

Nagy szabadsági fokú rendszerekkel foglalkozik

pl: $N \sim 10^{23}$

Átállapuló rendszer $2^{10^{23}}$ féle állapot

Statisztikus fizika $\longleftrightarrow$ Termodinamika

mikroszkopikus leírás $\longleftrightarrow$ makroszkopikus

Kapcsolatot keressük a két fő törv. között.

klasszikus $\longleftrightarrow$ kvantummechanikai

pl: N db klasszikus részecske



fázistér: $6N$ dimenziós

konzervatív rendszerben $E = \text{const.}$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{mozgásegyenletet}$$

nem metszik egymást
és önmagukat sem

N db részecske időfejlődése egy trajektória, amire igaz $H(p, q) = E = \text{const} \Rightarrow$ konstans felület

Gibbs-sűrűség: vesünk sok dobort, amiben gaz van és megmérjük, hogy milyen a kezdőpontok (fázistérben) eloszlása: $g(p, q)$

Liouville tétel:

$$\text{A.U.} \quad \frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \left(\sum_i \frac{\partial g}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial g}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = 0$$

$$\text{Biz:} \quad \underline{x} = (p_i, q_i)$$

$$-\frac{d}{dt} \int d\omega g = \int d\omega \underline{v} g$$

$$\int d\omega \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \text{div}(\underline{v} g) \right) = 0$$

$\left(\frac{\partial}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial q_i} \right)$

$\hookrightarrow$ minden ω pont tartományára is lehet

integrálni

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \text{div}(\underline{v} g) = \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial p_i} (\dot{p}_i g) + \frac{\partial}{\partial q_i} (\dot{q}_i g) \right) =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial g}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) + \sum_i \left(\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} g + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} g \right) =$$

mozgásegyenletekkel

$$= \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) + \sum_i \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} \right)}_0 \mathcal{G} = 0$$

olyan mintha polynómat a trajektóriák és egy adott térfogatban mindig ugyanannyi van

$$\int d\omega \mathcal{G} = \int d\omega' \mathcal{G}'$$

$$\frac{d\mathcal{G}}{dt} = 0 = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \{H, \mathcal{G}\}$$

Egyensúlyban : $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \{H, \mathcal{G}\} = 0$ (Morga's integrál)

$\mathcal{G}(p, q)$ Gibbs - sűrűség

$X(p, q)$ fizikai mennyiség $\rightarrow$ mennyi az átlaga időátlag $\langle X \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T X dt$

sűrűsége $\langle X \rangle = \int X(p, q) \mathcal{G}(p, q) d\Gamma$

fázistér cellája

$$d\Gamma = \frac{dp_1 dp_2 \dots dp_N dq_1 dq_2 \dots dq_N}{N! h^{3N}} \rightarrow \text{jó dimenzió}$$

(kvantummechanikából $\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$ ($\emptyset$ trajektória)

h nagyságú cellákra osztjuk a fázistérrel majd kvantumosan fogjuk látni, hogy ez a jó a $h \rightarrow 0$ határártmenetnél

$\rightarrow$ cserélő a két részecské megkülönböztethetetlen kvantumosan

$\hookrightarrow$ Gibbs - paradoxon (kvantumosan kell lenni a fizikát)

Ergodikus tétel : a két átlag azonos $\Rightarrow$ elég a sűrűség átlagát nézni

(adott rendszerre stimmel, de lehet olyan mondani ahol sérül)

$\langle X_N \rangle = \sum_N \int X(p, q) \mathcal{G}_N(p, q) d\Gamma \rightarrow$ ha nyitott a rendszer mindegyik N részecskére összegezzük

mi a $\mathcal{G}$?

$$H = \sum_{i=1}^{2N} \frac{P_i^2}{2m} + \sum u(q_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V(q_i, q_j)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 állapot $\uparrow$ kölcsönhatás
 $\uparrow$
 térfüggés

nem ismerjük a rendszer állapotát!

esetleg ismerünk néhány makroszkópikus mennyiséget pl: E, V, N

Shannon-féle információs entropia

valószínűsége $\{P_k\}_{k=1}^n$ $\sum_k P_k = 1$

Def: $S = - \sum_k P_k \log_2 P_k = - \langle \log_2 P_k \rangle$ $\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$ *

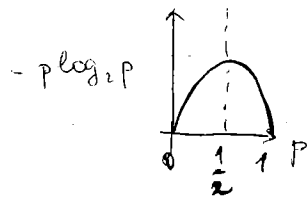
ha kitesz alapul $\log$ -ot vesszünk, akkor az információs egysége a bit.

fej/írás: $S = - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = - \log_2 \frac{1}{2} = -(-1) = 1$

Tulajdonságok:

1) $S = 0$, ha $P_i = \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$
 biztos információ

2) S maximális, ha $P_i = p \quad \forall i$ -re



egyenletes eloszlással
 (minimális információ)
 maximális entropia

~~Bevezet~~ Segédlettel: $\sum_i q_i \left(\ln \frac{q_i}{P_i} \right) \geq 0$ tets. $\{p_i\}, \{q_i\}$
 = ha $p_i = q_i$

* $S = - \lambda \sum_i p_i \ln p_i$ $\lambda = \frac{1}{\ln 2}$

Biz: $-\ln y \geq 1 - y$

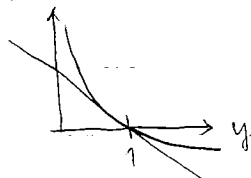
$y = \frac{p_i}{q_i}$

$-\ln \frac{p_i}{q_i} \geq 1 - \frac{p_i}{q_i}$

$\ln \frac{q_i}{p_i} \geq 1 - \frac{p_i}{q_i}$

$q_i \ln \frac{q_i}{p_i} \geq q_i - p_i$ $|\sum$

$\sum_i q_i \ln \frac{q_i}{p_i} \geq \underbrace{\sum_i q_i}_1 - \underbrace{\sum_i p_i}_1 = 0$



Biz: ($S = \max$, ha $p_i = p_{\text{st}} \forall i$)

$S\{p\} \geq S\{q\}$ ezt kell belátni, ahol $p_i = p_{\text{st}}$
 q_i tetsz.

$$S\{p\} = -\lambda \sum_i p_i \ln p_i \geq -\lambda \sum_i q_i \ln q_i$$

$$+ \lambda \sum_i \frac{1}{n} \ln p_i \geq + \lambda \sum_i q_i \ln q_i$$

$$\ln p_i \leq \sum_i q_i \ln q_i$$

$$0 \leq \sum_i (q_i \ln q_i) - \ln p_i \cdot \sum_i q_i$$

$$0 \leq \sum_i q_i (\ln q_i - \ln p_i) = \sum_i q_i \ln \frac{q_i}{p_i} \geq 0 \quad \leftarrow \text{segédteétel}$$

úntelt állapotoknál kisebb az entropia

minél nagyobb az entropia annál évesebbet tudunk a rendszerrel

3) Ha $p_{i2} = u_i v_i$ (felítható sorattént), akkor
 $\sum_i u_i = 1, \sum_i v_i = 1, u_i, v_i \geq 0$

$$S\{p\} = S\{u\} + S\{v\}$$

$$\text{Biz: } S\{p\} = -\lambda \sum_{i2} p_{i2} \ln p_{i2} = -\lambda \sum_{i2} u_i v_i \ln u_i v_i =$$

$$= -\lambda \sum_{i2} u_i v_i (\ln u_i + \ln v_i) =$$

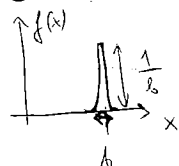
$$= -\lambda \left(\sum_i u_i \ln u_i + \sum_i v_i \ln v_i \right) = S\{u\} + S\{v\}$$

Folytonos esetben:

$$S = -\lambda \int_{-a}^a f(x) \ln f(x) dx$$

2), 3) tulajdonságok teljesülnek ezzel a definícióval

1) nem triviális



$b \rightarrow 0$

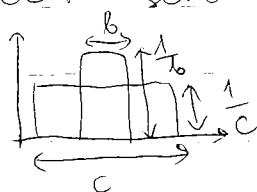
$\delta(x)$

Dirac-delta-hoz tart

$$S = -\lambda \int f(x) \ln f(x) dx =$$

$$= -\lambda \frac{1}{b} \left(\ln \frac{1}{b} \right) b = \lambda \ln b \xrightarrow[b \rightarrow 0]{} -\infty \quad \swarrow \text{gáz}$$

ha $f(x) = \delta(x)$, akkor sem teljesül, hogy $S=0$



$$b \leq c$$

$$S_b \leq S_c$$

$$\ln b \leq \ln c$$

Statisztikus fizikában entropia definíciója:

$$S = -k_B \int g \ln g d\Gamma = -k_B \langle \ln g \rangle \quad [k_B] = \frac{J}{K}$$

$$(-k_B \sum_n \int g_n \ln g_n d\Gamma_n)$$

$S\{g\} \rightarrow S$ a g funkcionálja

Alap-positulátum:

Olyan g -t kell választani, amelyik az entropiát maximálissá teszi, a rendszerről rendelkezésre álló információ mellett.

02.09.

$k_B = 1,380 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$ (gyanús, hogy a Boltzmann-állandó, de még nem tudjuk?)
 $\rightarrow g \equiv$ egyensúlyi sűrűség eloszlása-e

1) Microkanonikus sűrűség

zárt rendszer $\Rightarrow E, N, V$ adott

$$E < \mathcal{H}(p, q) < E + \delta E$$

adott

$$S\{g\} = -k_B \int_{E < \mathcal{H} < E + \delta E} g \ln g d\Gamma \quad \int_{E < \mathcal{H} < E + \delta E} g d\Gamma = 1 \rightarrow \text{normalizáció mellett}$$

$$\delta \left[-k_B \int g \ln g d\Gamma + k_B \lambda \left(\int g d\Gamma - 1 \right) \right] = 0$$

$$\delta S = -k_B \int (\delta g \ln g + k_B g \frac{1}{g} \delta g + \lambda \delta g) d\Gamma = 0$$

$$\delta S = -k_B \int (\ln g + 1 + \lambda) g d\Gamma = 0$$

$$\Rightarrow \ln g = \text{const} \quad \Omega = \int_{E < \mathcal{H} < E + \delta E} d\Gamma$$

$$g = \begin{cases} \frac{1}{\Omega} & \text{ha } E < \mathcal{H} < E + \delta E \\ 0 & \text{egyéb esetben} \end{cases}$$

$$S = -k_B \int g \ln g d\Gamma = -k_B \int \frac{1}{\Omega} \ln \frac{1}{\Omega} d\Gamma = -k_B \ln \frac{1}{\Omega} = k_B \ln \Omega$$

$$\Rightarrow \boxed{S = k_B \ln \Omega} \quad \text{Boltzmann - képlet}$$

$$\Omega(E, N, V)$$

$\delta E \rightarrow$ ki fog derülni, hogy lényegtelen

$\square\square$ kivesszük a falat $\rightarrow$ információ elveszett
(nem tudjuk róla, hogy melyik oldalon van) $\rightarrow$ entrópia nőtt $\rightarrow$ egyensúlyban az entrópia maximális

$$2H \rightarrow 0,1\%$$

$${}^4\text{He} \rightarrow 0,7\%$$

$$\text{Fe} \rightarrow 0,8-0,9\%$$

} tömegdefektus

kémiai kötés: ionizációs energia 13,6 eV

a kölcsönható rendszer nem olyan, mint részecskék összege

kölcsönhatás nagyon megváltoztatja a rendszert nem mindegy mit tekintünk egy egységnek

2) Kanonikus sokaság:

adott $\langle \mathcal{H} \rangle$, N , V (hőforrással van kapcsolatba)

energia fluktuál

$$S\{g\} = \max, \text{ ha } \int g d\Gamma = 1, \int \mathcal{H} g d\Gamma = \langle \mathcal{H} \rangle \text{ rögzített}$$

Lagrange-multi- $(-\epsilon_0 \lambda)$

$(-\epsilon_0 \beta)$

$$\delta S = -\epsilon_0 \int (\ln g + 1 + \lambda + \beta \mathcal{H}) g d\Gamma = 0$$

$$g = e^{-1-\lambda-\beta \mathcal{H}}$$

$$1 = \int g d\Gamma = e^{-1-\lambda} \underbrace{\int e^{-\beta \mathcal{H}} d\Gamma}_{Z = \int e^{-\beta \mathcal{H}} d\Gamma} \Rightarrow e^{-1-\lambda} = Z^{-1}$$

kanonikus állapotösszeg

$$g = \frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{H}}$$

$$g' \rightarrow \int g' \mathcal{H} d\Gamma = \langle \mathcal{H} \rangle$$

$$\int g' d\Gamma = 1$$

$$S' = -\epsilon_0 \int g' \ln g' d\Gamma \leq -\epsilon_0 \int g' \ln g d\Gamma =$$

$$= -\epsilon_0 \int g' (-\beta \mathcal{H} - \ln Z) d\Gamma =$$

$$= \epsilon_0 \ln Z + \epsilon_0 \beta \langle \mathcal{H} \rangle = S \quad S' \leq S \quad ;)$$

$$S = -\epsilon_0 \int g \ln g d\Gamma = -\epsilon_0 \int g (-\beta \mathcal{H} - \ln Z) d\Gamma = -\epsilon_0 \beta \langle \mathcal{H} \rangle + \epsilon_0 \ln Z$$

$$\leftarrow \sum_i q_i \ln \frac{q_i}{p_i} \geq 0$$

$$-\sum_i q_i \ln q_i \leq -\sum_i q_i \ln p_i$$

3) Nagykanonikus sokaság

hőforrás és részecske - reservoir

adott: $V, \langle \mathcal{H} \rangle, \langle N \rangle$

$$\sum_N g_N d\Gamma_N = 1 \quad \xrightarrow{\text{lagrange}} -\epsilon_0 \lambda$$

$$\sum_N \mathcal{H} g_N d\Gamma_N = \langle \mathcal{H} \rangle \quad \xrightarrow{\text{lagrange}} -\epsilon_0 \beta$$

$$\sum_N N g_N d\Gamma_N = \langle N \rangle \quad \xrightarrow{\text{lagrange}} -\epsilon_0 \alpha$$

$$S = -\epsilon_0 \sum_N \int \{ g_N \ln g_N + (\lambda g_N - 1) + (\beta \mathcal{H} g_N - 1) + (\alpha N g_N - 1) \} d\Gamma_N = \max$$

$$\delta S = -\epsilon_0 \sum_N \int \{ \ln g_N + 1 + \lambda + \beta \mathcal{H} + \alpha N \} d\Gamma_N \delta g = 0$$

$$g_N = e^{-1-\lambda-\beta\mathcal{H}-\alpha N} \Rightarrow 1 = \sum_N g_N d\Gamma_N = e^{-1-\lambda} \sum_N \int e^{-\beta\mathcal{H}-\alpha N} d\Gamma_N$$

$$e^{1+\lambda} = \sum_N \int e^{-\beta\mathcal{H}-\alpha N} d\Gamma_N = Q \quad \text{nagykanonikus állapotösszeg}$$

$$g_N = \frac{1}{Q} e^{-\beta\mathcal{H}-\alpha N}$$

$$S = -\epsilon_0 \sum_N \int g_N \ln g_N d\Gamma_N = -\epsilon_0 \sum_N \int g_N [-\ln Q - \beta\mathcal{H} - \alpha N] d\Gamma_N =$$

$$S = \epsilon_0 \ln Q + \epsilon_0 \beta \langle \mathcal{H} \rangle + \epsilon_0 \alpha \langle N \rangle$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \langle \mathcal{H} \rangle} \right|_{\langle N \rangle, V} = \epsilon_0 \left. \frac{\partial \ln Q}{\partial \langle \mathcal{H} \rangle} \right|_{\langle N \rangle, V} + \epsilon_0 \beta + \epsilon_0 \langle N \rangle \left. \frac{\partial \alpha}{\partial \langle \mathcal{H} \rangle} \right|_{\langle N \rangle, V} + \epsilon_0 \langle \mathcal{H} \rangle \left. \frac{\partial \beta}{\partial \langle \mathcal{H} \rangle} \right|_{\langle N \rangle, V}$$

$$\hookrightarrow \epsilon_0 \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial \langle \mathcal{H} \rangle} \Big|_{\langle N \rangle, V} = \epsilon_0 \frac{1}{Q} \sum_N \int d\Gamma_N e^{-\beta\mathcal{H}-\alpha N} \left[(-\mathcal{H}) \frac{\partial \beta}{\partial \langle \mathcal{H} \rangle} \Big|_{\langle N \rangle, V} + (-N) \frac{\partial \alpha}{\partial \langle \mathcal{H} \rangle} \Big|_{\langle N \rangle, V} \right]$$

$$= -\epsilon_0 \langle \mathcal{H} \rangle \frac{\partial \beta}{\partial \langle \mathcal{H} \rangle} \Big|_{\langle N \rangle, V} - \epsilon_0 \langle N \rangle \frac{\partial \alpha}{\partial \langle \mathcal{H} \rangle} \Big|_{\langle N \rangle, V}$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \langle \mathcal{H} \rangle} \right|_{\langle N \rangle, V} = \epsilon_0 \beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \quad \beta = \frac{1}{\epsilon_0 T}$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \langle N \rangle} \right|_{\langle \mathcal{H} \rangle, V} = \dots = \epsilon_0 \alpha = -\frac{\mu}{T} \quad \alpha = -\beta \mu$$

$$g_N = \frac{1}{Q} e^{-\beta\mathcal{H}-\alpha N} = \frac{1}{Q} e^{-\beta(\mathcal{H} - \mu N)}$$

Belátható $S = \max$

$$S = \epsilon_0 \ln Q + \epsilon_0 \beta \langle \mathcal{H} \rangle - \frac{\mu}{T} \langle N \rangle$$

$$TS = \epsilon_0 T \ln Q + \langle \mathcal{H} \rangle - \mu \langle N \rangle$$

Összefoglalva 3 eloszlás

Microkanonikus

$$E, V, N \quad (\text{zárt})$$

$$\Omega(E, V, N) = \int_{E < \mathcal{H} < E+\delta E} d\Gamma$$

$$S = k_B \ln \Omega$$

Kanonikus

$$\langle \mathcal{H} \rangle, V, N \quad (\text{hőforrás})$$

$$p = \frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{H}}$$

$$S = \epsilon_0 \beta \langle \mathcal{H} \rangle + \epsilon_0 \ln Z$$

$$Z = \int e^{-\beta \mathcal{H}} d\Gamma$$

Nagykanonikus

$$\langle \mathcal{H} \rangle, \langle N \rangle, V \quad (\text{hőforrás, részecskeforrás, fluktuáció})$$

$$g = \frac{1}{Q} e^{-\beta(\mathcal{H} - \mu N)}$$

$$Q = \sum_N \int e^{-\beta(\mathcal{H} - \mu N)} d\Gamma_N$$

$$TS = \epsilon_0 T \ln Q + \langle \mathcal{H} \rangle - \mu \langle N \rangle$$

$\phi(T, p, V)$ potencial de

Pl: 1) Szabad részecske: (ideális gáz)

$$\Omega = \frac{1}{N! h^{3N}} \int \delta p_i \delta q_i \int_{E < \mathcal{H}(p, q) < E + \delta E} dp_i dq_i$$

$$\mathcal{H}(p, q) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m}$$

$$\Omega(E, V, N) = \frac{V^N}{N! h^{3N}} \int_{E < \mathcal{H}(p, q) < E + \epsilon} d^{3N} p = \dots$$

$$(\sqrt{E_{2m}})^2 = E_{2m} = \sum_1^{3N} p_i^2 \rightarrow 3N \text{ dimensions} \text{ gomb } R = \sqrt{E_{2m}}$$

gömbterfogat: $C(N) \mathbb{R}^{3N}$

felone : $\tilde{C}(N) R^{3N-1}$

gömbhélyter. ~~terület~~: $\tilde{C}(N) R^{3N-1} \delta R$

$$* \Rightarrow \frac{V^N}{N! R^{3N}} \hat{C}(N) R^{3N-1} \delta R =$$

$$R = \sqrt{2mE} \quad \delta R = \frac{1}{2} \sqrt{2m} E^{-1/2} \delta E$$

$$= \frac{V^N}{N! h^{3N}} \tilde{C}(N) (2mE)^{\frac{3N-1}{2}} \frac{1}{2} \sqrt{2m} E^{-1/2} dE =$$

$$\Omega = \frac{V^N}{N! h^{3N}} \tilde{C}(N) (2m)^{\frac{3N}{2}} E^{\frac{3N}{2}-1} \cdot \frac{1}{2} dE$$

$$S = \epsilon_0 \ln \Omega = \epsilon_0 \left[N \ln V + \left(\frac{3N}{2} - 1 \right) \ln E + \ln S(E) + \text{const}(N) \right] =$$

$$a) \approx \frac{3N}{2}$$

$$b) \frac{3N}{2} \ln E \gg \ln S E$$

$$= \epsilon_0 N \ln V + \epsilon_0 \frac{3N}{2} \ln E + \text{const}(N)$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T} = \left\{ \frac{3N}{2} \right\} \frac{1}{E}$$

$$E = \frac{3N}{2} k_B T$$

2) Hammonitus oscillator

$$H = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 \right) = \sum_{i=1}^{6N} p_i^2 = E$$

$$R = \sqrt{E}$$

$$p_i^2 = \begin{cases} \frac{p_i^2}{2m} & i = 1, \dots, 3N \\ \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 & i = 3N+1, \dots, 6N \end{cases}$$

$$\delta R = \frac{1}{2\sqrt{E}} \delta E$$

$$\Omega = \frac{1}{h\omega} \int_{E_C}^{\omega} d\epsilon \rho(\epsilon) \epsilon$$

(nem kell $n!$ -et megkülönböztetni)

N dimenziös gömb felülete: $\frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{N}{2})} R^{N-1}$

$$\Omega = \frac{1}{h^{3N}} \cdot 2 \frac{\pi^{3N}}{\Gamma(3N)} E^{\frac{3N-1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{E}} \delta E$$

$$\ln(\Gamma(3N)) = \ln(3N-1)! \approx (3N-1)\ln(3N-1) - (3N-1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T} = \ln 3N \frac{1}{E}$$

$$S = \underbrace{\epsilon_B}_{\approx 3N} \left[(3N-1) \ln E + \text{const}(N) \right] \approx \underbrace{\epsilon_B}_{\approx 3N} \underbrace{3N \ln \left(\frac{E}{h\nu} \right)}_{\approx 3N} + \underbrace{\text{const}(N)}_{\approx 3N}$$

$$E = \frac{6N}{2} k_B T$$

↑ sup dimension

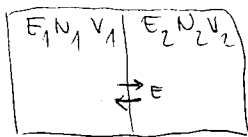
Általában : $\Omega \sim E^{\alpha f}$ $\Theta(a) = 1$

$S = k_B \ln \Omega = k_B \alpha f \ln E$ ($+ \ln E$) $f =$ szabadsági fokok
 $\hookrightarrow$ $\hookrightarrow$ mert f nagy

Ideális gáz : $S = k_B N \ln V + k_B \frac{3N}{2} \ln E + \text{const}(N)$

Oscillátor : $S = k_B 3N \ln \frac{E}{h\nu} + S_0$, $S_0 = k_B \ln 2 - 3N k_B (\ln 3N - 1)$

Egysúlyú feltétel:



$$\left. \begin{aligned} E &= E_1 + E_2 \\ N &= N_1 + N_2 \\ V &= V_1 + V_2 \end{aligned} \right\} \text{rögz.}$$

tölcsonbataist elhanyagoljuk $\rightarrow$ arányos a felülettel $\rightarrow$ rövid hatótávú erő
 tgh. a két rendszer független

$$S = S_1 + S_2$$

$$S = S(E, E_1) = S_1(E_1) + S_2(E - E_1)$$

egysúlyú : S maximális E -ben

$$0 = \left. \frac{\partial S}{\partial E_1} \right|_{N_1, V_1, N_2, V_2} = \left. \frac{\partial S_1}{\partial E_1} \right|_{N_1, V_1, N_2, V_2} + \left. \frac{\partial S_2}{\partial E_1} \right|_{N_1, V_1, N_2, V_2} = \frac{\partial S_1}{\partial E_1} + \frac{\partial S_2(E - E_1)}{\partial E_1} =$$

$$= \frac{\partial S_1}{\partial E_1} + \frac{\partial S_2}{\partial E_2} (-1) = \frac{\partial S_1}{\partial E_1} - \frac{\partial S_2}{\partial E_2}$$

Def: $\left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_{N, V} = \frac{1}{T}$ dimenzió jö

ez a hőmérséklet

id. gáz : $\left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_{N, V} = \frac{3N}{2} k_B \frac{1}{E} \rightarrow E = k_B \frac{3N}{2} T$

oszc. : $\left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_{N, V} = k_B 3N \frac{1}{E} \rightarrow E = k_B 3NT$

(1 szabadsági fokra $\frac{1}{2} k_B T$ energia jut)

szabadsági fokok száma : a Hamiltonban

a kvadrátus tagok száma

Általában $\Omega \sim E^{\alpha f}$

$$S = k_B \alpha f \ln E + \dots \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{k_B \alpha f}{E} \rightarrow E = k_B \alpha f T$$



↑
 fók mozoghat

$$E_1 + E_2 = E \text{ rögz}$$

$$V_1 + V_2 = V \text{ rögz}$$

$$N_1 + N_2 = N \text{ rögz}$$

$$S(V_1) = S_1(V_1) + S_2(V - V_2)$$

egyensúlyban: $0 = \left. \frac{\partial S_1}{\partial V_1} \right|_{N_1, E_1} + \left. \frac{\partial S_2(V - V_1)}{\partial V_1} \right|_{N_2, E_2} = \frac{\partial S_1}{\partial V_1} + \frac{\partial S_2}{\partial V_2} (-1)$

Def: $\left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_{E, N} = \frac{P}{T}$ ← nyomás

Egyensúlyban: $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$ → van energiacsere $P_1 = P_2$
hővezető $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$

id. gáz: $\left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_{E, N} = \frac{P}{T} = \epsilon_B N \frac{1}{V} \Rightarrow \boxed{pV = \epsilon_B NT}$ állapotegyenlet

↪ kísérletileg adja ϵ_B értékét

$$\epsilon_B = (1,38044 \pm 0,00007) \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$\epsilon_B N_A = R = (8,31447 \pm 0,00034) \frac{\text{J}}{\text{K}} = 2 \text{ cal/mol}$$

$$N_A = \frac{R}{\epsilon_B}$$

$$(6,02486 \pm 0,00016) \cdot 10^{23} \rightarrow 1 \text{ mol}$$

$$1 \text{ cal} = 4,187 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

↪ definiálja az abszolút hőmérsékleti skálát
Ha a részecskék mehetnek át a falon:

$$S(N_1) = S_1(N_1) + S_2(N - N_1)$$

egyensúlyban: $0 = \left. \frac{\partial S_1}{\partial N_1} \right|_{E_1, V_1} = \left. \frac{\partial S_1}{\partial N_1} \right|_{E_1, V_1} + \left. \frac{\partial S_2(N - N_1)}{\partial N_1} \right|_{E_2, V_2} =$
 $= \frac{\partial S_1}{\partial N_1} - \frac{\partial S_2}{\partial N_2}$

Def: chemiai potenciál $\left. \frac{\partial S}{\partial N} \right|_{E, V} = -\frac{\mu}{T}$

egyensúlyban $\frac{\mu_1}{T_1} = \frac{\mu_2}{T_2} \rightarrow$ hővezető
van hőcsere
 $\mu_1 = \mu_2 \rightarrow$ diaterikus a fal

Fundamentális egyenlet

zárt rendszer $S = S(E, V, N) \leftrightarrow E = E(S, V, N)$

$dS = \left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_{V, N} dE + \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_{E, N} dV + \left. \frac{\partial S}{\partial N} \right|_{E, V} dN = \frac{dE}{T} + \frac{pdV}{T} - \frac{\mu dN}{T}$ természetes változók

$$\frac{1}{T} \quad \frac{P}{T} \quad -\frac{\mu}{T}$$

$$\boxed{dE = TdS - pdV + \mu dN} \quad \text{I. főtétel}$$

$\underbrace{\quad}_{DQ} + \underbrace{\quad}_{DW}$

DQ, DW nem teljes deriváltak $\rightarrow$ függ az úttól
 dE teljes derivált $\rightarrow$ nem függ a belső energia változása az úttól

Legendre - transzformáció: $f(x) \rightarrow g(x) = f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} x$
 $E(S, V, N) \rightarrow F(T, V, N) = E - \frac{\partial E}{\partial S} \Big|_{V, N} S = E - TS$
 $\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ T & -p & \mu \end{matrix}$ szabad energia

$$dF = dE - TdS - SdT =$$

$$= TdS - pdV + \mu dN - TdS - SdT =$$

$$dF = -SdT - pdV + \mu dN$$

$$E(S, V, N) \rightarrow H(S, p, N) = E - \frac{\partial E}{\partial V} \Big|_{S, \mu} V = E + pV \quad \text{entalpia}$$

$$dH = TdS + Vdp + \mu dN$$

$$\text{Gibbs-potencial: } G(T, p, N) = E - \frac{\partial E}{\partial S} \Big|_{V, \mu} S - \frac{\partial E}{\partial V} \Big|_{S, \mu} V = E - TS + pV$$

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN$$

Euler - összefüggés:

$E = E(S, V, N) \rightarrow$ extenzív mennyiségek

$$\lambda E = E(\lambda S, \lambda V, \lambda N) \quad \Big| \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

$$E = \frac{\partial E}{\partial(\lambda S)} \Big|_{\lambda V, \lambda N} S + \frac{\partial E}{\partial(\lambda V)} \Big|_{\lambda S, \lambda N} V + \frac{\partial E}{\partial(\lambda N)} \Big|_{\lambda S, \lambda V} N \quad \lambda = 1 \text{ eset}$$

$$= \frac{\partial E}{\partial S} \Big|_{V, N} S + \frac{\partial E}{\partial V} \Big|_{S, N} V + \frac{\partial E}{\partial N} \Big|_{S, V} N =$$

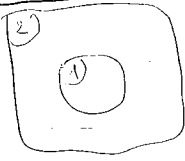
$$\boxed{E = TS - pV + \mu N}$$

nem függetlenek az intenzív paraméterek egymástól

mikrokanonikusban: $S(E, N, V)$

kanonikus: $F(T, V, N)$

nagykanonikus: $\Omega(T, V, \mu)$

Kanonikus eloszlás

① E_1, N_1 részrendszer q_1, p_1 koordináták

② E_2, N_2 hőtartály q_2, p_2

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ zárt} \rightarrow E_1 + E_2 = E$$

$$N_1 + N_2 = N$$

$$\textcircled{2} \gg \textcircled{1} \rightarrow E_2 \gg E_1, N_2 \gg N_1$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \quad \beta = \frac{1}{\Omega} \quad \Omega = \frac{1}{h^{3N} N!} \int d^{3N} p_1 d^{3N} q_1 d^{3N} p_2 d^{3N} q_2$$

$$g_1(p_1, q_1) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{normálási faktor}}}{C} \int g(p_1, q_1, p_2, q_2) dp_2 dq_2 = \frac{C}{\Omega} \frac{1}{h^{3N_2} N_2!} \int_{\substack{E - \mathcal{H}_1 < \mathcal{H}_2 < E - \mathcal{H}_1 + \delta E \\ E_2}} d^{3N_2} p_2 d^{3N_2} q_2 =$$

$$= \frac{C}{e^{\frac{S(E)}{\epsilon_B}}} \cdot \Omega_2(E - \mathcal{H}_1) =$$

$$= C \cdot \frac{e^{\frac{S_2(E - \mathcal{H}_1)}{\epsilon_B}}}{e^{\frac{S(E)}{\epsilon_B}}} \Rightarrow \epsilon_B \ln g_1 = S_2(E - \mathcal{H}_1) - S(E) + \epsilon_B \ln C$$

$E \gg \mathcal{H}_1, S_2$ sorfejtés

$$\epsilon_B \ln g_1 \approx S_2(E) + \frac{\partial S_2}{\partial E}(\mathcal{H}_1) - S(E) + \epsilon_B \ln C$$

$$g_1 \approx \text{const} e^{-\frac{\partial S_2}{\partial E} \mathcal{H}_1 \frac{1}{\epsilon_B}} \quad g_1 \sim \text{const} e^{-\beta \mathcal{H}_1} \rightarrow \text{kanonikus eloszlás}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial E} = \frac{1}{T_2} \quad \text{hőtartály hőmérséklete}$$

A részrendszer kanonikusan oszlik el, $\beta = \frac{1}{\epsilon_B T_2}$,

T_2 a hőtartály hőmérséklete.

Ez volt a Gibbs-tétel.

A β multiplikátort bevezettük, hogy az a hőtartály hőmérséklete.

① makroszkópikus $\Rightarrow T_1 = T_2$

② kis szabadsági foku $\Rightarrow T_2$ kátfőzra meg

$$S = \epsilon_B \beta \langle \mathcal{H} \rangle + \epsilon_B \ln Z$$

$$\frac{\partial S}{\partial \langle \mathcal{H} \rangle} = \frac{\partial(\epsilon_B \beta)}{\partial \langle \mathcal{H} \rangle} \langle \mathcal{H} \rangle + \epsilon_B \beta + \epsilon_B \frac{\partial \ln Z}{\partial \langle \mathcal{H} \rangle} =$$

$$= \epsilon_B \frac{\partial \beta}{\partial \langle \mathcal{H} \rangle} \langle \mathcal{H} \rangle + \epsilon_B \beta + \epsilon_B \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \langle \mathcal{H} \rangle} =$$

$$= \epsilon_B \frac{\partial \beta}{\partial \langle \mathcal{H} \rangle} \langle \mathcal{H} \rangle + \epsilon_B \beta + \frac{\epsilon_B}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \langle \mathcal{H} \rangle} \frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial \beta} = *$$

$$Z = \int e^{-\beta \mathcal{H}} d\Gamma \rightarrow \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{1}{Z} \int \mathcal{H} e^{-\beta \mathcal{H}} d\Gamma = \langle \mathcal{H} \rangle$$

$$\frac{\partial S}{\partial \langle \mathcal{H} \rangle} \bigg|_{N,V} = \frac{1}{T} = \frac{1}{k_B T}$$

kanonikus eloszlásban

(microkanonikusban $\frac{\partial S}{\partial E} \bigg|_{N,V} = \frac{1}{T} = \frac{1}{k_B T}$)

$$Z = \int e^{-\beta \mathcal{H}} d\Gamma =$$



↳ konstans energiaszintű felületet

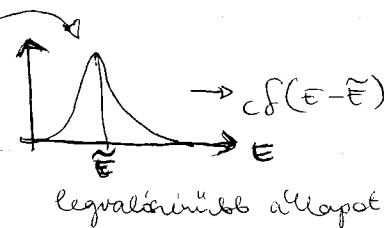
$$d\Omega(E) = \omega(E) dE$$

$$= \int e^{-\beta E} \omega(E) dE \approx \int e^{-\beta E} E^{\alpha} dE$$

$$\Omega \sim E^{\alpha}$$

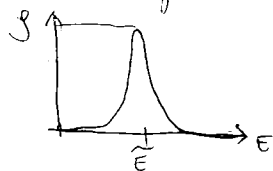
$$\omega \sim E^{\alpha} \text{ állapotsűrűség}$$

$$\approx \int \delta(E - \bar{E}) dE = C$$

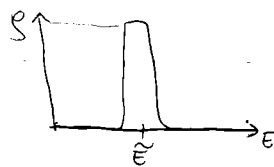


$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H} \rangle &= \int \mathcal{H} \rho d\Gamma = \int \mathcal{H} \frac{1}{Z} e^{-\beta \mathcal{H}} d\Gamma \approx \frac{1}{Z} \int E e^{-\beta E} \omega(E) dE \approx \\ &\approx \frac{1}{Z} \int E e^{-\beta E} E^{\alpha} dE \approx \frac{1}{Z} C \bar{E} = \bar{E} \end{aligned}$$

$$C \delta(E - \bar{E})$$

legvalószínűbb állapot energiája $\approx$ átlagenergia

kanonikus



microkanonikus

 $\rightarrow \delta(E - \bar{E})$ - ba mennek

- nagy f - re ugyanazt

nagykanonikusra is belátható, hogy ugyanaz
termodinamikaira mindegyik eloszlással
ugyanazt kapjuk

H szórása?

$$\langle \mathcal{H}^2 \rangle - \langle \mathcal{H} \rangle^2 = ?$$

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{1}{Z} \int \mathcal{H} e^{-\beta \mathcal{H}} d\Gamma = \langle \mathcal{H} \rangle$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} &= \frac{\partial \langle \mathcal{H} \rangle}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \int \mathcal{H} \frac{e^{-\beta \mathcal{H}}}{Z} d\Gamma = \frac{\int \mathcal{H}^2 Z e^{-\beta \mathcal{H}} - \mathcal{H} e^{-\beta \mathcal{H}} \frac{\partial Z}{\partial \beta} d\Gamma}{Z^2} \\ &= \langle \mathcal{H}^2 \rangle - \langle \mathcal{H} \rangle^2 \end{aligned}$$

$$\int \mathcal{H} \frac{e^{-\beta \mathcal{H}}}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) d\Gamma = \langle \mathcal{H} \rangle$$

$$\langle \mathcal{H}^2 \rangle - \langle \mathcal{H} \rangle^2$$

 $\langle \mathcal{H} \rangle = E$ belső energia

$$\beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$\begin{aligned}\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 &= \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial (\beta)} = - \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial (\frac{1}{k_B T})} = - \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial (k_B T)} \frac{\partial (k_B T)}{\partial (\frac{1}{k_B T})} = - \frac{\partial E}{\partial (k_B T)} \left(- \frac{1}{(k_B T)^2} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{k_B} \frac{\partial E}{\partial T} (k_B T)^2 = C_V k_B T^2\end{aligned}$$

$$\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = C_V k_B T^2$$

↳ extenzió $\sim N$

$\langle H \rangle \sim N$

relatív szórási $\sim \frac{1}{\sqrt{N}}$

szórás $\sim \sqrt{N}$

DE ha instabil a rendszer, akkor ez nem jó
fajisáthatatlanságnál divergál és nincs ekvivalencia

Összefoglaljuk a termodinamikai formulákat:

$$S = k_B \beta \langle H \rangle + k_B \ln Z \quad \text{kanonikusból}$$

$$ST = k_B \frac{1}{k_B T} T \langle H \rangle - k_B T \ln Z \Rightarrow -k_B T \ln Z = \langle H \rangle - TS$$

$$-k_B T \ln Z = E - TS = F(T, V, N)$$

$$F = -k_B T \ln Z$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial T} \Big|_{V, N} &= -k_B \ln Z - k_B T \frac{\partial \ln Z}{\partial T} \Big|_{V, N} \\ &= -k_B T k_B \frac{\partial \ln Z}{\partial (T k_B)} = -k_B^2 T \frac{\partial \ln Z}{\partial (\frac{1}{k_B T})} \frac{\partial (\frac{1}{k_B T})}{\partial (k_B T)} = -k_B^2 T \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \left(- \frac{1}{(k_B T)^2} \right) = \\ &= -k_B^2 T k_B \frac{\partial \ln Z}{\partial (\beta)} \frac{1}{k_B^2 T^2} = - \frac{1}{T} \frac{\partial \ln Z}{\partial (\beta)} = \\ &= -\beta k_B \frac{\partial \ln Z}{\partial (\beta)} = -\beta k_B \langle H \rangle\end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial T} \Big|_{V, N} = -k_B \ln Z - k_B \beta \langle H \rangle = -S$$

microkanonikus

zárt rendszer

E, N, V rögzített

$$g = \frac{1}{\Omega} \quad \Omega = \int d\Gamma$$

$$d\Gamma = d\vec{p}^{3N} d\vec{q}^{3N} \frac{1}{h^{3N} N!}$$

$$S = k_B \ln \Omega$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} \Big|_{V, N} = \frac{1}{T} \quad \frac{\partial S}{\partial V} \Big|_{E, N} = \frac{P}{T}$$

$$\frac{\partial S}{\partial N} \Big|_{E, V} = \frac{\mu}{T}$$

kanonikus

hőteremtő, N, V rögz.

$\langle H \rangle = E$ belső energia

$$Z = \int e^{-\beta H} d\Gamma$$

$$g = \frac{e^{-\beta H}}{Z}$$

$$F(T, V, N) = -k_B T \ln Z$$

$$S = - \frac{\partial F}{\partial T} \Big|_{V, N} \quad E = \langle H \rangle = \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

$$P = - \frac{\partial F}{\partial V} \Big|_{T, N} \quad \mu = \frac{\partial F}{\partial N} \Big|_{T, N}$$

Pl. Ideális gáz kanonikus sokaságban

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m} & Z &= \frac{1}{h^{3N} N!} \int dp^{3N} dq^{3N} e^{-\sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m}} = \\ & & &= \frac{V^N}{h^{3N} N!} \prod_{i=1}^{3N} \int_{-\infty}^{\infty} dp_i e^{-\frac{p_i^2}{2m}} = \left(\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2m}\beta}} \right)^{3N} \\ & & &= \frac{V^N}{h^{3N} N!} \left(\frac{2m\pi}{\beta} \right)^{3N/2} \Rightarrow \ln Z = \text{const} - \frac{3N}{2} \ln \beta \end{aligned}$$

$$F = -k_B T \ln Z = -k_B T \left[N \ln V - \frac{3N}{2} \ln \beta - 3N \ln h - \ln N! + \frac{3N}{2} \ln(2m\pi) \right] = *$$

$$E = \frac{\partial(\ln Z)}{\partial(-\beta)} = \frac{3N}{2} \frac{1}{\beta} = \frac{3N}{2} k_B T \quad \text{és tényleg}$$

$$P = - \left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_{T,N} = k_B T \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = k_B T N \frac{1}{V}$$

$$\mu = \left. \frac{\partial F}{\partial N} \right|_{T,V} = -k_B T \left[\ln V - 3 \ln h - (\ln N + N \frac{1}{N} - 1) + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2m\pi}{\beta} \right) \right] =$$

$$* = -k_B T \left[N \ln V + \frac{3N}{2} \ln \left(\frac{2m\pi}{\beta} \right) - N \ln N + N - 3N \ln h \right] \quad \text{B}$$

$$\mu = -k_B T \left[\ln \frac{V}{N} + \ln \left[\left(\frac{2m\pi}{\beta} \right)^{3/2} \frac{1}{h^3} \right] \right]$$

02.22.

$$S = -\lambda \int f(x) \ln f(x) dx$$

$$f(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}}$$

Gauss eloszlás

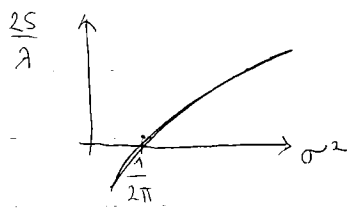
$$S = -\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}} \left[-\ln a\sqrt{\pi} - \frac{x^2}{a^2} \right] dx =$$

$$= +\lambda \frac{\ln(a\sqrt{\pi})}{a\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{a^2}} + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \frac{x^2}{a^2} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx = \dots = \frac{\lambda}{2} \left(\ln(a\sqrt{\pi}) + \frac{1}{2} \right) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-at^2} dt = -\frac{\partial}{\partial a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = -\frac{\partial}{\partial a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{2} a^{-3/2} \sqrt{\pi} = \frac{\lambda}{2} \left(\ln(2\pi\sigma^2) + 1 \right)$$

Stirling's

$$a=1 \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$



Ideális gáz szabad energia: $F = E - k_B T N \ln \left[\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \right]$
 extenzív mennyiség

$$* N! \leftarrow d\Gamma = \frac{1}{N! h^{3N}} \int d^{3N}p d^{3N}q$$

Gibbs - paradoxon:

$$F = E - TS \rightarrow S = \frac{3k_B N}{2} - 3Nk_B \ln h + \frac{3Nk_B}{2} \ln(2\pi m k_B T) + k_B N \ln V -$$

$$- \underbrace{N \ln N + N}_{\ln N!} = \tilde{S} - N \ln N + N$$

$N!$ nélküli



egyensúly van

érvessük a falat $\rightarrow 2N, 2V, T$

$$\Delta S = -2S(N, V, T) + S(2N, 2V, T) = 0$$

$$\Delta \tilde{S} = \tilde{S}(2N, 2V, T) - 2\tilde{S}(N, V, T) = 2Nk_B (\ln 2V - \ln V) = 2Nk_B \ln 2 =$$

$$= k_B \ln(2^{2N}) \quad \text{né az entrópia}$$

"keverési entrópia"

Evipartíció tétel:

$$H = ax^2 + H' \quad \text{ahol } H' \text{ független } x\text{-től}$$

$$\langle ax^2 \rangle = \frac{1}{Z} \int ax^2 e^{-\beta H} d\Gamma = \frac{1}{Z'} \frac{\int ax^2 e^{-\beta ax^2} Z' dx}{\int e^{-\beta ax^2} dx} = *$$

$$Z = \int e^{-\beta H} d\Gamma = \int e^{-\beta ax^2 - \beta H'} dx d\Gamma' = Z' \int e^{-\beta ax^2} dx$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\beta a}} \quad \frac{\partial I}{\partial \beta} = \int_{-\infty}^{\infty} ax^2 e^{-\beta ax^2} dx$$

$$* = -\frac{\frac{\partial I}{\partial \beta}}{I} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln I = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \sqrt{\frac{\pi}{\beta a}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{\beta a} \right) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\frac{1}{2} \ln \beta \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\beta} = \frac{k_B T}{2} = \langle ax^2 \rangle$$

H csupa kvadrátus tagból áll, számuk f

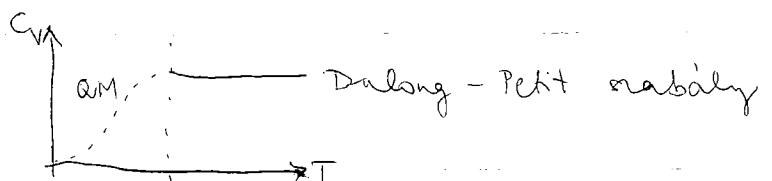
$$\langle H \rangle = f \frac{k_B T}{2}$$

pl: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

$f = 6N$

$\langle H \rangle = E = 6N \frac{k_B T}{2}$

fajhő $C_V = \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial T}$



11. Harmonikus oscillator.

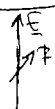
$$f = 3N \cdot 2 \quad N \text{ db} \quad H_1 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

$$Z = \frac{1}{N! h^{3N}} \int d^3p d^3q e^{-\beta H} = \frac{1}{N!} Z_1^{3N}$$

$$Z_1 = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right)} dp dx = \sqrt{\frac{h}{2\pi}} \sqrt{\frac{h}{2\pi m^2 \omega^2}} \frac{1}{h} = \frac{2\pi}{\beta h \omega} = \frac{1}{\beta h \omega}$$

$$F = -k_B T \ln Z$$

$$E = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \dots = 3N k_B T$$

Dipolusor elektromos térben

$$-E p$$

$$\langle p \rangle = ?$$

$$E_p = -E p = -E p \cos \vartheta$$

$$S = \frac{e^{-\beta H}}{Z}$$

$$\int dw = e^{+\beta E p \cos \vartheta}$$

$dw \leftarrow$ térszög

$$dw = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$\int dw = 1$$

$$\langle p \rangle = \int p \cos \vartheta \int dw = p \frac{\int \cos \vartheta e^{+\beta E p \cos \vartheta} dw}{\int e^{+\beta E p \cos \vartheta} dw} =$$

$$\alpha = \beta E p$$

$$\cos \vartheta = x$$

$$dx = \sin \vartheta d\vartheta$$

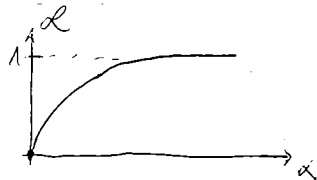
$$= p \frac{\int_{-1}^1 x e^{\alpha x} dx}{\int_{-1}^1 e^{\alpha x} dx} = p \frac{d}{d\alpha} \left(\ln \int_{-1}^1 e^{\alpha x} dx \right) =$$

$$= p \frac{d}{d\alpha} \ln \left[\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{\alpha} \right]_{-1}^1 = p \frac{d}{d\alpha} \left(\ln \frac{2 \operatorname{sh} \alpha}{\alpha} \right) =$$

$$= p \frac{d}{d\alpha} \left(\ln \operatorname{sh} \alpha - \ln \alpha \right) = p \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \operatorname{ch} \alpha - p \frac{1}{\alpha} =$$

$$= p \left(\operatorname{cth} \alpha - \frac{1}{\alpha} \right) = p \mathcal{L}(\alpha)$$

↳ Langevin-fü.



$$\mathcal{L} \approx \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^3}{45} + \dots$$

$$\alpha = \beta E p = \frac{E p}{k_B T} \ll 1 \text{ ha}$$

$$E T \gg E p$$

T, regyira sorfejtés

$$\langle p \rangle = p N \mathcal{L}(\alpha) \xrightarrow{\alpha \ll 1} N p \frac{\alpha}{3} = \frac{1}{3} \frac{N p^2 E}{k_B T}$$

(empirikusan is ez jött ki mérésből)

Maxwell - eloszlás:

Keressük annak a valószínűségét, hogy az ideális gázban egyik kiválasztott molekulának a sebessége

abszolút értéke $(v, v+dv)$ -be esik, tekintet nélkül v irányára és a többi molekulára

$$f(v) \text{ és } \int f(v) dv = N$$

↳ egyrészt eloszlásfp.

$$f(v) dv = c \cdot \int_{\text{térfogat}} dp_x dp_y dp_z \cdot \int d\Gamma e^{-\beta H} \frac{1}{Z} =$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + H'$$

$$= c \cdot p^2 dp \int d\omega e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \int d\Gamma' e^{-\beta H'} \frac{1}{\int e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} p^2 dp d\omega \int d\Gamma' e^{-\beta H'} =}$$

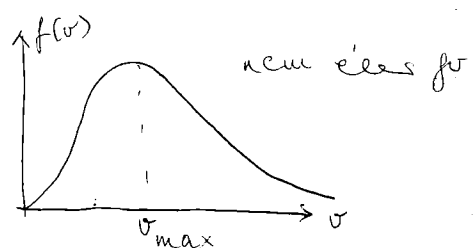
$$= c m^2 v^2 m dv \frac{e^{-\beta \frac{mv^2}{2}}}{\int e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} p^2 dp} = \dots =$$

$$= c m^3 v^2 \frac{e^{-\beta \frac{mv^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} (2m \epsilon_B T)^{-3/2} dv$$

$$f(v) = c \sqrt{\frac{8m}{\pi \epsilon_B T}} \frac{mv^2}{2\epsilon_B T} e^{-\frac{mv^2}{2\epsilon_B T}}$$

$$\int_0^\infty f(v) dv = N \Rightarrow c = N$$

$$f(v) = N \sqrt{\frac{8m}{\pi \epsilon_B T}} \frac{mv^2}{2\epsilon_B T} e^{-\frac{mv^2}{2\epsilon_B T}}$$



$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = \epsilon_B T$$

$$\text{átlagérték} \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \frac{1}{2} \epsilon_B T$$

$$\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \epsilon_B T \rightarrow$$

$$\rightarrow \langle v_{\max}^2 \rangle \neq \langle v^2 \rangle$$

$$\langle v \rangle = \langle |v| \rangle = \frac{1}{N} \int v f(v) dv = \dots = 2 \sqrt{\frac{2 \epsilon_B T}{m\pi}}$$

Kolloid részecskék magasság szerinti eloszlása

Homogén gravitációs tér, $-z$ irányban

$$H = \sum_i \left(\frac{p_i^2}{2m} + mgz_i \right)$$

$f(z) dz$ V -n koordinátára szintegrálunk kivéve

1 részecské z koordinátájára

$$f(z) dz = \frac{c e^{-\beta mgz} dz}{\int e^{-\beta mgz} dz} = \tilde{c} e^{-\frac{mgz}{\epsilon_B T}} dz$$

$$Z = \frac{e^{-\beta H} d\Gamma}{Z}$$

$$f(z) = N_0 e^{-\frac{mgz}{\epsilon_B T}}$$

$$N_0 = N(z=0)$$

↳ ϵ_B mekeiseke ip

Nagykanonikus sorozat:adott $V, \langle \mathcal{H} \rangle, \langle N \rangle$

$$S\{\rho\} = \max$$

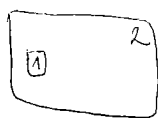
$$g_N = \frac{1}{Q} e^{-\beta \mathcal{H} - \alpha N} \quad \alpha, \beta \text{ Lagrange-multiplikátorok}$$

$$Q = \sum_{N=0}^{\infty} \int d\Gamma_N e^{-\beta \mathcal{H} - \alpha N}$$

$$d\Gamma_N = \frac{1}{h^{3N} N!} dp^{(3N)} dq^{(3N)}$$

$$S = -k_B \sum_N g_N \ln g_N = -k_B \sum_N \int g_N (-\beta \mathcal{H} - \alpha N - \ln Q) d\Gamma_N =$$

$$= -k_B \ln Q + k_B \beta \langle \mathcal{H} \rangle + k_B \alpha \langle N \rangle$$



$$E = E_1 + E_2 \text{ rögz.}, \quad E_1 \ll E_2$$

$$N = N_1 + N_2 \text{ rögz.}, \quad N_1 \ll N_2$$

$$g_1(\mathcal{H}_1, N_1) = \frac{C}{h^{3N_1} N_1!} \int g_2(q_1, p_1, q_2, p_2) dq_2 dp_2$$

$$E - \mathcal{H}_1 < \mathcal{H}_2 < E - \mathcal{H}_1 + \delta E$$

$$g = \frac{1}{\Omega} \quad 1+2 \text{ együtt zárt rendszer alatt}$$

$$g_1(\mathcal{H}_1, N_1) = C \frac{\Omega_2(E - \mathcal{H}_1, N - N_1)}{\Omega(E, N)}$$

$$k_B \ln g_1 = k_B \ln C + k_B \ln \Omega_2 - k_B \ln \Omega = k_B \ln C + S_2(E - \mathcal{H}_1, N - N_1) - S(E, N)$$

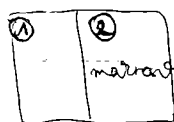
$$\text{sorfejtés} = k_B \ln C + S_2(E, N) - \left(\frac{\partial S_2}{\partial E} \mathcal{H}_1 - \left(\frac{\partial S_2}{\partial N} \right) N_1 - S(E, N) \right)$$

$$\quad \quad \quad \nearrow \frac{1}{T_2} \quad \quad \quad \nwarrow -\frac{\mu_2}{T_2}$$

$$g_1 \approx \text{const.} \cdot e^{\frac{-\mathcal{H}_1 - \mu_2 N_1}{k_B T_2}} \quad \text{nagykanonikus}$$

↑ normális

$$\Rightarrow \beta = \frac{1}{k_B T_2}, \quad \alpha = -\frac{\mu_2}{k_B T_2}$$



ha ① is makroszkopikus

$$\frac{\mu_1}{T_1} = \frac{\mu_2}{T_2}$$

ha N változhat

$$T_1 = T_2$$

ha van hőszere

$$g = \text{const.} \cdot e^{-\beta(\mathcal{H} - \mu N)}$$

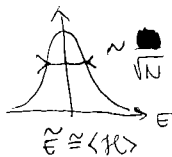
 β, μ az ① rendszer paraméterei

$$S = k_B \ln Q + k_B \beta \langle \mathcal{H} \rangle + k_B \alpha \langle N \rangle$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \langle \mathcal{H} \rangle} \right|_{N, V} = k_B \beta = \frac{1}{T}$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \langle N \rangle} \right|_{\mathcal{H}, V} = k_B \alpha = -\frac{\mu}{T}$$

kanonikus



microkanonikus



nagykanonikus

$$\langle N \rangle \approx N_{\max}$$

Szórások

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial \beta} = \frac{1}{Q} \sum \alpha_i e^{-\beta(\mathcal{H} - \mu N)} (\mathcal{H} - \mu N) = \langle \mathcal{H} - \mu N \rangle$$

$$\frac{\partial^2 \ln Q}{\partial (-\beta)^2} = \dots = \langle (\mathcal{H} - \mu N)^2 \rangle - \langle \mathcal{H} - \mu N \rangle^2 \rightarrow \text{szórásnégyzet} = \frac{\partial \langle \mathcal{H} - \mu N \rangle}{\partial (-\beta)} \rightarrow \Theta(N)$$

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial (\alpha)} = \langle N \rangle$$

$$\frac{\partial^2 \ln Q}{\partial (\alpha)^2} = \dots = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial (\alpha)} \rightarrow \Theta(N)$$

relatív szórási $\frac{1}{\sqrt{N}}$

Másodrendű fázisátalakulásnál $\mathcal{H}$ és N fluktuációs divergálnak. Az egyes eloszlásokat nem ekvivalensek

$$\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \left. \frac{\partial N}{\partial (\alpha)} \right|_{T,V} = \left. \frac{\partial N}{\partial \mu} \right|_{T,V} \left. \frac{\partial \mu}{\partial (\alpha)} \right|_{T,V} = \epsilon_B T \left. \frac{\partial N}{\partial \mu} \right|_{T,V} = ?$$

$$\left. \frac{\partial N}{\partial \mu} \right|_{T,V} = \frac{\left. \frac{\partial N}{\partial p} \right|_{V,T} \left. \frac{\partial p}{\partial \mu} \right|_{V,T}}{\left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_{N,T}} = - \frac{\left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_{N,T}}{\left. \frac{\partial V}{\partial N} \right|_{p,T}} \left. \frac{\partial p}{\partial \mu} \right|_{V,T} = \frac{V \kappa_T}{\left(\frac{\partial V}{\partial N} \right)_{p,T}} \left. \frac{\partial p}{\partial \mu} \right|_{V,T}$$

$$\kappa_T = - \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_{T,N}$$

Maxwell

$$\text{Gibbs: } G(T, p, V) = E - TS + pV = \mu N$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial N} \right|_{p,T} = \left. \frac{\partial \mu}{\partial p} \right|_{N,T}$$

$$\text{Euler: } E = TS - pV + \mu N$$

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN$$

$$\left. \frac{\partial N}{\partial \mu} \right|_{V,T} = \frac{V \kappa_T}{\left. \frac{\partial \mu}{\partial p} \right|_{N,T}} \left. \frac{\partial p}{\partial \mu} \right|_{V,T} = *$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial p} \right|_{N,T} = \frac{1}{N} \left. \frac{\partial G}{\partial p} \right|_{N,T} = \frac{1}{N} V$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \mu} \right|_{V,T} = \frac{1}{\left. \frac{\partial \mu}{\partial p} \right|_{N,T}}$$

$$\Phi(T, V, \mu) = E - TS - \mu N = -pV$$

$$d\Phi = -SdT - pdV - Nd\mu$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \mu} \right|_{T,V} = - \frac{1}{V} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right|_{V,T} = - \frac{1}{V} (-N) = \frac{N}{V}$$

$$* = \frac{V \kappa_T}{\frac{V}{N}} \frac{N}{V} = \frac{\kappa_T N^2}{V}$$

$$\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \frac{N^2}{V} k_B T$$

↳ másodrendű fluktuációk divergálnak

kritikus opaleszcencia

$$\Phi(T, V, N) = ?$$

$$\text{Létezik } S = k_B \ln Q + k_B \beta \langle \mathcal{H} \rangle + k_B \alpha \langle N \rangle$$

$\nwarrow \frac{1}{k_B T}$ $\nwarrow -\frac{\mu}{k_B T}$

$$-k_B T \ln Q = -TS + E - \mu N$$

$$= E - TS - \mu N = \Phi(T, V, \mu)$$

$$\Phi(T, V, \mu) = -k_B T \ln Q$$

$$(\text{kanonikus } F(T, V, N) = k_B T \ln Z)$$

$$\begin{aligned} \text{ideális gáz: } Q &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{-\alpha N} \int e^{-\beta \mathcal{H}} d\Gamma_N = \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{-\alpha N} \frac{V^N}{h^{3N} N!} (2\pi m k_B T)^{\frac{3N}{2}} = \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(e^{-\alpha} \frac{V}{h^3} (2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}} \right)^N = \\ &= e^{e^{-\alpha} \frac{V}{h^3} (2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\ln Q = e^{-\alpha} \frac{V}{h^3} (2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} \Phi(T, V, \mu) &= -k_B T \ln Q = -k_B T e^{-\alpha} \frac{V}{h^3} (2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}} = \\ &= -k_B T e^{+\mu/(k_B T)} \frac{V}{h^3} (2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$d\Phi = -S dT - p dV - N d\mu$$

$$\langle N \rangle = N = - \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \Big|_{T, V} = + k_B T e^{\frac{\mu}{k_B T}} \frac{V}{h^3} (2\pi m k_B T)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{k_B T} = \frac{-\Phi}{k_B T} = \frac{pV}{k_B T}$$

$$\Phi = -pV$$

$$pV = N k_B T \quad \checkmark$$

$$Q = \exp \left(e^{-\alpha} \frac{V}{h^3} \int e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} d^3 p \right) = \exp \left(\frac{V}{h^3} \int e^{-\beta (\frac{p^2}{2m} - \mu)} d^3 p \right)$$

$$\langle N \rangle = \frac{\partial \ln Q}{\partial (-\alpha)} = e^{-\alpha} \frac{V}{h^3} \int e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} d^3 p = \frac{V}{h^3} \int e^{-\beta (\frac{p^2}{2m} - \mu)} d^3 p$$

(szorzási szabály) $n_p = e^{-\beta (\epsilon_p - \mu)}$

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial (-\beta)} = \frac{V}{h^3} \int e^{-\beta (\frac{p^2}{2m} - \mu)} \left(\frac{p^2}{2m} - \mu \right) d^3 p =$$

(energia átlag) $\epsilon_p = \frac{p^2}{2m}$

$$= \frac{V}{h^3} \int (\epsilon_p - \mu) e^{-\beta (\epsilon_p - \mu)} d^3 p = \langle \mathcal{H} - \mu N \rangle$$

$$\langle H \rangle = \frac{V}{h^3} \int \epsilon_p n_p d^3p$$

$n_p = e^{-\beta(\epsilon_p - \mu)}$
 ↓
 klasszikus határeset a kvantumra

$$N = \frac{V (2\pi m k_B T)^{3/2}}{h^3} e^{\frac{\mu}{k_B T}}$$

$$e^{\frac{\mu}{k_B T}} = \frac{N}{V} \left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T} \right)^{3/2}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m k_B T}} \rightarrow \text{termikus de Broglie hullámhossz}$$

$$r_0 = \left(\frac{V}{N} \right)^{1/3}$$

$$e^{\frac{\mu}{k_B T}} = \left(\frac{\lambda}{r_0} \right)^3$$

mita gáz és/vagy T nagy $\Rightarrow e^{\frac{\mu}{k_B T}} \ll 1$

$$\frac{\mu}{k_B T} < 0 \text{ és } \left| \frac{\mu}{k_B T} \right| \gg 1$$

klassz. gáz kémiai potenciálja nagy negatív szám

$T \rightarrow$ kanonikus

$T, \mu \rightarrow$ nagykanonikus

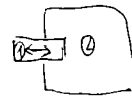
$T, p \rightarrow$ sokaság

$$Y = \iint e^{-\beta [H - (\mu)N]} d\Gamma dV$$

$$G(T, p, N) = -k_B T \ln Y$$

$$G = \mu N$$

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN$$



hőtartály
nyomástartály

(T, p, μ sokaság nincs, mert az intenzív állapotjelzőt összefüggnek)

Összefoglalás:

Microkanonikus
zárt rendszer

$$E, V, N$$

$$\Omega(E, V, N, \delta E) = \int_{E \in [E, E+\delta E]} d\Gamma$$

$$\Omega_0(E, V, N) = \int_{H(p, q) \leq E} d\Gamma$$

$$S = k_B \ln \Omega$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_{V, N} = \frac{1}{T}$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial N} \right|_{V, E} = -\frac{\mu}{T}$$

$$C_V = \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_V = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V$$

Kanonikus
hőtartály

$$\langle H \rangle, V, N$$

$$Z = \int e^{-\beta H(p, q)} d\Gamma$$

$$F(T, V, N) = -k_B T \ln Z$$

$$E = - \left. \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right|_{V, N}$$

$$dF = -SdT - pdV + \mu dN$$

$$S = - \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_{V, N}$$

⋮

Nagykanonikus

hőtartály és részecsketartály

$$\langle H \rangle, V, \langle N \rangle$$

$$Q = \sum_{N=0}^{\infty} \int e^{-\beta (H(p, q) - \mu N)} d\Gamma_N$$

$$\Phi(T, V, \mu) = -pV = -k_B T \ln Q$$

$$d\Phi = -SdT + pdV - Nd\mu$$

$$N = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right|_{T, V}$$

$$S = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right|_{V, \mu}$$

⋮

Kvantumstatistika

- hullámfn. $\rightarrow$ mindenféle koordinátától függ
 $\rightarrow$ nem bontható egyrészecské állapotokra
- szimmetria $\rightarrow$ vagy szimmetrikus (boson)
 $\rightarrow$ vagy antiszimmetrikus (fermion)
 a hullámfn. a részecskéire
 Slater-determináns, permanens a ψ -t
 bázis, ami a sokrészecske hullámfn.
 kifejtését lehetővé teszi
- az egész mögött a megkülönböztethet-
 lenség áll
- részrendszer nem rendelkezik a teljes
 (hullámfn. tulajdonságaival
 (kiintegrálunk a többi koordinátára)
 ilyen helyzetekben változtatni kell
 a leíráson $\Rightarrow$ sűrűségmátrix

Nem tudjuk melyik hullámfn.-nyel jellem-
 zett állapotban van a rendszer csak
 a valószínűségeket tudjuk:

$$\{p_k\} \quad \Psi_k$$

átlagok definíciója:

$$\langle A \rangle = \sum_k p_k \langle \Psi_k | A | \Psi_k \rangle$$

teh. a hullámfn.-t egy másik bázison
 kifejtjük: $|\Psi_k\rangle = \sum_l a_{kl} |\Psi'_l\rangle$

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_k p_k \langle \Psi_k | A | \Psi_k \rangle = \\ &= \sum_{lm} \underbrace{\sum_k p_k a_{kl}^* a_{km}}_{\rho_{lm}} \langle \Psi'_l | A | \Psi'_m \rangle \end{aligned}$$

$\rho_{lm} \rightarrow$ sűrűségmátrix

$$= \text{Sp}(\rho A)$$

független a bázisválasztástól a ρ

$$\text{Sp } \rho = 1 \Leftrightarrow \sum_{\epsilon} p_{\epsilon} = 1$$

Def: $S = -k_B \sum_{\epsilon} p_{\epsilon} \ln p_{\epsilon}$ entropia
 $= -k_B \sum_{\epsilon} [\rho \ln \rho] = -k_B \langle \ln \rho \rangle$

Hogyan válasszuk ezt a ρ sűrűségmátrixot?

Feltessük, hogy az entropia maximális ~~az~~ egyensúlyban az adott feltétel mellett.

Zárt rendszer, adott E

$|N_{\epsilon}\rangle$ legyenek ehhez az adott E -hez tartozó állapotok

$$E = \sum_{\epsilon} n_{\epsilon} \epsilon_{\epsilon} \quad (\text{többféle } n_{\epsilon} \text{ sorozat})$$

$\uparrow$ a betöltési számok, hogy egy ϵ_{ϵ} állapotban hány részecske van
 milyen az eloszlás, ha az entropia maximális? tudjuk, hogy az egyenletes eloszlásnál maximum az S
 $\Rightarrow$ degenerált állapotokon egyenletes az eloszlás

$\Omega(E)$ az E -hez tartozó állapotok száma (degeneráltság jöve)

$$\Omega(E) \Rightarrow p_{\epsilon} \equiv p = \frac{1}{\Omega}$$

$$S = -k_B \sum_{\epsilon} p_{\epsilon} \ln p_{\epsilon} = -k_B \sum \frac{1}{\Omega} \ln \frac{1}{\Omega} = k_B \ln \Omega(E)$$

minden olyan innentől, mint klasszikusan csak Ω -t fazisfokozatról átértelmeztük degeneráció fokának

Példa: harmónikus oszcillátor

$$E = \sum_{\epsilon} \epsilon_{\epsilon} n_{\epsilon} = \sum_{\epsilon} \left(\epsilon + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega n_{\epsilon} = \hbar \omega \sum_{\epsilon} \epsilon n_{\epsilon} + E_0$$

$$\sum_{\epsilon} n_{\epsilon} = N$$

$$\epsilon = \frac{E - E_0}{\hbar\omega} \quad \text{kvantumok száma}$$



... sok kvantum $\rightarrow$ hányféleképp lehet adott számú golyót adott számú dobozba tenni? $\Leftrightarrow E + N - 1$ objektum (E golyó, $N - 1$ fal) hányféleképpen rendezhető el?

$$\Omega = \binom{E+N-1}{N-1} = \frac{(E+N-1)!}{(N-1)! E!}$$

E és N is nagy $\Rightarrow$ Stirling - formula

03.02.

$$S = k_B \left\{ (E+N-1) \ln(E+N-1) - E \ln(E) - (N-1) \ln(N-1) \right\}$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial E} = \frac{k_B}{\hbar\omega} \ln \frac{E+N-1}{E} = \frac{1}{T} \quad \text{minden alkaloz a klasszikussal}$$

$$E = \frac{N-1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \approx \frac{N}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \quad E = E_0 + \frac{N\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

nincs elvipartíció kvantumosan

klasszikus határeset: $\hbar\omega \ll k_B T$

sorfejtés $E = E_0 + N k_B T$

N helyett $3N$ $E = 3N k_B T \rightarrow$ ez jóbb ki előbb

Klasszikusan a $\hbar$ értéket szabadon hagytuk.

Megköveteltük a korrespondenciát, akkor meg lehet határozni

Tehát E nagy klasszikus limitben vissza kell kapnunk az eredeti S -t ($N \rightarrow 3N$)

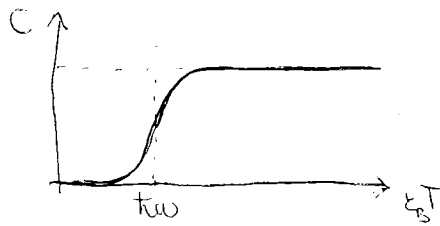
$$E \rightarrow \infty \quad S = 3N k_B \ln E + 3N k_B (1 - \ln 3N) + \dots$$

$$S_{cl} = 3N k_B \ln \left(\frac{E}{\hbar\omega} \right) + S_0$$

Tehát a klasszikus esetben jellező $\hbar$ -t azonosítanunk kell a Planck-állandóval

Fajlő: $\frac{\partial E}{\partial T} = N\hbar\omega \frac{e^{\hbar\omega/T}}{(e^{\hbar\omega/T} - 1)^2} \frac{\hbar\omega}{k_B} \frac{1}{T^2} = C$

$$C = N k_B \left(\frac{\hbar \omega}{k_B T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}}}{\left(e^{\frac{\hbar \omega}{k_B T}} - 1 \right)^2} \rightarrow \begin{cases} N k_B, & T \rightarrow \infty \\ N k_B \left(\frac{\hbar \omega}{k_B T} \right)^2 e^{-\frac{\hbar \omega}{k_B T}}, & T \rightarrow 0 \end{cases}$$



$\hbar \omega$ -val összemérhető $k_B T$ energia kell a rendszer gerjeszthetősége ~~alatt~~ $\rightarrow$ alatta te van fagyva a rendszer

Minden rendszernél, ahol energiahézag van az első és az alapállapot között, van egy küszöbenergia, ami alatt nem lehet gerjeszteni a rendszert.

Szilárd testek fajhőjének problémája: 1) elvi partitíció szerint $3Nk_B$ a fajhő, de alacsony hőmérsékleten csökkenni kezd

2) Einstein-modell: egy rezgési módot feltételezve exponenciális levegés

3) csatolt rezgést $\rightarrow$ fononokra bontjuk (megfelelő harmonikus oszcillátor)

fonongázra tyjón a töbös fajhő

Független spinrendszer = kétállapotú rendszer

$$\mathcal{H} = -H \sum_i S_i \quad S_i = \pm 1$$

ha a gerjesztési spektrum felülről korlátozott alacsony hőmérsékleten mindent az alsón ~~van~~ van egy magas hőmérséklet, ahol $N_+ = N_- = \frac{N}{2}$, ha tovább pumpáljuk a rendszert az entropia elkezdi csökkenni $\Rightarrow$ negatív abszolút hőmérséklet

van olyan eset, hogy a degeneráció fokát exponenciálisan nő az energiával, akkor egy idő után nem nő a hőmérséklet (felülről korl.)

Kanonikus sokaság:

$\langle \mathcal{H} \rangle$ adott

$$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i = \max. \quad \sum_i p_i = 1$$

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \sum_i p_i \langle \Psi_i | \mathcal{H} | \Psi_i \rangle = \sum_i p_i E_i = \text{adott}$$

$$p_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} \quad E_i \text{ a rendszer sajátértéke}$$

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i} = * \quad \text{összefoglalója az összes kvantumállapotnak!!!}$$

$\Omega(E_i)$ a degeneráció fokát

$$* = \sum_E \Omega(E) e^{-\beta E}$$

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad (\text{Lagrange - multiplikatortól belátható})$$

$$F = -k_B T \ln Z \quad (\text{belátható}) \quad \text{szabad energia}$$

Példa: oszcillátorrendszer

$$E_i = \sum_{\ell=1}^N n_{\ell} \hbar \omega + \frac{N \hbar \omega}{2}$$

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i} = \sum_{\{n_{\ell}\}} e^{-\beta \sum_{\ell} n_{\ell} \hbar \omega - \frac{\beta N \hbar \omega}{2}} = e^{-\frac{\beta N \hbar \omega}{2}} \sum_{\{n_{\ell}\}} \prod_{\ell=1}^N e^{-\beta \hbar \omega n_{\ell}} =$$

$n_{\ell} = 0, 1, 2, \dots$ az ℓ -edik függetlenek egymástól

$$= e^{-\frac{\beta N \hbar \omega}{2}} x^N \Rightarrow x = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega n} = \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}$$

$$F = -k_B T \ln Z = \frac{N \hbar \omega}{2} - k_B T N \ln x = \frac{N \hbar \omega}{2} + k_B T N \ln (1 - e^{-\beta \hbar \omega})$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H} \rangle &= \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{N \hbar \omega}{2} + \frac{N e^{-\beta \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} \hbar \omega = \\ &= \frac{N \hbar \omega}{2} + \frac{N \hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \quad \text{ezt már látnuk} \end{aligned}$$

Általánosítás: különböző frekvenciájú oszcillátorok

$$E = \sum_{\ell=1}^N n_{\ell} \hbar \omega_{\ell} + E_0$$

$$F = F_0 + k_B T \sum_{\ell=1}^N \ln (1 - e^{-\beta \hbar \omega_{\ell}})$$

Kétatomos molekulából álló gáz: transzlációs szabadsági fokok jelennek meg először, aztán a rotációs szabadsági fokok $\propto T^2$, aztán a rezgési szabadsági fokok $\propto T \rightarrow \varepsilon_{BT}$ nagyságrendű tagokat adhat a fajhőhöz $\Rightarrow$ fajhő lépcsős alakú a hőmérséklet függvényében. Termodinamika függ az anyag szerkezetétől. Nagy sokaságra vett átlagból vissza lehet következtetni az anyag szerkezetére.

Nagykanonikus sokaság:

a rendszer energiát és részecskét cserél a környezetével

$p_{e,N}$ az állapot valószínűsége N részecske esetén

$$\langle A \rangle = \sum_{e,N} p_{e,N} \langle \Psi_e^{(N)} | A | \Psi_e^{(N)} \rangle$$

$$S = -k_B \sum_{e,N} p_{e,N} \ln p_{e,N} = \max$$

$$\text{melléfeltétel: } - \sum_{e,N} p_{e,N} = 1$$

$$- \sum_{e,N} p_{e,N} \langle \Psi_e^{(N)} | \mathcal{H} | \Psi_e^{(N)} \rangle = \sum_{e,N} p_{e,N} E_e^{(N)} = \langle \mathcal{H} \rangle = \text{adott}$$

$$- \sum_{e,N} N p_{e,N} = \langle N \rangle = \text{adott}$$

megoldás:

$$p_{e,N} = \frac{1}{Q} e^{-\beta(E_e^{(N)} - \mu N)}$$

$$\text{ahol } Q = \sum_{e,N} e^{-\beta(E_e^{(N)} - \mu N)} \quad \begin{array}{l} \text{nagykanonikus} \\ \text{állapotösszeg} \end{array}$$

(kémiai potenciál az a paraméter, amivel a részecskeszám átlagát lehet beállítani egy részecske hozzáadásával mennyivel változik az energia)

nagykanonikus potenciál: $\Phi = -k_B T \ln Q$ ($= -pV$)

Fermi és Bose gáz:

ezek ideális gázok, vagyis az energia az egyrészecske-energiák összege

$$E_c^{(u)} = \sum_r n_r \epsilon_r \rightarrow \text{hányan vannak } \epsilon_r - \text{en}$$

↑
minden komponenst (pl. spin, impulzus komponensei) tartalmaz

$E_c^{(u)}$ N függése $\sum_r n_r = N$ -ből adódik

$$Q = \sum_{\{n_r\}} e^{-\beta(E_c^{(u)} - \mu N)} = \sum_{\{n_r\}} e^{-\beta \sum_r (\epsilon_r - \mu) n_r}$$

betöltési számok minden lehetséges sorozatára összegezni kell:

$$Q = \sum_{\{n_r\}} e^{-\beta \sum_r n_r (\epsilon_r - \mu)} = \sum_{\{n_r\}} \prod_r e^{-\beta n_r (\epsilon_r - \mu)} = *$$

n_r sorozatok egymástól függetlenek $\Rightarrow \prod_r$ felcserélhető

$$* = \prod_r \sum_{\{n_r\}} e^{-\beta n_r (\epsilon_r - \mu)} = *$$

a két statisztika:

Fermi - Dirac: $n_r = 0, 1$

Bose - Einstein: $n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} \prod_r (1 + e^{-\beta(\epsilon_r - \mu)}) \\ \prod_r (1 - e^{-\beta(\epsilon_r - \mu)})^{-1} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial (-\beta \epsilon_r)} = \langle n_r \rangle = \frac{\partial}{\partial (-\beta \epsilon_r)} (\pm 1) \sum_r \ln (1 \pm e^{-\beta(\epsilon_r - \mu)}) =$$

$$= \frac{e^{-\beta(\epsilon_r - \mu)}}{1 \pm e^{-\beta(\epsilon_r - \mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_r - \mu)} \pm 1} \quad !$$

$$\langle N \rangle = \sum_r \langle n_r \rangle = \sum_r \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_r - \mu)} \pm 1}$$

$$\langle H \rangle = \sum_r \epsilon_r \langle n_r \rangle = \sum_r \frac{\epsilon_r}{e^{\beta(\epsilon_r - \mu)} \pm 1}$$

ha az r . miből degenerációja $g(\epsilon_r)$

$$\langle H \rangle = \sum_{\epsilon} g(\epsilon) n(\epsilon) = \sum_{\epsilon} \frac{g(\epsilon) \epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} \pm 1}$$

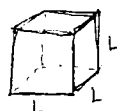
nem ~~esempliba~~, hanem dobozba rakjuk

$\sum_r \dots = (2s+1) \cdot \sum_{r_1, r_2, r_3} \dots$ $\nearrow$ doborban a 3 kvantumstádium
 ha nincs mágneses tér, akkor a spinre
 önnevezéssel $(2s+1)$ jön ki

$$\langle N \rangle = (2s+1) \sum_{r_1, r_2, r_3} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_r - \mu)} \pm 1} = (2s+1) \sum_{r_1, r_2, r_3} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_r - \mu)} \pm 1} \underset{\substack{\uparrow \nearrow \\ =1}}{\Delta r_1 \Delta r_2 \Delta r_3}$$

$$r_i \frac{\lambda_i}{2} = L \quad ; \quad p_i = \frac{h}{\lambda_i} = \frac{r_i h}{2L} \quad ; \quad \Delta p_i = \Delta r_i \frac{h}{2L}$$

$$\epsilon_{r_1, r_2, r_3} = \frac{h^2}{4L^2 2m} (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)$$



$$\langle N \rangle = (2s+1) \left(\frac{2L}{h} \right)^3 \frac{1}{8} \sum_{p_1, p_2, p_3} \langle n_p \rangle \Delta p_1 \Delta p_2 \Delta p_3$$

$\downarrow$
 pozitív térfogat helyett az
 egész térfogat alatt integrálni
 $\Rightarrow$ kompenzálni $1/8$ -al

$$= (2s+1) \frac{V}{h^3} \int \langle n_p \rangle d^3 p =$$

$$= (2s+1) \frac{V}{h^3} \int d^3 p \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} \pm 1} \quad \epsilon_p = \frac{p^2}{2m}$$

Klasszikusan vissza lehet lépni:

$$s=0 \quad \frac{\langle N \rangle}{V} = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{1}{e^{\beta \frac{p^2}{2m} - \beta \mu} \pm 1} =$$

$$\frac{p^2}{2mk_B T} \Rightarrow x^2 \quad = \frac{4\pi}{h^3} (2m k_B T)^{3/2} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^{x^2 - \frac{\mu}{k_B T}} \pm 1}$$

$$\bar{p} \sim \sqrt{m k_B T}, \quad \frac{\langle N \rangle}{V} \sim \frac{1}{r_0^3}$$

$$\Rightarrow \frac{h^3}{\bar{p}^3 r_0^3} = \int_0^\infty \dots = f\left(-\frac{\mu}{k_B T}\right)$$

$\hookrightarrow$ monoton csökkenő f. ~~...~~

mitör viselkedik a rendszer klasszikusan?

$$\Delta p \ll \bar{p}, \quad \Delta r \ll r_0, \quad \Delta p \Delta r \sim h \quad \Rightarrow h \ll \bar{p} r_0$$

$$\Rightarrow -\frac{\mu}{k_B T} \gg 1$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{dx x^2}{e^{x^2 - \frac{\mu}{k_B T}} \pm 1} \approx \int_0^\infty dx x^2 e^{-x^2 + \frac{\mu}{k_B T}} \quad \nwarrow \text{Boltzmann-statisztika}$$

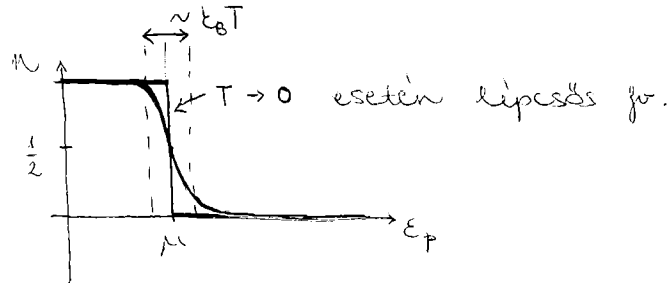
másik lépés: $\lambda_T = \frac{h}{\bar{p}} \ll r_0$ a klassz. limit

még másik lépés: $\frac{h^2}{m r_0^2} \ll k_B T$

Fermi-eloszlás:

$$n_p = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} + 1}$$

$\mu > 0$ eset



Fermi-energia $\rightarrow$ a nulla hőmérsékleten ~~a~~ addig vannak betöltve a szintek $\epsilon_F = \mu(T=0)$

Fermi-rendszerek alacsony hőmérsékletű viselkedése mindig olyan, hogy a külső hatások csak a Fermi-nívó körüli részre hat ($\Rightarrow$ kis fajhő, kis susceptibilitás, stb.)

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= (2s+1) \frac{V}{h^3} 4\pi \int_0^\infty dp p^2 \frac{p^2}{2m} \frac{1}{e^{\frac{p^2}{2mk_B T} - \frac{\mu}{k_B T}} + 1} = \\ &= (2s+1) \frac{4\pi V}{h^3} k_B T (2m k_B T)^{3/2} \int_0^\infty dx \frac{x^4}{e^{x^2 - \frac{\mu}{k_B T}} + 1} \end{aligned}$$

$$\langle N \rangle = (2s+1) \frac{4\pi V}{h^3} (2m k_B T)^{3/2} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^{x^2 - \frac{\mu}{k_B T}} + 1}$$

$$\frac{\langle H \rangle}{\langle N \rangle} = k_B T f_{\pm} \left(-\frac{\mu}{k_B T} \right)$$

Ila $-\frac{\mu}{k_B T} \rightarrow \infty$ akkor $f_{\pm} \rightarrow \frac{3}{2} \Rightarrow$ elvipartitív

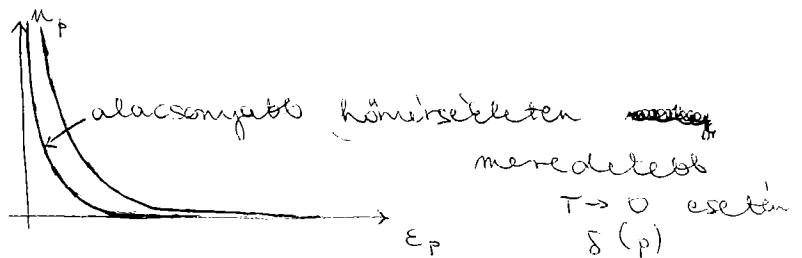
alacsony hőmérsékleten nincs elvipartitív.

Bose-eloszlás:

$$n_p = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} - 1}$$

$\mu \leq 0$ mindig

egyensúlyban csak negatív lehet μ



$$\ln Q = \pm \sum_r \ln(1 \pm e^{-\beta(\epsilon_r - \mu)}) = \pm (2s+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \ln(1 \pm e^{-\beta(\frac{p^2}{2m} - \mu)}).$$

$$= \frac{2}{3} \beta \langle \mathcal{H} \rangle$$

$$pV = -\Phi = k_B T \ln Q = \frac{2}{3} \langle \mathcal{H} \rangle \quad \text{erőnyben marad}$$

$$= \frac{2}{3} \langle \mathcal{H} \rangle = \frac{2}{3} k_B T \langle N \rangle \cdot f_{\pm} \left(-\frac{\mu}{k_B T} \right)$$

$$f_{\pm} \left(-\frac{\mu}{k_B T} \right) = \frac{\int_0^\infty dx \frac{x^4}{e^{-\frac{\mu}{k_B T} + x^2} \pm 1}}{\int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^{-\frac{\mu}{k_B T} + x^2} \pm 1}}$$

állapotegyenletet $\mu(N)$ jó. behelyettesítésével lehet kapni, hogy hogy invertáljuk az $N(\mu)$ összefüggést eredmény: alacsony hőmérsékleten:

$$pV = N k_B T \left(1 \pm \frac{\pi^{1/2}}{2(2s+1)} \frac{N^{1/3}}{V(m k_B T)^{3/2}} \right)$$

nyomás fermionokra nagyobb, bozonokra kisebb, mint klasszikusan

Fermionok ($s = \frac{1}{2}$)

03.09.

$$\langle N \rangle = 2 \frac{V}{h^3} \int \langle n_p \rangle d^3 p = 2 \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \langle n_p \rangle =$$

$$p = \sqrt{2m\epsilon}$$

$$= 2 \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{1}{2} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\frac{(\epsilon - \mu)}{k_B T}} + 1}$$

$$\langle \mathcal{H} \rangle = 2 \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{1}{2} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}} + 1}$$

$$T = 0$$

$$\langle N \rangle = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\mu \epsilon^{1/2} d\epsilon = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{\mu^{3/2}}{(3/2)}$$

$$\mu = \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} h^2 \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} \frac{1}{2m} \equiv \epsilon_F \equiv \frac{p_F^2}{2m} \leftarrow \text{Fermi-impulzus}$$

$$p_F = \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} h \left(\frac{N}{V} \right)^{1/3} = \left(\frac{9}{32\pi^2} \right)^{1/3} \frac{h}{r_0} \quad \text{ahol } r_0 = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{V}{N} \right)^{1/3}$$

(Heisenberg megnyilvánulása) $p_F r_0 \sim h$

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\mu \epsilon^{3/2} d\epsilon = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{\mu^{5/2}}{(5/2)} \frac{3}{2} \frac{\mu}{5/2} = \frac{3}{5} N \mu$$

$$\frac{\langle \mathcal{H} \rangle}{\langle N \rangle} = \frac{3}{5} \epsilon_F = \frac{3}{5} \mu = \bar{\epsilon} \quad (\text{ez sem hasonlít az eüvpartícióra})$$

$$pV = \frac{2}{3} \langle \mathcal{H} \rangle \Rightarrow p = \frac{2}{5} \frac{N}{V} \mu \neq 0$$

Pauli-elv miatt $T = 0$ esetén is rugódossá a falat

$$p_F \sim h g^{1/3} \quad \left(g = \frac{N}{V}\right) \Rightarrow N \sim \frac{V p_F^3}{h^3} \quad , \quad \varepsilon_F \sim \frac{h^2}{2m} g^{2/3} \quad ,$$

energia $E \sim N \varepsilon_F \sim N \frac{h^2}{2m} g^{2/3} = \frac{h^2}{2m} N^{5/3} V^{-2/3}$

nyomás $p \sim \frac{h^2}{2m} g^{5/3}$

alacsony hőmérsékleten vagyunk $T \approx 0$

$$\varepsilon_0 T_F = \mu_0 = \varepsilon_F \quad T \ll T_F$$

becsüljük meg T_F -et: (fémekben elektronok)

$$r_0 \sim 10^{-10} \text{ m} \rightarrow p_F \sim \frac{10^{34}}{10^{-10}} \sim 10^{-24} \text{ m} \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$\mu \sim \frac{p_F^2}{2m} \sim \frac{10^{-48}}{10^{-30}} \sim 10^{-18} \text{ J}$$

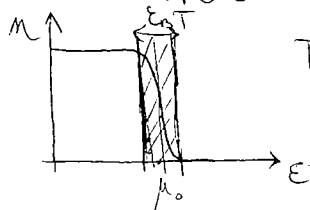
$$\frac{\mu}{\varepsilon_0} \sim \frac{10^{-18}}{10^{-23}} \sim 10^5 \text{ K} \Rightarrow \text{elektronok minden értelmes hőmérsékleten}$$

van értelme

leten alacsony

emlék beszélni

hőmérséklettel vehető



$T \ll T_F$ esetén a felfázult hejban lévő részecskék száma:

$$N' \approx \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \varepsilon_F^{1/2} \varepsilon_0 T \sim$$

$$\sim \underbrace{\frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{\varepsilon_F^{3/2}}{\frac{3}{2}}}_{N} \cdot \frac{\varepsilon_0 T}{\varepsilon_F} \sim N \frac{\varepsilon_0 T}{\varepsilon_F} = N \frac{T}{T_F}$$

$$N' \sim N \left(\frac{T}{T_F}\right) \ll N$$

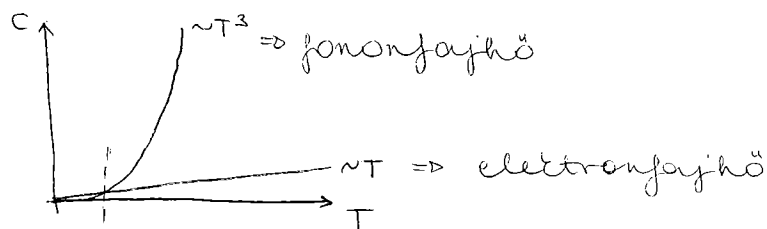
erre az N' részecskére $\approx$ érvényes a Boltzmann-statisztika $\rightarrow$ becsülhető a rendszer energiája

$$\Rightarrow E \approx E_0 + \text{const} \cdot N' \varepsilon_0 T = E_0 + \text{const} \cdot N \frac{(\varepsilon_0 T)^2}{\varepsilon_F}$$

$$\frac{\partial E}{\partial T} = C = \text{const} \cdot \frac{N \varepsilon_0^2 T}{\varepsilon_0 T_F} = \text{const} \cdot N \varepsilon_0 \frac{T}{T_F}$$

elektronok alig adnak járulékot a szilárd testek fajhőjébe

csak legalacsonyabb hőmérsékleten számít



Fermi - rendszer mágneses térben:

$$\epsilon_B T \ll \epsilon_F$$

$$\mu_B H \ll \epsilon_B T \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2mc} \quad \text{Bohr - magneton}$$

$$M = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial H} \right)_{T, V, \mu} \quad \text{magneseszettség}$$

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} \pm \mu_B H \quad \mu \text{ helyére } \mu \mp \mu_B H \quad \leftarrow \text{külső tér}$$

$\Rightarrow$ felhasad a spin szerinti degeneráció

$$\Phi = \frac{1}{2} \Phi_0 (\mu + \mu_B H) + \frac{1}{2} \Phi_0 (\mu - \mu_B H)$$

$\uparrow$ tér nélküli termodinamitai potenciál

$\mu_B H$ kicsi $\Rightarrow$ sorfejtés vezető rendjé Φ .

$$\Phi \approx \Phi_0 + \frac{1}{2} \mu_B^2 H^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu^2}$$

$$M = -H \mu_B^2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \mu^2}, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mu} = -N$$

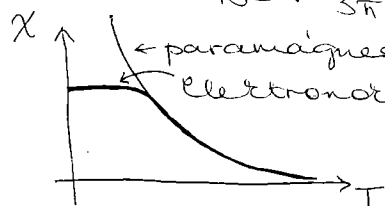
$$\chi = \frac{\mu_B^2}{V} \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_{T, V}$$

$\uparrow$ egységnyi térfogatra eső susceptibilitás

$T=0$ - nál

$$N = V \frac{(2m\mu)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}$$

$$\Rightarrow \chi = \frac{\mu_B^2 p_F m}{\pi^2 \hbar^3} \rightarrow \text{const.}$$



paramágneses susceptibilitás elektronokra klasszikusan $\sim \frac{1}{T}$
konstanshoz tart a paramágneses járulék

Bosonok:

pl. - szuperfolyékony hélium

- alkáli gázok (optikai csapdával megfagott nagyban ritka gáz)

alacsony hőmérsékletű bose gáz

$$T=0 \quad \langle n \rangle = \langle N \rangle$$

$$\langle n_r \rangle = 0, \quad r \neq 0$$

$$\epsilon_0 - \mu \geq 0$$

gyakorlatilag negatívnak kell lenni a kémiai potenciálnak az egyensúlyhoz

$$n_0 = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_0 - \mu)} - 1} \Rightarrow e^{\frac{\epsilon_0 - \mu}{k_B T}} = 1 + \frac{1}{n_0} \quad , \quad \frac{\epsilon_0 - \mu}{k_B T} = \ln\left(1 + \frac{1}{n_0}\right) \rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)$$

$$\epsilon_0 - \mu = \frac{k_B T}{N} + k_B T \cdot O\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

csak így választhatjuk meg μ -t, hogy így maradjon a rendszer

kágyan vannak az első gerjeszteti szinten

$$n_1 = \frac{1}{e^{(\epsilon_1 + \frac{\hbar^2}{mL^2} - \mu)\beta} - 1} \quad , \quad \text{ha } \epsilon_0 = \mu \quad , \quad \text{akkor } n_1 \approx \frac{mL^2 k_B T}{\hbar^2} \ll N$$

↑
dobozba
zart részecskével modellezve a nivót $\rightarrow$ első $\frac{\hbar^2}{mL^2}$

$L^2 \ll L^3$

ha nő a hőmérséklet elterjedhet paraboláig
folyoratosan $\rightarrow$ eloszlásnak sepen a nivót
között, a nulladik ki is ümlhet

0 hőmérsékleten van makroszkopikus álla-
pot $\rightarrow$ makroszkopikus tövetermenyet

másik állapot nem lehet $O(N)$ részecskével
betölve $\rightarrow$ nem lehet makroszkopikus be-
töltöttség csak az alapállapotban

μ amíg az alapállapot makroszkopikus rö-
gizett után negatív értéket vesz fel.

oda kell figyelni erre a kiemelt alapállapot-
ra, amikor a Σ -t integrállal alakítjuk,
le kell választani az alapállapotot

induljunk el magas hőmérsékletre

$$N = \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\frac{\epsilon - \mu}{k_B T}} - 1} =$$

$$= \frac{2\pi V (2m k_B T)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty dx \frac{x^{1/2}}{e^{x + \frac{\mu}{k_B T}} - 1}$$

hogy kell megválasztani μ -t, hogy csötte-

nő hőmérséklet mellett μ állandó legyen
 $F\left(\frac{\mu}{k_B T}\right)$ fr. az argumentum csökkenő fr-e
 csökken a hőmérséklet $\Rightarrow |\mu|$ is csökken

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty dx \frac{x^{1/2}}{e^x - 1} &= \int_0^\infty dx x^{1/2} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \int_0^\infty dx x^{1/2} e^{-x} \sum_{n=0}^\infty e^{-nx} = \\
 &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty dx x^{1/2} e^{-(n+1)x} = \sum_{n=0}^\infty \underbrace{\frac{1}{(n+1)^{3/2}}}_{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \underbrace{\int_0^\infty dy y^{1/2} e^{-y}}_{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}} = A \quad \uparrow \text{szám}
 \end{aligned}$$

Riemann -féle $\int$ -fr.
 véges érték $\approx 2,61...$

ha $\mu = 0$ az integrál véges értékbe fut be
 de $T^{3/2}$ miatt csökken N

$\mu = 0$ -nál eljut el azt a helyzetet,
 amikor makroszkopikus betöltöttsége lesz
 az alapállapotnak $\rightarrow$ járulékat ki kell
 különíteni, hogy N konstans marad-
 hasson, mert az integrállal alakítás
 nem jó a makroszkopikus betöltöttségkor

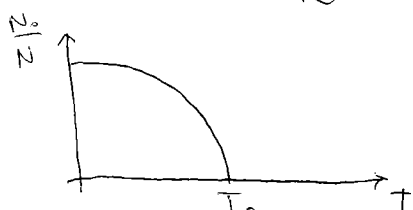
$$N_\bullet = \frac{2\pi V (2m)^{3/2} (k_B T_0)^{3/2}}{h^3} A \quad \rightarrow \text{ez definiálja a}$$

$\mu = 0$ -hoz tartozó T_0 hőmérsékletet

T_0 alatt:

$$N = N_0 + \frac{2\pi A (2m k_B T)^{3/2} V}{h^3} = \frac{2\pi A (2m k_B T_0)^{3/2} V}{h^3}$$

$$N_0 = \frac{2\pi V (2m)^{3/2} A}{h^3} k_B^{3/2} (T_0^{3/2} - T^{3/2}) \rightarrow N_0(T) \quad T < T_0$$



^4He gáz $\rightarrow$ bozon rendszer $\rightarrow$ rendkívül gyengén
 kötött rendszer $\rightarrow$ 20 atm kell, hogy meg-

fagyjon, folyadék marad minden ismert hőmérsékleten $\approx 4\text{ K}$ alatt, $\approx 2,1\text{ K}$ -en fázisátalakulás $\rightarrow$ megszűnik a belső ellenállás, korlátlanul nedvesít $\rightarrow$ superfolyékony folyadék állapotban betöltetkezik egy Bose-kondenzáció $\rightarrow$ ^{new id. gáz!} (1920-as években a kondenzáció elméletét tudták, 1930-as évektől alacsony hőmérsékletű fűtés, 1940-es évektől a He különleges tulajdonságait tudták...) a kondenzáció 100%-os elvileg $T=0$ -nál.

ideális Bose gáz megvalósítható kísérletileg (1995) (folyékony He fölött lévő gáz nem jó, mert olyan ritka, hogy nem követi a kvantumstatistikát)

alkáli gázokból valósították meg elektromágneses csapdákkal: • ^{23}Na , $T_c = 2\mu\text{K}$, 10^6 atom, 10^9 atom, $g \sim 10^{14}/\text{cm}^3$ • ^{87}Rb , $T_c = 170\text{ nK}$, $10^5 - 10^6$ atom, $g \sim 10^{12}/\text{cm}^3$
 $T \approx 0$

$$E \sim VT^{5/4} \sim pV \sim \Phi$$

$$S = -\frac{\partial \Phi}{\partial T} \sim T^{3/2} \rightarrow 0, T \rightarrow 0$$

ez egy rendkívüli fázisátalakulás, hiszen a fázisátalakulást vonzó kölcsönhatások irányítják általában, kivétel a Bose-kondenzáció, ahol a statisztikából jön ki a fázisátalakulás, másrészt kivétel a perkoláció $\rightarrow$ geometriai kényszer

(2D-s Bose-gáznál nem jön ki a matematikából átmenet)

Oscillátorm rendszerek:

Üregbe zárt sugárzási tér:

$$\omega = c\varepsilon = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$\omega_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\pi c}{L} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

$$n \frac{\lambda_n}{2} = L = \frac{L}{\pi} \varepsilon_n$$

$$F = F_0 + \varepsilon_B T \sum \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega_\varepsilon})$$

$$\sum_{\varepsilon} \dots = 2 \sum_{\substack{\varepsilon \\ n_1, n_2, n_3 > 0}} \Delta n_1 \Delta n_2 \Delta n_3 = 2 \sum_{\varepsilon_i > 0} \dots \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \Delta \varepsilon_1 \Delta \varepsilon_2 \Delta \varepsilon_3 \Rightarrow$$

polarizációs irányok

$$\Rightarrow 2 \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \int_{\varepsilon_i > 0} d^3 \varepsilon \dots = 2 \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \frac{1}{8} \int d^3 \varepsilon \dots = 2 \frac{V}{8\pi^3} \int d^3 \varepsilon \dots =$$

$$= 2 \frac{V}{8\pi^3} 4\pi \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^2 \dots = \frac{2V}{2\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \dots \equiv \int d\omega g(\omega) \dots$$

$$d\omega g(\omega) = \frac{V \omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega$$

↳ állapotsűrűség $(\omega, \omega + d\omega)$ -ban db

$$F = F_0 + \varepsilon_B T \int_0^\infty d\omega g(\omega) \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega})$$

$$\frac{\partial F}{\partial T} = -S = \varepsilon_B \int_0^\infty d\omega g(\omega) \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) + \varepsilon_B T \int_0^\infty d\omega g(\omega) \cdot$$

$$\cdot \frac{-e^{-\beta \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} \cdot \frac{\hbar \omega}{\varepsilon_B T^2} =$$

$$= \varepsilon_B \int_0^\infty d\omega g(\omega) \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) + \frac{1}{T} \int_0^\infty d\omega g(\omega) \frac{\hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

$$F = E - TS$$

$$E = E_0 + \int_0^\infty d\omega g(\omega) \frac{\hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

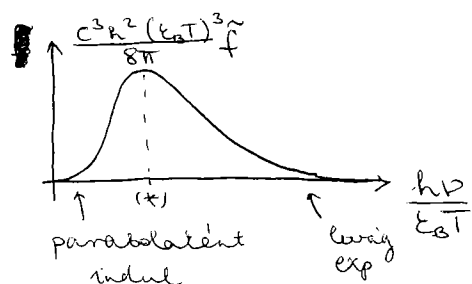
$$\frac{E}{V} = \frac{E_0}{V} + \int_0^\infty d\omega f(\omega) \rightarrow f(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \quad \text{Planck}$$

$$\frac{E}{V} = \frac{E_0}{V} + \int_0^\infty d\nu \tilde{f}(\nu) \rightarrow \tilde{f}(\nu) = \frac{8\pi \hbar \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \nu}{\varepsilon_B T}} - 1}$$

$$\tilde{f}(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{1}{h^2 (\varepsilon_B T)^3} \frac{\left(\frac{\hbar \nu}{\varepsilon_B T}\right)^3}{e^{\left(\frac{\hbar \nu}{\varepsilon_B T}\right)} - 1}$$

$$\frac{x^3}{e^x - 1}$$

$$(*) \frac{\hbar \nu_{\max}}{\varepsilon_B T} \approx 2,82$$



Wien - fele eltolódási tör.

$$\nu_{\max} = 2,82 \frac{k_B T}{h} = 5,9 \cdot 10^{10} \frac{T}{\text{sec}}$$

Wien - tr.

Széles eloszlás

$$E = E_0 + V \frac{8\pi}{c^3 h^3} (k_B T)^4 \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}}_{\frac{\pi^4}{15}} = E_0 + V \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 c^3 h^3} T^4$$

$$\frac{E}{V} = \frac{E_0}{V} + \frac{8\pi^5 k_B^4}{15 c^3 h^3} T^4 \sim T^4 \quad \text{Stefan - Boltzmann}$$

$$\approx 7,56 \cdot 10^{-16} \frac{\text{J}}{\text{K}^4 \text{m}^3}$$

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} \sim T^3$$

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = - \frac{k_B T}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) =$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 u ω
 $u(0)=0$ $u(\infty)=0$

$$= - \frac{1}{3\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \omega^2 d\omega = \frac{1}{3} \frac{E}{V}$$

$$\nu_{\max} = 2,82 \frac{\epsilon_0 T}{h} = 5,9 \cdot 10^{10} \frac{T}{\text{sec}} \quad \text{Wien - tv.}$$

szeles eloslas

$$E = E_0 + V \frac{8\pi}{c^3 h^3} (\epsilon_0 T)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = E_0 + V \frac{8\pi^5 \epsilon_0^4}{15 c^3 h^3} T^4$$

$$\frac{E}{V} = \frac{E_0}{V} + \frac{8\pi^5 \epsilon_0^4}{15 c^3 h^3} T^4 \sim T^4 \quad \text{Stefan - Boltzmann}$$

$$\approx 7,56 \cdot 10^{-16} \frac{\text{J}}{\text{K}^4 \text{m}^3}$$

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} \sim T^3$$

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = - \frac{\epsilon_0 T}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) =$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 u ω
 $u(0)=0$ $v(\infty)=0$

$$= - \frac{1}{3\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \omega^2 d\omega = \frac{1}{3} \frac{E}{V}$$

$$\frac{E}{V} = \frac{E_0}{V} + \int_0^\infty d\omega f(\omega) \quad \Rightarrow \quad [f] = \frac{\text{Js}}{\text{m}^3} = \frac{\epsilon_0}{\text{ms}} = \epsilon_0^1 \text{m}^{-1} \text{s}^{-1}$$

03.29.

spektralis eloslas

f	ϵ_0	m	s
f	1	-1	-1
ω	0	0	-1
c	0	1	-1
$\epsilon_0 T$	1	2	-2

} linearisan függetlenek
(mincs dimenziótlan, amit
elő tudunk állítani)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\omega^2}{c^3} \epsilon_0 T \sim f$$

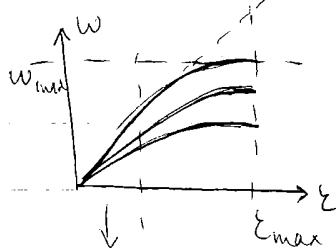
$f = \frac{\omega^2}{c^3} \epsilon_0 T g(\dots)$ dimenzióanalízis visszaadja a Rayleigh-
 $\uparrow$ dimenziótlan Jeans - tv-t
 $\uparrow$ ezzel nem lehet kiverni
 $\uparrow$ nem tudjuk $\int_0^\infty \omega^2 d\omega$ -t integrálni

de már tudjuk, hogy g olyan, hogy a maximuma a f-nél arányos $\epsilon_0 T$ -vel.

$$g = g\left(\frac{\omega}{\epsilon_0 T} \frac{h}{c}\right) \quad \left[\frac{\omega}{\epsilon_0 T}\right] = \frac{\text{s}}{\epsilon_0 \text{m}^2} \rightarrow \text{kell egy hata-}$$

$$[h] = \frac{\epsilon_0 \text{m}^2}{\text{s}} \quad \text{dimenziójú alandó}$$

Oscillátorrendszerek - Rácsrezgések

spektrum $\rightarrow$ kristályos anyag (3 irány)

lineáris ami a hangnak felel meg

$$z \rightarrow 0 \quad w = cz$$

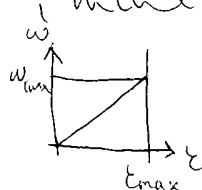
$$z_{\max} \sim \frac{2\pi}{\lambda_{\min}} \sim \frac{2\pi}{a} \rightarrow \text{rácsállandó} (10^{-10} \text{ m})$$

$$w_{\max} \sim cz_{\max} \quad (\text{extrapolációval}) \sim \frac{c}{a} \sim 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} / 10^{-10} \text{ m} \\ \sim 10^{13} \frac{1}{\text{s}}$$

$$\hbar w_{\max} \sim 10^{-34} 10^{13} \sim k_B T_0 \sim 10^{-21} T_0 \Rightarrow T_0 \sim 100 \text{ K}$$

Alacsony hőmérsékleten csak a hosszú hullámhosszú fononok jelezhetők $\rightarrow$ ezet dominálja a termodinamikai viselkedést. Alacsony hőmérsékleten a fononok olyanok, mint a fotonok, csak más a sebesség.

Debye



így modellezzük

az oscillatorok száma:

$$G = \int_0^{w_{\max}} dw g(w) = \int_0^{w_{\max}} dw \frac{V}{\pi^2 c_{\text{de}}^3} w^2 = \frac{V}{\pi^2 c_{\text{de}}^3} \frac{w_{\max}^3}{3} = 3L$$

$\uparrow$
Lohschmidt-szám
Avogadro-szám

átlagos hangsebesség: $\frac{1}{c_{\text{de}}^3} = \frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_{\text{tr}}^3}$

$$\Rightarrow \text{Debye-hőmérséklet } k_B T_D = \hbar w_{\max}$$

$$E = E_0 + \int_0^{w_{\max}} dw g(w) \frac{\hbar w}{e^{\frac{\hbar w}{k_B T}} - 1} = E_0 + \int_0^{w_{\max}} dw \frac{V}{\pi^2 c_{\text{de}}^3} w^2 \frac{\hbar w}{e^{\frac{\hbar w}{k_B T}} - 1} =$$

$$= E_0 + \frac{V \hbar^{-3}}{\pi^2 c_{\text{de}}^3} (k_B T)^4 \int_0^{\frac{\hbar w_{\max}}{k_B T}} dx \frac{x^3}{e^x - 1}$$

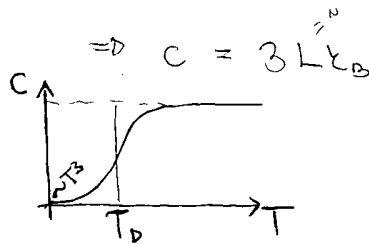
$$\int_0^{\frac{\hbar \omega_{\max}}{k_B T}} \frac{x^3}{e^x - 1} \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}, \text{ ha } \hbar \omega_{\max} \gg k_B T$$

alacsony hőm.

$\Rightarrow c \sim T^3 \Rightarrow$ szilárd test fajhője T^3 -nel indul alacsony hőmérsékleten, amit $\omega_{\max}$ határoz meg magas hőmérsékleten: $\hbar \omega_{\max} \ll k_B T$

$$\rightarrow \frac{V k^{-3}}{\pi^2 c_{\text{ph}}^3} (k_B T)^4 \frac{1}{3} \left(\frac{\hbar \omega_{\max}}{k_B T} \right)^3 = 3 L k_B T$$

"N"



fentben: nagyon kicsi hőmérsékleten elektronok dominálnak

Kölcsönható rendszerek

Klasszikus ritka gáz:

$$-\beta F = \ln Z$$

$$Z = \frac{1}{N! h^{3N}} \int dp dq e^{-\beta \mathcal{H}(p, q)}$$

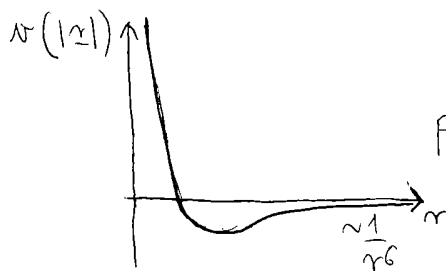
$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_0 = \sum_i \frac{p_i^2}{2m}, \quad \mathcal{H}_1 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v_{ij}$$

kinetikus en. pot.kölcsönhatás

$$Z_0 = \frac{V^N}{N! \lambda^{3N}}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m k_B T}} \quad \text{termikus hullámhossz}$$

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{1}{V^N} \int dr_1 \dots dr_N e^{-\beta \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} v(r_i - r_j)}$$



pl. Lennard-Jones potenciál

ha megpróbáljuk sorfejtteni a rövidtávú

erős tag miatt nem tudjuk integrálni $\rightarrow$ ultra-
ibolya probléma

így ezzel a kifejezéssel se hosszitávú se rövid-
távú esetben nem tudunk a potenciál szerint
sorbafejteni

át lehet a perturbációs sor sűrűség szerinti
perturbáció ~~előválogatás~~ alakítani és a rövid-
távú leválasztás eltűnik belőle, amit fixitailag
értünk

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{1}{V^N} \int dr_1 \dots dr_N \prod_{\substack{i,j \\ i < j}} e^{-\frac{k}{2} v_{ij}} = \frac{1}{V^N} \int dr_1 \dots dr_N \prod_{\substack{i,j \\ i < j}} e^{-\beta v_{ij}} =$$

$$= \frac{1}{V^N} \int dr_1 \dots dr_N \prod_{\substack{i,j \\ i < j}} \underbrace{(e^{-\beta v_{ij}} - 1 + 1)}_{f_{ij}}$$

$$= 1 + \frac{1}{V^N} \int dr_1 \dots dr_N \left(\sum_{i,j} f_{ij} + \sum_{\substack{i,j,k \\ i < j < k}} f_{ij} f_{jk} f_{ki} + \dots \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{V^2} \int dr_i dr_j f_{ij} \cdot \frac{N(N-1)}{2} + \dots$$

$$= 1 + \frac{N(N-1)}{2V} \int dr f(r) + \dots \quad \left(\frac{r_i + r_j}{2} = r_{TKP} \Rightarrow V \right)$$

$r = r_i - r_j$ relatív koordináta

$$= 1 + \frac{1}{2} N g \int dr f(r) + O(g^2) \quad g = \frac{N}{V} \rightarrow \text{écsé}$$

$$\ln \left(\frac{Z}{Z_0} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{2} N g \int dr f(r) + \dots \right) = \frac{1}{2} N g \int dr f(r)$$

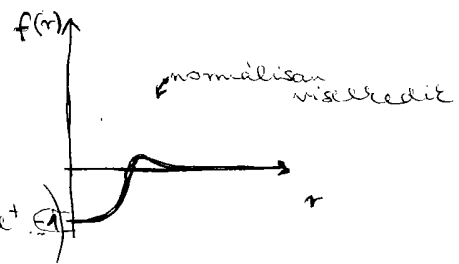
$$\ln Z - \ln Z_0 = -\beta F + \beta F_0 = \frac{1}{2} N g \int dr f(r)$$

$$F = F_0 - \frac{1}{2} k_B T N g \int dr f(r)$$

$$g \frac{\partial F}{\partial g} = g \frac{\partial F}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial g} = g \frac{\partial F}{\partial V} \left(-\frac{N}{g^2} \right) = -\frac{N}{g} \frac{\partial F}{\partial V} = -V \frac{\partial F}{\partial V} = pV$$

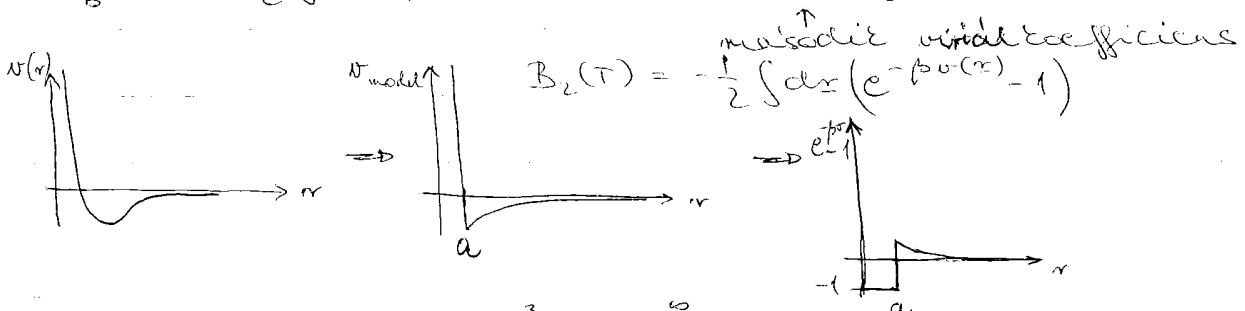
$$g \frac{\partial F}{\partial g} = g \frac{\partial F_0}{\partial g} - \frac{1}{2} k_B T N g \int dr f(r) = pV$$

$$pV = N k_B T - \frac{1}{2} k_B T N g \int dr f(r)$$



sűrűség egyre
magasabb hatványai

$$\frac{pV}{Nk_B T} = 1 - \frac{1}{2} \int dr f(r) g + \dots \equiv 1 + B_2(T) g$$



$$\int dr (e^{-\beta u(r)} - 1) = -4\pi \frac{a^3}{3} + 4\pi \int_a^\infty dr r^2 (e^{-\beta u(r)} - 1) \approx -4\pi \frac{a^3}{3} + 4\pi \int_a^\infty dr r^2 (-\beta u(r))$$

$$= -4\pi \frac{a^3}{3} + 4\pi \int_a^\infty dr r^2 (-\beta u(r))$$

- $\bar{u}$ ← átlagos potenciál

$$\frac{pV}{Nk_B T} = 1 + \frac{1}{2} g \frac{4\pi a^3}{3} + \frac{\bar{u}}{k_B T} \frac{1}{2} g + \dots$$

$$p = g k_B T + \frac{1}{2} \frac{4\pi}{3} a^3 k_B T g^2 + \frac{1}{2} g^2 \bar{u}$$

$$p - \frac{1}{2} g^2 \bar{u} = g k_B T \left(1 + \frac{2\pi}{3} a^3 g \right)$$

$$\left(p + \frac{1}{2} g^2 |\bar{u}| \right) \frac{1}{\frac{2\pi}{3} a^3 g + 1} \approx \left(p + \frac{1}{2} g^2 |\bar{u}| \right) \left(1 - \frac{2\pi}{3} g a^3 \right) = g k_B T$$

$$\left(p + \frac{\tilde{a}}{V^2} \right) (V - b) = N k_B T$$

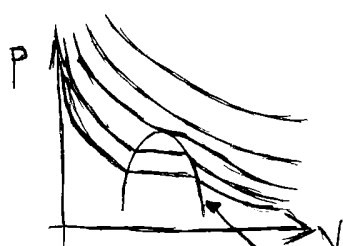
$$\frac{\tilde{a}}{V^2} = \frac{1}{2} g^2 |\bar{u}| = \frac{N^2 |\bar{u}|}{V^2 2}$$

$$b = \frac{2\pi}{3} a^3 N$$

kis sűrűség: $\frac{2\pi}{3} a^3 g = \frac{2\pi}{3} a^3 \frac{N}{V} \ll 1$

$u \sim r^{-\alpha}$ α legyen > 3

(Coulomb - potenciál nem jó)



kritikus hőmérséklet

Maxwell szerkesztés

egyensúlyban a két fázis

(a jelenség végtelen sok részecske kollektív működéséből jön ki $\rightarrow$ kritikus opaleszcencia $\rightarrow$ matematikus cseppet $\Rightarrow$ rendeződés nem a VdW egyenlet alapján megy, mert nem perturbatív a jelenség)

Töltött rendszer:

pl. elektrolit, plazma $\rightarrow$ szaladgálnak az ionok

az elektronok sokkal gyorsabbak (10000), mint az ionok $\rightarrow$ mintha ellent pozitív háttér lenne

-e töltés az origóban

r távolságra $\phi(r) = \frac{e^2}{r}$ lenne

negatív töltés körül kialakul egy pozitív felhő, mert ~~egy~~ eltaszította a negatívokat



ha messziről nézzük ez az ármylekőzés

az összes elektron úgy próbál elhelyezkedni, hogy legyen körülötte pozitív felhő, mert a Coulomb-erőcsönhatás hosszitávú és erős

effektív kölcsönhatás a csúpasz helyett

$$\phi_{\text{eff}}(r) = \phi(r) + \int \frac{e^2}{|r-r'|} (\rho(r') - \rho_0) d^3r'$$

$\frac{e^2}{|r-r'|}$

↑
elektronok
sűrűsége

↑
háttér
sűrűsége

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\frac{\phi(r)}{k_B T}}$$

lenne, ha nem lenne kölcsönhatás

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\frac{\phi_{\text{eff}}(r)}{k_B T}}$$

, ϕ_{eff} gyenge

ha a rendszer sűrűségviszonyai megfelelőek,
akkor ρ sorbafejthető:

$$\rho(r) \approx \rho_0 - \rho_0 \frac{\Phi_{\text{eff}}(r)}{\epsilon_0 T}$$

$$\Phi_{\text{eff}}(r) = \phi(r) - \frac{\rho_0}{\epsilon_0 T} \int v(r-r') \Phi_{\text{eff}}(r') d^3 r'$$

$$\Phi(r) = \int \Phi(r) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 r$$

$$\Phi_{\text{eff}}(r) = \int \Phi_{\text{eff}}(r) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 r$$

$$\Rightarrow \Phi_{\text{eff}}(z) = \Phi(z) - \frac{\rho_0}{\epsilon_0 T} v(z) \Phi_{\text{eff}}(z) \quad (\text{konvolúciós tétel})$$

$$\Phi_{\text{eff}}(z) = \frac{\Phi(z)}{1 + \frac{\rho_0}{\epsilon_0 T} v(z)}$$

$$\Phi_{\text{eff}}(z) = \frac{v(z)}{1 + \frac{\rho_0}{\epsilon_0 T} v(z)}$$

forrás és részecskék

között ua. mint a

részecskék között (cb)

Yutawa - potenciál Fourier - transzformációja

$$\Phi_{\text{eff}} = \frac{e^2}{r} e^{-\kappa r}$$

$$\Phi_{\text{eff}}(z) = \int \Phi_{\text{eff}}(r) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 r = \quad z \text{ irányától mint } \vartheta$$

$$= \int_0^\infty dr r^2 \frac{e^2}{r} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta e^{-i\kappa r \cos \vartheta}$$

$$= \frac{2\pi e^2}{\epsilon} \int_0^\infty dr e^{-\kappa r} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \underbrace{\epsilon r e^{-i\kappa r \cos \vartheta}}_{x = \kappa r \cos \vartheta}$$

$$= \int_{\epsilon r}^{-\epsilon r} dx e^{-ix} = \int_{-\epsilon r}^{\epsilon r} dx e^{-ix} =$$

$$= \left. \frac{e^{-ix}}{-i} \right|_{-\epsilon r}^{\epsilon r} = 2 \sin(\epsilon r)$$

$$\Phi_{\text{eff}}(k) = \frac{4\pi e^2}{\epsilon} \int_0^\infty dr e^{-\kappa r} \sin(kr) =$$

$$= \frac{4\pi e^2}{\epsilon^2} \int_0^\infty dt e^{-\frac{\kappa}{k} t} \sin t \quad t = \epsilon r$$

$$I_\alpha = \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} \sin t$$

u v' -> u' v -> utfile parc. int.

$$I_\alpha = -e^{-\alpha t} \cos t \Big|_0^\infty + \int_0^\infty dt (-\alpha) e^{-\alpha t} \cos t$$

$$= 1 - \alpha \int_0^{\infty} dt e^{-\alpha t} \cos t$$

$$\text{ma'sreket: } I_{\alpha} = \frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha} \sin t \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} dt \frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha} \cos t =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} dt e^{-\alpha t} \cos t$$

$$1 - \alpha \int_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} \Rightarrow \int_0^{\infty} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \Rightarrow I_{\alpha} = \frac{1}{1+\alpha^2}$$

$$\Phi_{\text{eff}}(\epsilon) = \frac{4\pi e^2}{\epsilon^2} \frac{1}{1+\left(\frac{\kappa}{\epsilon}\right)^2} = \frac{4\pi e^2}{\epsilon^2 + \kappa^2} \quad \kappa = 0 \Rightarrow \Phi(\epsilon) = \frac{4\pi e^2}{\epsilon^2}$$

$$\Phi_{\text{eff}}(\epsilon) = \frac{v(\epsilon)}{1 + \frac{g_0}{\epsilon_0 T} v(\epsilon)} = \frac{4\pi e^2}{\epsilon^2 + \frac{g_0}{\epsilon_0 T} 4\pi e^2} \Rightarrow \kappa = \frac{4\pi e^2 g_0}{\epsilon_0 T}$$

árvyítolási miatt rövidhatótávolságúvá válik $\Rightarrow \kappa = \text{ karakterisztikus hullámszáma}$

$$\Rightarrow \text{Debye - hossz: } r_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 T}{4\pi e^2 g_0}}$$

Debye - Hückel árvyítolási:

$$\Phi_{\text{eff}}(r) = \frac{4\pi e^2}{r} e^{-\frac{r}{r_D}}$$

a kvantummechanikai árvyítolási probléma a fénnyben bonyolultabb ~~probléma~~ a Fermi-eloszlási levágása miatt $\Rightarrow$ Friedel - oszcilláció lesz az eredmény

Kölcsönhatás spinrendszerben = Ising modell

$S_i = \pm 1$ Ising - spin $\downarrow$ külső mágneses tér szabad esetben: $\mathcal{H} = -H \sum_i S_i$

$$Z = \sum_{\{S_i\}} e^{\beta H \sum_i S_i} = \prod_i \sum_{S_i = \pm 1} e^{\beta H S_i} = (2 \cosh(\beta H))^N$$

$$F = -\frac{1}{\beta} N \ln(2 \cosh(\beta H))$$

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = -NH \tanh(\beta H)$$

$$M = \frac{\partial}{\partial (\beta H)} \ln Z = N \tanh(\beta H) \quad \text{mágneszettség}$$

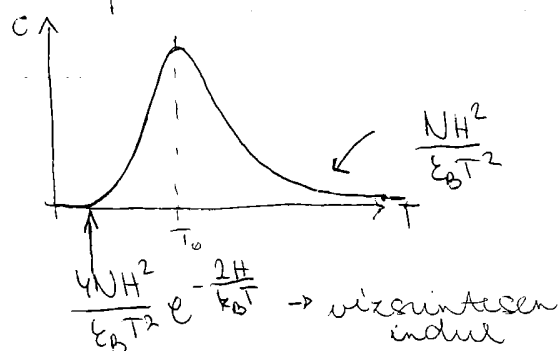
$$C(T) = \frac{\partial E}{\partial T} = \epsilon_B N \frac{(\beta H)^2}{ch^2(\beta H)} \quad \text{fajhő}$$

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{1}{ch^2(\beta H)} N \mu_B \quad \text{szuszeptibilitás}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln Z = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = -\frac{\partial E}{\partial \beta} = \epsilon_B T^2 \frac{\partial E}{\partial T} = \epsilon_B T^2 C(T)$$

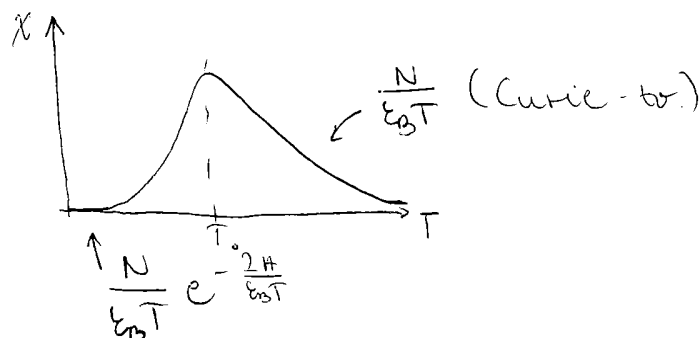
$$\frac{\partial^2}{\partial (\beta H)^2} \ln Z = \langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2 = \epsilon_B T \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial H} = \epsilon_B T \chi$$

→ szórás
 $\sigma^2 \sim O(N)$



maximum

$$\frac{H}{\epsilon_B T_0} = x_0 \rightarrow x_0 = \text{cth } x_0 \quad \text{egyenlet gyöke}$$



maximum

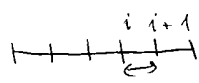
$$\frac{H}{\epsilon_B T_0} = y_0$$

$$y_0 = \frac{1}{2} \text{ cth } y_0 \quad \text{gyöke}$$

kölcsönható spinrendszer → spinek rögzített csatolása

⇒ 1D Ising-modell:

$$\mathcal{H} = -J \sum_i S_i S_{i+1}$$



somszédokkal
 hat kölcsön

tfh. $J > 0$ ferromágnes

($J < 0$ antiferromágnes)

$$Z_N = \sum_{\{S_i\}} e^{K \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1}}$$

$K = J\beta$ dimenziótlán csatolási áll.

$$Z_{N+1} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \dots \sum_{S_N=\pm 1} e^{K \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1}} \underbrace{\sum_{S_{N+1}=\pm 1} e^{K S_N S_{N+1}}}_{2 \text{ ch } K} = 2 \text{ ch } K Z_N$$

szabad határfeltétel mellett $\rightarrow$ $2 \text{ ch } K$ függetlenül S_N -től

ha hosszitólunk ~~az~~ rend mincs a rendszerben
 akkor mindegy a határfeltétel

ha kialszik a hosszirányú rend pl. mág-
neszettség, akkor már nem mind 1 a
határfeltétel $\rightarrow$ csak 2D-ban lesz gond
ha a rendszer inhomogén, akkor ~~is~~ is
függ a rendszer alapállapota a határ-
feltételtől:

$$Z_1 = \sum_{s_i = \pm 1} e^0 = 2$$

$$[Z_N = 2^N \text{ch}^{N-1} K] \quad \ln Z = N \ln 2 + (N-1) \ln(\text{ch} K)$$

$$E(T) = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = - J \frac{\partial}{\partial K} \ln Z =$$

$$= -(N-1) J \tanh K \approx -N J \tanh K \rightarrow \begin{cases} T \rightarrow 0, & E \rightarrow -(N-1)J \\ T \rightarrow \infty, & E \rightarrow 0^- \end{cases}$$

$$C(T) = \frac{\partial E}{\partial T} = (N-1) \epsilon_B \frac{K^2}{\text{ch}^2 K} \quad \text{fajhő}$$

$$S = \epsilon_B \ln Z + \frac{1}{T} E = N \epsilon_B \ln 2 + (N-1) \epsilon_B \ln(\text{ch} K) - (N-1) \epsilon_B K \ln K$$

$$K \rightarrow 0 \quad \left(\begin{matrix} J \rightarrow 0 \\ T \rightarrow \infty \end{matrix} \right) : S \rightarrow N \epsilon_B \ln 2 = \epsilon_B \ln(2^N) \quad \text{↑ állapotok száma}$$

$$K \rightarrow \infty \quad (T \rightarrow 0) : \ln \text{ch} K = \ln \left(\frac{1}{2} e^K (1 + e^{-2K}) \right) \approx$$

$$= K - \ln 2 + \dots$$

$$K \tanh K \rightarrow K$$

$$\Rightarrow S \rightarrow \epsilon_B \ln 2 \quad \leftarrow \begin{matrix} 2 \text{ alapállapot} \\ \uparrow \uparrow \uparrow \dots \\ \downarrow \downarrow \downarrow \dots \end{matrix}$$

Correlációs fvk.

$$C_k(n) = \langle S_k S_{k+n} \rangle = \frac{1}{Z_N} \sum_{\{s_i\}} S_k S_{k+n} e^{K \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1}}$$

$\rightarrow$ r lépésre lévő mennyiség korrelált a r spinnel

trick: feltesszük, hogy K minden párra más

$$\mathcal{H} = - \sum_{i=1}^{N-1} J_i s_i s_{i+1}$$

$$Z_{N+1} = 2 \text{ch} K_{N+1} Z_N, \quad Z_1 = 2, \quad Z_N = 2^N \prod_{i=1}^{N-1} \text{ch} K_i$$

$$C_k(n) = \langle S_k S_{k+n} \rangle = \frac{1}{Z_N} \frac{\partial}{\partial K_k} \frac{\partial}{\partial K_{k+1}} \dots \frac{\partial}{\partial K_{k+n-1}} Z_N \Big|_{K_i = K}$$

$$\text{mert: } \frac{\partial}{\partial K_i} Z_N = \sum_{\{s_i\}} s_i s_{i+1} e^{K \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1}}$$

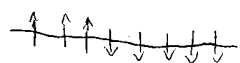
$$\frac{\partial}{\partial K} \frac{\partial}{\partial K_{k+1}} \dots \frac{\partial}{\partial K_{k+n-1}} Z_N = \sum_{\{S\}} \underbrace{(S_k S_{k+1}) (S_{k+1} S_{k+2}) \dots (S_{k+n-1} S_{k+n})}_{S_k S_{k+n}} e^{\sum_{i=k}^{k+n-1} K_i S_i S_{i+1}}$$

$C_c(r) = \text{th}^n K \rightarrow$ független r -től $\rightarrow$ csak attól függ, milyen távolságra vannak egymástól

$$C(r) = e^{r \ln \text{th} K} \equiv e^{-r/\xi}$$

$\xi = \frac{1}{|\ln \text{th} K|}$ a koherenciahossz

$\xi \rightarrow \begin{cases} 0, & K \rightarrow 0 \\ \infty, & K \rightarrow \infty \end{cases}$ nagyon magas hőmérsékleten nincs rendeződés
alacsony hőmérsékleten nagyon kiterjedhet a korreláció
egész rendszer rendezett állapotban



$\hookrightarrow$ egy helyen eltört állapot $\rightarrow \Delta E = 2J$, $\Delta S \sim \ln N$

$$\Delta F = \Delta E - T \Delta S \rightarrow \text{entropia nyer}$$

alacsony hőmérsékleten sincs rendeződés csak a 0-ban

2D-ben ez nem jó év $\left\{ \begin{array}{l} \Delta E \sim \sqrt{N} \\ \Delta S \sim \ln N \end{array} \right. \rightarrow \text{ez nyer} \Rightarrow$

2D-ben tud rendeződni a rendszer

1D Ising - model, $H \neq 0$, periodikus határfeltétel $S_{N+1} \equiv S_1$

$$Z_N = \sum_{\{S_i\}} e^{\sum_i K S_i S_{i+1} + \frac{h}{2} \sum_i (S_i + S_{i+1})} \quad h = \frac{H}{\epsilon_B T} \quad K = \frac{J}{\epsilon_B T}$$

$\hookrightarrow$ szimmetrikusan szerepelnek

Def: transzfer matrix:

$$T_{SS'} = e^{K S S' + \frac{h}{2} (S + S')}$$

$$\begin{pmatrix} T_{++} & T_{+-} \\ T_{-+} & T_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{K+h} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-h} \end{pmatrix}$$

$$Z = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \dots \sum_{S_N=\pm 1} T_{S_1 S_2} T_{S_2 S_3} \dots T_{S_N S_1} = \sum_{S_1=\pm 1} (T^N)_{S_1 S_1} = \text{Sp}(T^N)$$

$$S_p T = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$S_p T^N = \lambda_1^N + \lambda_2^N$$

$$\begin{vmatrix} e^{K+h} - \lambda & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-h} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda e^K \operatorname{ch}(h) + \underbrace{e^{2K} - e^{-2K}}_{2\operatorname{sh} K} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = e^K \operatorname{ch}(h) \pm \sqrt{e^{2K} \operatorname{sh}^2(h) + e^{-2K}} \quad \lambda_1 > \lambda_2$$

specialisan $H=0$: $\lambda_{1,2} = e^K \pm e^{-K} = \begin{cases} 2\operatorname{ch} K \\ 2\operatorname{sh} K \end{cases}$

$$Z_N = 2^N (\operatorname{ch}^N K + \operatorname{sh}^N K) = 2^N \operatorname{ch}^N K (1 + \operatorname{th}^N K)$$

szabály végeretében: $2^N \operatorname{ch}^{N-1} K \rightarrow 2^N \operatorname{ch}^N K$ $\xrightarrow{N \rightarrow \infty}$

periodikus h.f. esetén: $2^N \operatorname{ch}^N K (1 + \operatorname{th}^N K) \rightarrow 2^N \operatorname{ch}^N K$

általában elhanyagolható a határfeltétel, ha a correlációt rövidtávúak.

$$Z_N = \lambda_1^N \left(1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N\right) \approx \lambda_1^N$$

$\hookrightarrow 0$ $\hookrightarrow$ nagyobbik sajátérték N. hatványra

adja az állapotösszeget (általános)

$$\ln Z = N \ln \lambda_1 = N \ln \left[e^K \operatorname{ch}(h) + \sqrt{e^{2K} \operatorname{sh}^2(h) + e^{-2K}} \right]$$

$$M = \frac{\partial}{\partial (h)} \ln Z = N \frac{e^K \operatorname{sh}(h) + \frac{e^{2K} \operatorname{sh}(h) \operatorname{ch}(h)}{\sqrt{e^{2K} \operatorname{sh}^2(h) + e^{-2K}}}}{e^K \operatorname{ch}(h) + \sqrt{e^{2K} \operatorname{sh}^2(h) + e^{-2K}}} =$$

$$= N \frac{e^K \operatorname{sh}(h)}{\sqrt{e^{2K} \operatorname{sh}^2(h) + e^{-2K}}} \cdot \frac{e^K \operatorname{ch}(h) + \sqrt{\dots}}{e^K \operatorname{ch}(h) + \sqrt{\dots}} \xrightarrow{\sim 1}$$

$K \rightarrow 0$ ($T \rightarrow \infty$ v. $J \rightarrow 0$) esetén

$$\ln Z = N \ln(2\operatorname{ch}(h))$$

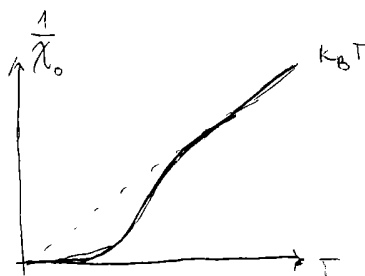
$$M = N \operatorname{th}(h)$$

ezt már tudtuk

$$M(T, H=0) = 0$$

$$M(T=0) = N|H|$$

$$\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial H} \right|_{H=0} = \frac{N}{k_B T} e^{2J/k_B T}$$



$H \equiv 0, T \equiv 0$ lényeges singularitás

$$\chi(T, H) = \frac{1}{k_B T} \frac{e^{-K} \chi(h)}{(e^{2K} \sinh^2(h) + e^{-2K})^{3/2}}$$

(másik kapunk, ha más sorrendben tartunk a 0-hoz)

Korrelációs - válasz tétel:

$\mathcal{H}$ tetszőleges, $h_i = \frac{H_i}{k_B T}$ lokális tér

$$Z = \sum_{\{s_i\}} e^{-\beta \mathcal{H} + \sum_i h_i s_i}$$

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial h_i} = \frac{1}{Z} \sum_{\{s_i\}} s_i e^{-\beta \mathcal{H} + \sum_i h_i s_i} = \langle s_i \rangle$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial h_i \partial h_j} &= \frac{1}{Z^2} \left[\sum_{\{s_i\}} s_i s_j e^{-\beta \mathcal{H} + \sum_i h_i s_i} Z - \sum_{\{s_i\}} s_i e^{-\beta \mathcal{H} + \sum_i h_i s_i} \sum_{\{s_j\}} s_j e^{-\beta \mathcal{H} + \sum_j h_j s_j} \right] = \\ &= \langle s_i s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle = \frac{\partial \langle s_i \rangle}{\partial h_j} \quad \text{korrelációs fv.} \end{aligned}$$

ennyire töltődik el i várható értéke, ha j -ben megváltoztatjuk a rendszert $\Rightarrow$ korreláció van

$$\sum_{i,j} (\langle s_i s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle) = \left\langle \sum_i s_i \sum_j s_j \right\rangle - \left\langle \sum_i s_i \right\rangle \left\langle \sum_j s_j \right\rangle = \langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2$$

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial (\beta H)} = M = \left\langle \sum_i s_i \right\rangle$$

$$\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial (\beta H)^2} = k_B T \frac{\partial M}{\partial H} = k_B T \chi$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial (\beta H)} &= \frac{\partial}{\partial (\beta H)} \left(\frac{1}{Z} \sum_{\{s_i\}} \left(\sum_i s_i \right) e^{-\beta \mathcal{H} + \beta H \sum_i s_i} \right) = \left\langle \sum_i s_i \sum_i s_i \right\rangle - \left\langle \sum_i s_i \right\rangle \left\langle \sum_i s_i \right\rangle = \\ &= \langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2 \end{aligned}$$

$$\sum_{i,j} (\langle s_i s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle) = k_B T \chi$$

Korrelációs fv. összege = $k_B T \cdot$ susceptibilitás
 $\Rightarrow$ kitérített korrelációt nagy érzékenységet
 és nagy fluktuációt okoznak
 (fázisátalakulásor korreláció ~~nagy~~ $\rightarrow \infty \Rightarrow$
 érzékenység $\rightarrow \infty$ a kritikus pontban)

1D antiferromágnes

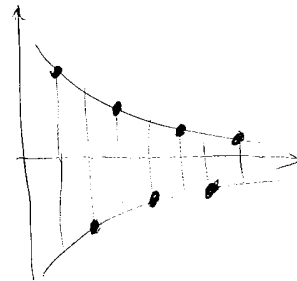
$$\mathcal{H} = |J| \sum s_i s_{i+1} - H \sum s_i$$

$\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\ldots$ sorrendben állni alapállapotban ($H=0$)

$$\ln Z = N \ln(2 \cosh K), \quad K < 0$$

korrelációs fkt.: $C_z(r) = \tanh^r(K)$

$$\begin{aligned} |C_z(r)| &= \tanh^r |K| = \\ &= e^{-r |\ln \tanh K|} = e^{-\frac{r}{\xi}} \\ \xi &= \frac{1}{|\ln \tanh K|} \end{aligned}$$



ha betápláljuk a külső teret, az be akarja állítani a spineket

$$H \neq 0$$

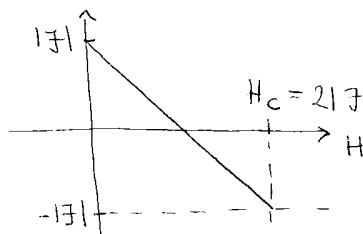
alapállapot: $\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow \ldots$

energiája

$$-|J|N$$

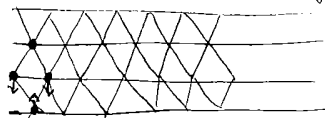
$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \ldots$

$$(|J| - H)N$$



$H_c = 2|J| \rightarrow$ ettől a pillanattól átállnak

ha pont a kritikus térenél vagyunk, akkor mind1 hogyan állnak a spinek $\Rightarrow$ exponenciálisan sok alapállapot
 máshol is előfordul



frustráció $\rightarrow$ nincs kielégítő a csatolás

makroszkopikus entropia szeml a rendszerbe

az antiferromágneses spektrum a feje tetejére

állított ferromágneses spektrum $\rightarrow$ az alapállapot

a legnagyobb multiplicitású és a legnagyobb energiaszint 2-szeresen degenerált

Átlagterelmélet:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{(i,j)} s_i s_j - H \sum_i s_i$$

magasabb dimenzióban

↳ első szomszédokra

$$s_i s_j = (\langle s_i \rangle + \underbrace{s_i - \langle s_i \rangle}) (\langle s_j \rangle + \underbrace{s_j - \langle s_j \rangle}) \approx \leftarrow \begin{array}{l} \text{átlagtól való} \\ \text{eltérés kicsi} \end{array}$$

$$\approx \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle + \langle s_j \rangle (s_i - \langle s_i \rangle) + \langle s_i \rangle (s_j - \langle s_j \rangle) =$$

$$= \langle s_i \rangle s_j + \langle s_j \rangle s_i - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle \quad \text{a valószínűségi}$$

változó csak első hatványon szerepel

ez akkor tehető meg, ha sok az első szomszéd, amelyet az átlaggal helyettesíthetünk

⇒ a fluktuációk relative kicsik ⇒ eltekinthetünk tőlük a központi határeloszlás miatt

ez akkor lehet, ha a dimenziószám magas pl.

↳ lehet kiindulópont 'd szerinti sorfejtéshez

↳ elképzelhető olyan, ahol hosszú hatótávolságra hatnak ki a spinok

↳ olyan is, hogy minden spin minden-
kivel kölcsönhat → Katz modell

egzakta' válik a közelítés, ha a

csatolást leosztjuk N -nel

↳ a hosszú hatótávú erők is lehetnek kiindulópontot sorfejtéshez (hurok-sorf.)

stb.

tgh. a rendszer egy homogén külső térben van → egy részecskére eső ~~magnet~~ mágneses-
zetség → $\langle s_i \rangle = m$ független a helytől

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{(i,j)} (s_i \langle s_j \rangle + s_j \langle s_i \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle) - H \sum_i s_i =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{(i,j)} J_{ij} q m^2 - (H + \sum_{(i,j)} J_{ij} q m) \sum_i s_i$$

↓
szomszédok száma

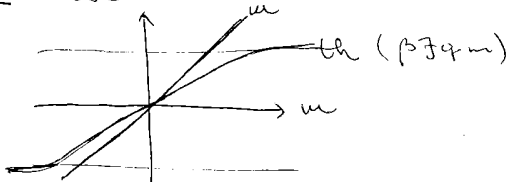
olyan mintha a külső tér + effektív tér lenne

$$Z = e^{-\frac{1}{2} \sum_{ij} q_i q_j} 2^N \text{ch}^N(\beta(H + Jq_m))$$

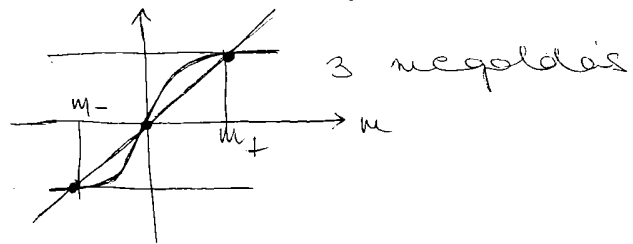
$m = \text{th}(\beta(H + Jq_m)) \rightarrow m$ rendparaméter szerint
stationárius a szabad energia

$H=0$ eset:

ha $\beta J < 1$, akkor csak $m=0$



$\rightarrow$ ha magas hőm



3 megoldás

ha $\beta J > 1$

$$k_B T < Jq$$

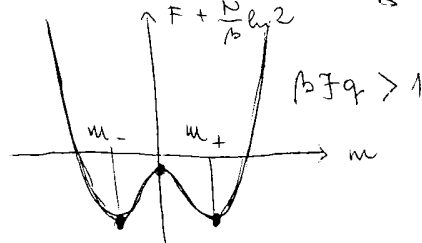
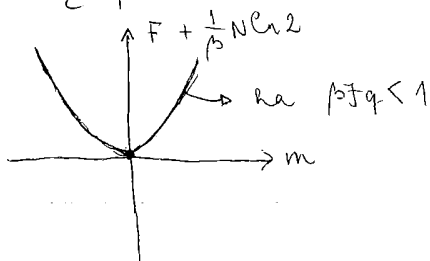
$m=0, m_{\pm} \neq 0$ megoldások

$\rightarrow$ szimmetria, ha nincs külső tér

$$m = \langle s_i \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{s\}} s_i e^{-\beta \mathcal{H}(s)} = 0$$

$\int$ páratlan fr. páros fr

$$-F = \frac{1}{2} q N m^2 + k_B N T \ln 2 + N k_B T \ln \text{ch} \left(\frac{H + Jq m}{k_B T} \right)$$



magas hőmérsékleten 1 szélső érték

alacsony " " 3 " "

3

$\rightarrow m=0$ trivialis

megoldás instabil $\rightarrow$ fluktuációk egyik oldalra belökít $\rightarrow$ spontán szimmetriasértés

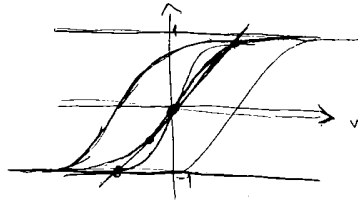
suszeptibilitás ~~negatív lesz~~ $\sim F$ második deriváltja

$\Rightarrow$ egy tartományon negatív lesz

egy infitezimálisan kis tér eldönti, melyik oldalra essen $\rightarrow$ ezt kitapcsolhatjuk és akkor az egyik feleben van a fázistérnek a rendszer

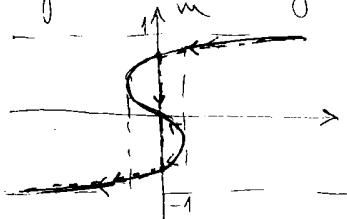
potencialját a két oldal között $\rightarrow$ magassága $\Theta(N) \rightarrow$ véges rendszer véges idő alatt átmegy $\rightarrow$ hosszú élettartam

$H \neq 0$ külső tér



növeljük a Θ teret 1 gyök, 2, 3
előjelet vált 2, 1

mágnesezettség térfüggése



felülbíráljuk a hirtét,
mint a van der Waals-nál
(Maxwell konstrukció)

miért ez szilárd test, ezért ez nem olyan mint a van der Waals

szilárd testben lehet befagyás $\rightarrow$ lehet hirtetés

suszeptibilitás:

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial H} = m' = \frac{\beta + \beta J q m'}{\text{ch}^2(\beta(H + J q m))} = (\beta + \beta J q m') (1 - \text{th}^2(\beta(H + J q m))) =$$

$$= (\beta + \beta J q m') (1 - m^2)$$

$$m' = \frac{\beta(1 - m^2)}{1 - \beta J q (1 - m^2)} = \frac{\chi_0}{1 - J q \chi_0} \rightarrow \text{ideális rendszer susc.}$$

$\beta J q = 1 \Rightarrow \chi \rightarrow \infty$ divergál a kritikus pontban

T_c körül az állapotegyenlet: $\beta_c = \frac{1}{J q}$

$$\left(\frac{\beta}{\beta_c} - 1\right)m + \beta H - \frac{1}{3} \left(\frac{\beta}{\beta_c} m + \beta H\right)^3 = 0$$

$$\frac{\beta}{\beta_c} - 1 = \tau \text{ redukált hőmérséklet}$$

$$|\tau| \ll 1$$

konzisztens feltételek $H \ll m \ll 1$

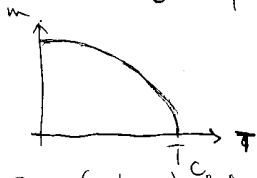
$$\tau m + \beta H = \frac{1}{3} m^3$$

$$\frac{m}{\tau^{1/2}} + \frac{H\beta_c}{\tau^{3/2}} = \frac{1}{3} \left(\frac{m}{\tau^{1/2}} \right)^3 \Rightarrow \frac{m}{\tau^{1/2}} = f\left(\frac{H}{\tau^{3/2}}\right)$$

$$m = \tau^{1/2} f\left(\frac{H}{\tau^{3/2}}\right) \quad \text{skalázott}$$

igazi: $m = \tau^\beta f\left(\frac{H}{\tau^{\beta\delta}}\right)$ homogén fr-el
 állapotelméletben $\beta = \frac{1}{2}$ $\delta = 3$

ha $H=0$, akkor az állapotegyenlet: $\tau m = \frac{1}{3} m^3$
 $T < T_c$, $m \neq 0$ $m \sim \tau^{1/2} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$



ha $\tau = 0$ (beállunk a kritikus pontba)

$$H\beta_c = \frac{1}{3} m^3 \rightarrow m \sim H^{1/3} \quad \delta = 3$$

suszeptibilitás: $\chi = \frac{\beta}{1 - \beta\gamma q}$ ha $H=0$

$$\chi \sim \tau^{-\gamma}$$

$$= \frac{\beta}{1 - \frac{\beta}{\beta_c}} =$$

$$= \frac{1}{\epsilon_B T_c} \frac{1}{\frac{T}{T_c} - 1} =$$

$$= -\frac{1}{\epsilon_B T_c} \frac{1}{\tau} \Rightarrow \gamma = 1$$

$T \approx T_c$, $H=0$ legyen

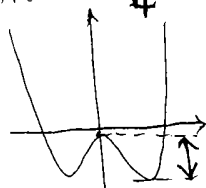
$$\frac{F}{N} = -\frac{1}{\beta} \ln 2 - \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{2} (\beta\gamma q m)^2 - \frac{1}{2} \beta\gamma q m^2 \right] =$$

$$= -\frac{1}{\beta} \ln 2 - \frac{\gamma q}{2} m^2 (\beta\gamma q - 1) =$$

$$= \left(\frac{F}{N} \right)_{m=0} - \frac{\gamma q}{2} m^2 \frac{\beta - \beta_c}{\beta_c} + \dots \quad \mathcal{O}(m^4)$$

$$\Delta \left(\frac{F}{N} \right) = \left(\frac{F}{N} \right)_{m=0} - \left(\frac{F}{N} \right)_m = \frac{\gamma q}{4} m^2 \tau$$

$$\Delta F = \frac{3}{4} N \gamma q \tau^2$$



potenciálgát $\mathcal{O}(N)$

valóságban nem ilyen nagy a gát, az
 állapotelmélet túlbecsüli a correlációt
 és a rendeződésre való hajlamot

 $d = 2$ határfelület egyik oldalán $\uparrow$,másik oldalán $\downarrow$ törés $\rightarrow$ elválasztó vonal $\sqrt{N}$

$$\Delta F \sim k_B T_c N^{1/2}$$

 $d = 3$ 

elválasztó felület

$$\Delta F \sim N^{2/3}$$

ha a potenciálgödör $\Delta F \sim N^\alpha$, akkor az idő, ami kell a túlmászáshoz:

$$t_{\text{erg}} \sim e^{\Delta F / k_B T} \sim e^{N^\alpha / k_B T}$$

$$t \sim 10^{-12} \text{ s } e^{N^\alpha} \sim 10^{-12} e^{10^{16}} \quad \leftarrow N = 10^{24}$$

periódusideje a gödör alján a rezgésének
ha nem $\mathcal{O}(N)$ a potenciálgát, akkor sem tud a rendszer kijönni a gödörből
ha a rendszer beesett az egyik oldalra, akkor nem jön ki onnan a rendszer

Fázisátalakulások

Kritikus pont körül konvenciók az indexekre:

$$C \sim |\tau|^{-\alpha}$$

fajhő

$$m \sim |\tau|^\beta, \text{ ha } H = 0$$

mágnesezettség (rendparam.)

$$\chi \sim |\tau|^{-\gamma}$$

suszeptibilitás

$$m \sim H^{1/\delta}, \text{ ha } \tau = 0$$

$$\xi \sim |\tau|^{-\nu}$$

koherenciahossz

$$C(r) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}} f\left(\frac{r}{\xi}\right)$$

korreláció

↑ homogén fr.
↑ dimenziószám

Fázisátalakulásnál különböző folyamatokra lehet analógiákat hozni; mi minet felel meg

- annyira párhuzamba állíthatók, hogy az indexek pont ugyanazok lehetnek
- ha a dimenziószámot változtatjuk, akkor másképp az indexek
- másodrendű fázisátalakulás $\rightarrow$ folytonosan változik a rendparaméter (nincs ugrása)
- elsőrendű fázisátalakulás $\rightarrow$ ugrása van a sűrűségnek $\rightarrow$ egyszerre jelenik meg az új struktúra $\rightarrow$ latens hővel jár
- másodrendűeknél vannak a hatványfokok
- kritikus pont előtt hosszuhullámhosszú rendeződést alakulhat ki hosszabb időkre azért lehet az univerzalitási osztályok, mert a rendszer elfelejti a mikroszkopikus szerkezetét
- kritikus pont környékén az erősen csatolt változók hatareloszlásai először a hatványfokot
- univerzalitás: folytonos fázisátalakulásokor fenomenológiai leírása osztályokba rendezhető $\rightarrow$ indexek definícióik (hatareloszlás tételét bonyolult fajta)
- $F = \tau^{2-\alpha} \tilde{F}\left(\frac{h}{\tau^{\beta\delta}}\right)$
 - $\tilde{F}$ intenzitása
 - skalár, (univerzális)
 - redukált hőmérséklet
 - $h=0$, $F \sim \tau^{2-\alpha} \Rightarrow C \sim \tau^{-\alpha}$
 - feltesszük, hogy ilyen alakú (erő)
 - $\frac{\partial F}{\partial h} = m = \tau^{2-\alpha-\beta\delta} \tilde{F}'\left(\frac{h}{\tau^{\beta\delta}}\right)$, $h=0$, $m \sim \tau^{2-\alpha-\beta\delta} \equiv \tau^{\beta}$
 - rendparam.
 - $2-\alpha-\beta\delta \stackrel{!}{=} \beta$
 - skalár.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial h^2} = \frac{\partial m}{\partial h} = \chi = T^{\beta-\beta\delta} \tilde{F}''\left(\frac{h}{T^{\beta\delta}}\right), \quad h=0, \quad \chi \sim T^{\beta-\beta\delta} \equiv T^{-\gamma}$$

$$\boxed{\gamma = \beta(\delta-1)}$$

ésszerűségekből az indexet függetlenül mérhetők és fennállnak közöttük az összefüggések $\rightarrow$ jó a feltételezés további skálázó-er: $\overset{\text{dimenziószám} \rightarrow \text{szágyaró térre vonatkoztat}}{d\nu = 2 - \alpha}$

$$\boxed{d \frac{\delta-1}{\delta+1} = 2 - \eta}$$

mindezekre a jelenségekre a renormalizációs csoport adta meg a választ (1970-es évek)

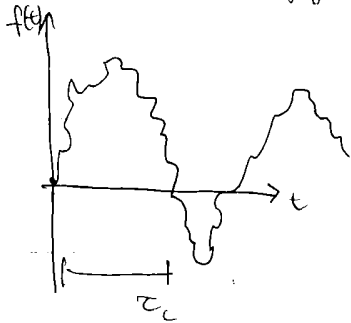
$\hookrightarrow$ Hamilton - fr - ből le lehet vezetni meghatározó a statisztikus mechanikában, mert először lehetett erősen kölcsönható rendszert kvantitatíve leírni

... kultúrtörténet...

- univerzalitási osztályok 2 dimenziószámától függenek $\rightarrow$ szágyaró tér dimenziója
rendeződés dimenziója
- rendeződés jellemzően klasszikus infravörös probléma
- a koherenciahossz a meghatározó skála $\rightarrow$ nem számíthat a mikroszkopikus fluktuációkat $\Rightarrow$ klasszikus
- folytonosan megy át a mikroszkopikusból a makroszkopikusba
- átlagpláissal effektív elméletre jutunk, csatolási állandók változnak $\rightarrow$ csak néhány változó emelkedik ki $\Rightarrow$ így lehetnek univerzalitási osztályok

Nem-egyensúlyi statisztikus fizikaLangevin - egyenlet, Braun - mozgás:

részecskét a folyadékban $\rightarrow$ a folyadék molekulái hajtják furcsa pályán őket $\rightarrow$ sok ütközés véletlenszerűen erőt gyakorol a pollenre



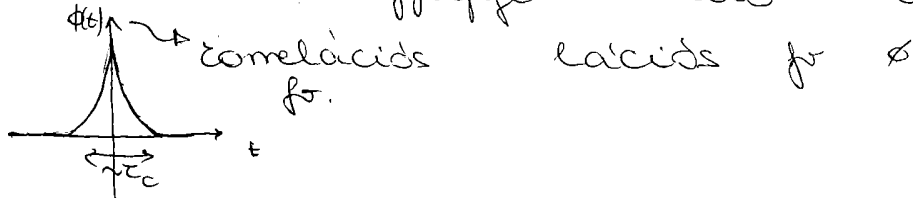
megbecsülhető egy karakterisztikus idő, ami a mozgás önkorelációjáról ad információt

$a \rightarrow$ Braun - részecske mérete

$\bar{v} \rightarrow$ molekulák átlagos sebessége

$$\tau_c \sim \frac{a}{\bar{v}} \sim \frac{10^{-6} \text{ cm}}{10^5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}} \sim 10^{-11} \text{ s} \rightarrow \text{ennek sokkal}$$

hosszabb a megfigyelési idő $\rightarrow$ ott a kore-



Langevin - egyenlet: $[m\ddot{v} = -\underbrace{\gamma v}_{\text{sűrődési erő}} + f(t)]$ $\leftarrow$ véletlen erő

feltesszük, hogy $\langle f(t) \rangle = 0$

korelációja: $\langle f(t)f(t') \rangle = \phi(t-t') \xrightarrow{\text{erősség}} \lambda \delta(t-t')$

mivel τ_c nagyon kicsi

egyre kisebb időbeli felbontásban is cikk-cakk pályát $\rightarrow$ nincs deriváltjuk $\rightarrow$ fraktál

Green - f: $\dot{G} + \gamma G = \delta(t)$

$$\Rightarrow G(t) = \Theta(t) e^{-\gamma t}$$

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

(retartált Green - f)

$$\dot{G}(t) = \delta(t) e^{-\gamma t} + \Theta(t) (-\gamma) e^{-\gamma t}$$

$$\dot{G} + \gamma G = \delta(t) e^{-\gamma t} = \delta(t)$$

homogén egyenlet megoldása: $v_0 e^{-\zeta t}$

$$\frac{1}{m} f(t) = \frac{1}{m} \int_0^t d\tau \delta(t-\tau) f(\tau) \quad t > 0$$

$$v(t) = v_0 e^{-\zeta t} + \int_0^t d\tau G(t-\tau) f(\tau) \frac{1}{m}$$

$$v(t) = v_0 e^{-\zeta t} + e^{-\zeta t} \int_0^t d\tau e^{\zeta \tau} f(\tau) \frac{1}{m}$$

$$\langle v^2(t) \rangle = v_0^2 e^{-2\zeta t} + e^{-2\zeta t} \frac{1}{m^2} \int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' e^{\zeta(\tau+\tau')} \underbrace{\langle f(\tau) f(\tau') \rangle}_{\phi(\tau-\tau') = \lambda \delta(\tau-\tau')}$$

$$\int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' e^{\zeta(\tau+\tau')} \delta(\tau-\tau') = \int_0^t d\tau e^{2\zeta \tau} = \frac{e^{2\zeta t} - 1}{2\zeta}$$

$$\langle v^2(t) \rangle = v_0^2 e^{-2\zeta t} + \frac{\lambda}{2\zeta m^2} (1 - e^{-2\zeta t}) \rightarrow \frac{\lambda}{2\zeta m^2}, \quad t \rightarrow \infty$$

termikus egyensúlyban $\frac{m \langle v^2(t) \rangle}{2} = \frac{\zeta_0 T}{2} = \frac{\lambda}{4\zeta m}$

$$\left[\lambda = 2\zeta m \zeta_0 T \right] \quad \text{Einstein - reláció}$$

$\langle v(t) v(t') \rangle = ?$ ha $t \neq t'$ autokorreláció:

$$\langle v(t) v(t') \rangle = e^{-\zeta(t+t')} \int_0^t d\tau \int_0^{t'} d\tau' e^{\zeta(\tau+\tau')} \frac{\lambda}{m^2} \delta(\tau-\tau') + v_0^2 e^{-\zeta(t+t')} = *$$

$$\int_0^t d\tau \int_0^{t'} d\tau' e^{\zeta(\tau+\tau')} \delta(\tau-\tau') = \int_0^t d\tau e^{2\zeta \tau} = \frac{e^{2\zeta t} - 1}{2\zeta}$$

$t < t'$ esetén

$$* = \frac{\lambda}{2\zeta m^2} e^{-\zeta|t-t'|} + \cancel{v_0^2 e^{-\zeta(t+t')}} \left(v_0^2 - \frac{\lambda}{2\zeta m^2} \right) e^{-\zeta(t+t')} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\lambda}{2\zeta m^2} e^{-\zeta|t-t'|} \quad (t+t' \gg \frac{1}{\zeta})$$

kitérés szórásnégyzete:

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{\lambda}{2\zeta m^2} \int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' e^{-\zeta|\tau-\tau'|}$$

általános f pr. és F primitív pr. esetén:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = F(t) - F(0)$$

$$\int_0^t f(\tau - \tau') d\tau = F(t - \tau') - F(-\tau')$$

$$I = \int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' f(\tau - \tau') = \int_0^t d\tau' \underbrace{(F(t - \tau') - F(-\tau'))}_u =$$

$$= - \int_t^0 du f(u) - \int_0^t du F(-u) = \int_0^t du (F(u) - F(-u))$$

$$\begin{aligned}
&= u F(u) \Big|_0^t - u F(-u) \Big|_0^t - \int_0^t du u f(u) + \int_0^t du u f(-u) = \\
&= t F(t) - t F(-t) - \int_0^t u f(u) + \int_0^t du u f(-u) = \\
&= \int_0^t du (t-u) (f(u) + f(-u)) \\
\langle x^2(t) \rangle &= \frac{\lambda}{2\zeta m^2} 2 \int_0^t du (t-u) e^{-\zeta u} = \frac{\lambda}{\zeta m^2} \left(\frac{t}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^2} + \frac{e^{-\zeta t}}{\zeta^2} \right) \approx \\
&\approx \frac{\lambda t}{m^2 \zeta^2} \quad t\zeta \gg 1
\end{aligned}$$

Def: diffúziós állandó: $\langle x^2(t) \rangle = 2Dt$ *

$$D = \frac{\lambda}{2m^2\zeta^2} = \frac{k_B T}{5m}$$

05. 11.

$n(x)$ részecske sűrűsége 1D

Continuitás: $\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } j(x) = 0$

$$j(x) = -D \text{grad } n(x)$$

↑
diffúziós állandó definíció szerint

$$\frac{\partial n(x)}{\partial t} = D \Delta n(x) \rightarrow \text{diffúziós egyenlet} \rightarrow \text{m.o.}$$

$$n(x, t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}, \quad n(x, 0) = N \delta(x) \text{ t.f. esetén}$$

$$\langle x^2(t) \rangle = 2Dt \rightarrow \text{je' tényleg a diffúziós áll.} *$$

Einstein:

gravitációs térben: $-D \frac{\partial}{\partial z} n(z)$ diffúziós áram
ert kompenzálja az eső részecske $\bar{v} n(z)$

$\bar{v} \rightarrow$ sűrűsödés és gravitáció egyensúlyából

$$\frac{1}{\mu} \bar{v} = -mg$$

↑
mozgásegyensúly

↔

$$m \ddot{x} = -\frac{1}{\mu} x + f$$

itt áram összege egyensúlyban:

$$-D \frac{\partial n(z)}{\partial z} - mg \mu n(z) = 0$$

$$n(z) \sim e^{-mgz/k_B T}$$

↑
tudott

$$\text{ha } D = \mu k_B T$$

→

Folyadékban gömb alakú részecske mozog
η belső súrlódási együttható

Stokes - tör: $F = 6\pi\eta a \dot{x}$

$m\zeta \rightarrow 6\pi\eta a \Rightarrow$ gömb sugara

$$D = \frac{\epsilon_0 T}{6\pi a \eta}$$

$\langle x^2(t) \rangle = \frac{\epsilon_0 T}{3\pi a \eta} t \rightarrow$ közvetlenül mérhető
a Boltzmann - állandó

VÉGE

Feynman -féle pályaintegrál

Förster - Planck egyenlet

} nem lesz
most

Összefoglalás

1. alapfeltevéset $\rightarrow$ legvalószínűbb állapot stb.
2. mellétfeltételt mellett eloszlásfüggvény
3. alkalmazásait $\rightarrow$ termodinamika reprodukciója
4. extenzív mennyiségek összeadódhatnak, arányosak a részecskeszámmal, fontos a rövid hatótávú erő feltevése, "nagy számok" limitje $\rightarrow$ "részrendszerrel ideális gáz"
5. élesen meghatározott mennyiségek
6. ellenpéldákat tudni mondani $\Rightarrow$ statutörvények kritikus pont körül mese - mese