboz, amelyben ideális gáz van. Számítsuk ki, hogyan változik a gáz hőmérséklete a felszállás során!
- 12.22. Írjuk fel a Maxwell–Boltzmann-eloszlást  $R$  sugarú gömb gravitációs terében levő ideális gázra! Használhatjuk-e ebben az esetben ezt az eloszlást? Miért nem szökik el a Föld atmoszférájára?
- 12.23. Állapítsuk meg az ideális gáz sűrűségeloszlását egy  $R$  sugarú,  $l$  hosszúságú hengerben, amely  $\omega$  szögsebességgel forog!
- 12.24. Legyen egy  $\omega$  szögsebességgel forgó  $R$  sugarú,  $l$  hosszúságú hengerben ideális gáz. Számítsuk ki a rendszer tehetetlenségi nyomatékát!
- 12.25. Vizsgáljuk a jó disszociációjának koncentrációviszonyait magas hőmérsékleten!
- 12.26. Jellemezzük a  $\text{DCI} + \text{HBr} \rightleftharpoons \text{DBr} + \text{HCl}$  folyamat koncentrációviszonyát egyensúlyban, magas hőmérsékleten!

- 12.27. Határozzuk meg a  $\text{D}_2 + \text{H}_2 \rightleftharpoons 2 \text{HD}$  reakció egyensúlyi állandóját szobahőmérsékleten. A HD-molekula rezgési frekvenciája  $\omega_{\text{HD}} = 4324 \text{ K}\hbar$ .

### 13. Ideális kvantumgázok

- 13.1. a) Becsüljük meg adott tömegű molekulákból álló ideális gáz termikus, de Broglie-féle hullámhosszát és a molekulák átlagos távolságát!  
b) Ennek alapján becsüljük meg, milyen  $T$ - $p$  tartományban és milyen molekulák (atomok) esetén várható a klasszikustól eltérő viselkedés!
- 13.2. Számoljuk ki az ideális gáz  
a) állapotegyenleteinek,  
b)  $\kappa_T$ ,  $C_v$ ,  $C_p$  mennyiségeknek első kvantumkorrekcióját!
- 13.3. Becsüljük meg a részecskék átlagos távolságát, a termikus hullámhosszat és az állapotegyenlet kvantumkorrekcióját normálállapotú  $\text{H}_2$ -gáz esetében!
- 13.4. Határozzuk meg az ultrarelativisztikus ideális gáz ( $\varepsilon = cp$ ; a degeneráció foka:  $g$ ) állapotegyenleteinek első kvantumkorrekcióját!
- 13.5. Becsüljük meg az  $\varepsilon_F$  Fermi-energiát  
a) tipikus fémekben levő elektronokra;  
b) nehéz magban levő nukleonokra (a mag sugara  $R = r_0 A^{1/3}$ ,  $r_0 = 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ ,  $A$  a nukleonok száma);  
c)  $\text{He}^3$ -folyadékban (az 1. atom által elfoglalt térfogat  $46,2 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3$ ).
- 13.6. Tegyük fel, hogy az elektronok között nincs kölcsönhatás. Milyen sűrű legyen az elektrongáz ahhoz, hogy a Fermi-felületen levő elektronok sebessége a fénysebesség fele legyen?
- 13.7. Hogyan aránylik egymáshoz a proton- és elektrongáz adott sűrűségeen vett Fermi-hőmérséklete?



- 13.8. Számítsuk ki a  $T=0$  K hőmérsékletű ideális fermiongáz nyomását!
- 13.9. Mutassuk meg, hogy az ultrarelativisztikus, teljesen degenerált elektrongáz állapotegyenlete  $pV = \frac{1}{3}E$ .
- 13.10. Mutassuk meg, hogy ideális, teljesen degenerált relativisztikus Fermi-gázban

$$\frac{\varepsilon_F - mc^2}{mc^2} \ll 1$$

ha a fermionok közötti távolság  $r \gg r_0 = \frac{\hbar}{mc}$ .

- 13.11. Egy minta elektronjainak állapotsűrűsége

$$D(\varepsilon) = \begin{cases} D, & \text{ha } \varepsilon > 0 \\ 0, & \text{ha } \varepsilon < 0. \end{cases}$$

Az elektronok száma  $N$ .

- a) Számítsuk ki a kémiai potenciált és a belső energiát 0 K-on  $N$  függvényében! Ellenőrizzük, hogy az energia extenzív mennyiség-e!
- b)  $N$  és  $T$  segítségével adjuk meg annak feltételét, hogy a gáz nem degenerált!
- c) Számítsuk ki a kémiai potenciált és a fajhőt alacsony hőmérsékleten (erősen degenerált határeset)!
- 13.12. Mutassuk meg, hogy az ideális Fermi-gáz elfajulási tartománya jellemezhető a  $\mu \gtrsim 0$  feltétellel is!
- 13.13. Vizsgáljunk egy Fermi-részecskékből álló ideális gázt! Legyen egy minket érdeklő fizikai mennyiség additív, azaz

$$f = \sum_i (\varepsilon_i)^n,$$

ahol  $\varepsilon_i$  az  $i$ -edik részecske energiája. Írjuk fel  $f$  átlagának alacsonyhőmérsékleti sorfejtését!

- 13.14. Határozzuk meg az extrém relativisztikus Fermi-gáz ( $\varepsilon = cp$ ) nyomását alacsony hőmérsékleten!

- 13.15. Határozzuk meg egy olyan erősen degenerált ideális elektrongáz spin-szuszeptibilitását, amelynek az állapotsűrűsége  $D(\varepsilon)$  ( $D$  deriválható függvény,  $D(\varepsilon) = 0$ , ha  $\varepsilon < 0$ )!
- 13.16. Vizsgáljuk az előző feladatban tárgyalt szuszeptibilitást a magashőmérsékleti határesetben!
- 13.17. Állandó hőmérsékleten milyen sűrűségnél következik be kondenzáció az ideális Bose-gázban? Hogyan függ a sűrűségtől a kondenzált részecskék száma?
- 13.18. A dimenziószám szerepe igen jelentős a fázisátmenetek jellemzésekor. Ez látható már az ideális Bose-gáz esetében is. Mutassuk meg, hogy egy- és kétdimenziós ideális Bose-gázban nincs kondenzáció!
- 13.19. Hogyan változik az ideális Bose-gáz kondenzációs hőmérséklete homogén gravitációs tér hatására?
- 13.20. Becsüljük meg
- a) a legkisebb, nem zérus energiájú állapot betöltöttségét és
- b) a kémiai potenciált Bose-kondenzáció esetében, ha figyelembe vesszük, hogy a térfogat és a részecskék száma véges (nagy) érték!
- 13.21. Írjuk fel a részecskeszám eloszlását  $T=0$  hőmérsékletű ideális Bose-gázban!
- 13.22. Bizonyítsuk be, hogy ideális Bose-gázban  $T_c$  alatt  $E \sim T^{5/2}$ !
- 13.23. Hogyan változik az ideális Bose-gáz kritikus hőmérséklete, ha figyelembe vesszük a részecskék első,  $g_1$ -szeresen degenerált,  $\varepsilon_1$  energiájú gerjesztett állapotát is? Legyen

$$\varepsilon_1 \gg \varepsilon_0 = kT_c!$$

- 13.24. Hogyan változik az ideális Bose-gáz kémiai potenciálja az átalakulási pont körül?
- 13.25. Számítsuk ki az ideális Bose-gáz kompresszibilitását az átalakulási pont körül!
- 13.26. Számítsuk ki, hogyan viselkedik az ideális Bose-gáz fajhője, ill. annak hőmérséklet szerinti deriváltja  $T_c$  közelében!
- 13.27. Egy üreg hőmérséklete  $T$ . Hogyan függ az üreg falára ható nyomás a hőmérséklettől?



- 13.28. Feltéve, hogy a Föld és Nap abszolút fekete test, becsüljük meg a Nap felületi hőmérsékletét!
- 13.29. Miért nulla a fotongáz kémiai potenciálja?
- 13.30. Miért nincs a fotongázban Bose-Einstein-kondenzáció?

## 14. Fluktuációk

- 14.1. Számítsuk ki a következő mennyiségek fluktuációját:
- matematikai inga kitérése,
  - galvanométer tükrének elfordulása,
  - egy kondenzátor töltése!
- Becsüljük meg e fluktuációk nagyságát szobahőmérsékleten!
- 14.2. Mi a valószínűsége annak, hogy a  $V_0$  térfogatú dobozba zárt gáz minden részecskéje a doboz  $V$  térfogatú részében tartózkodik? Milyen valószínűséggel lesz  $V \leq V_0/2$  klasszikus ideális gázban?
- 14.3. Mi a valószínűsége annak, hogy egy rendszer térfogata a  $V$  és  $V+dV$  értékek közé esik egy  $T$  hőmérsékletű,  $p$  nyomású környezetben?
- Alkalmazzuk az eredményt klasszikus ideális gázra!
  - Milyen valószínűséggel lesz  $V = \bar{V}/2$ ?
  - Miért tér el az eredmény az előző feladatétól?
  - Milyen eloszlást kapunk a  $\bar{V}$  körüli kis eltérésekre?
- 14.4. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy  $1 \text{ cm}^3$ , ill.  $(0,1 \text{ mm})^3$  térfogat üresen maradjon egy  $3 \text{ m}$  élű kockában levő,  $300 \text{ K}$  hőmérsékletű,  $10^5 \text{ Pa}$  nyomású gázban!
- 14.5. Mekkora térfogatú tartományban lenne a klasszikus ideális gáz részecskeszám-szórása az átlagos részecskeszám 1 százaléka?
- 14.6. Számítsuk ki a részecskeszám-fluktuációt nagykanonikus sokaságban! Kapcsoljuk össze a stabilitási feltételekkel!
- 14.7. Hogyan függ a hőmérséklettől a részecskék számának fluktuációja a Van der Waals-gázban, ha a kritikus izochor ( $V = V_c$ ) mentén közeledünk a kritikus ponthoz?

- 14.8. Írjunk fel összefüggést egy  $T$  hőmérsékletű hőtartályban levő rendszer energiafluktuációi és fajhője között!
- 14.9. Mennyiben változik az előző feladat eredménye, ha a rendszer nemcsak egy  $T$  hőmérsékletű hőtartállyal, de egy  $\mu$  kémiai potenciálú részecsketartállyal is kapcsolatban van? A kapott kifejezést számítsuk ki klasszikus ideális gáz esetében!
- 14.10. a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy hőtartállyal kapcsolatban levő makroszkopikus rendszer energiája  $E$  legyen?  
 b) És annak, hogy hőmérséklete ( $T$ ) a hőtartályétól,  $T_0$ -tól különböző legyen? (Konkrét példaként számoljunk  $1 \text{ kg}$  vassal, és legyen  $T_0 = 20^\circ \text{C}$ ,  $T = 40^\circ \text{C}$ ,  $C_{\text{vas}} = 420 \text{ J}$ .)
- 14.11. Mutassuk meg, hogy ha egy rendszer Hamilton-függvénye

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \mathbf{B}\mathbf{M}$$

alakú, ahol  $\mathbf{M}$  a rendszer mágneses momentuma,  $\mathbf{B}$  a mágneses tér,  $\mathcal{H}_0$  pedig független a mágneses tértől, akkor a  $\langle (\Delta M)^2 \rangle$  fluktuáció arányos a  $\chi = \left( \frac{\partial M}{\partial B} \right)_T$  szuszceptibilitással!

- 14.12.  $N$  darab azonos kvantumoszillátorból álló rendszert vizsgálunk. Az oszcillátorok elektromos dipólmomentuma a kitérésükkel arányos. Számítsuk ki a rendszer elektromos polarizációjának fluktuációját! Érvényes-e a következő összefüggés (vö. a 14.11. feladattal):

$$\langle \Delta P_x^2 \rangle_{E=0} = kT \left( \frac{\partial P_x}{\partial E} \right)_{T, E=0},$$

ahol  $E$  az  $x$  irányba mutató külső elektromos tér?

- 14.13. Mutassuk meg, hogy makroszkopikus rendszerekben a hőmérséklet és a térfogat fluktuációjára a következő összefüggések érvényesek:

$$\overline{\Delta T \Delta V} = 0, \quad \overline{(\Delta V)^2} = -kT \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T, \quad \overline{(\Delta T)^2} = \frac{kT^2}{C_v}.$$