Statisztikus fizika, 1. zárthelyi, III. éves BSc fizikus szak
(2011. március 23. (szerda), 10:15 – 11:45, 90 perc)

1. (10 pont) Egy rendszer N darab lokalizált részecskéből áll, melyeknek az energiaszintjei: egy egyszeresen degenerált zérus energiájú, egy kétszeresen degenerált ε, illetve egy kétszeresen degenerált $-\varepsilon$ energiájú szint. Határozzuk meg az $E(T)$ energiát és az $S(T)$ entrópiát! Vizsgáljuk a $T \to 0$, illetve $T \to \infty$ határesetüket!

2. (10 pont) Klasszikus ultrarelativisztikus gázban egy részecske kinetikus energiája: $c|\mathbf{p}| = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$. A gázt az $U(x,y,z) = a(x^2 + y^2 + z^2)$ potenciálban „csapdázzuk" ($a > 0$). Határozzuk meg az F szabadenergiát és az $\langle r^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle$ várható értéket!

3. (10 pont) Kétdimenziós harmonikus oszcillátor Hamilton-operátora: $\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)$. Számítsuk ki az állapotösszeget és az $\hat{r}^2$ operátor várható értéket: $\langle \hat{r}^2 \rangle = \langle \hat{x}^2 + \hat{y}^2 \rangle$! Vizsgáljuk a várható érték $T \to 0$, illetve $T \to \infty$ határesetét!

4. (10 pont) Tekintsünk egy N szabad részecskéből álló klasszikus gázt! Egy részecske Hamilton-függvénye: $H(\mathbf{p}) = \alpha|\mathbf{p}|^\nu$, ahol $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_d)$ a részecske impulzusa d dimenzióban, és $\alpha > 0, \nu > 0$. Határozzuk meg a gáz energiáját a hőmérséklet függvényében a) mikrokanonikus, b) kanonikus sokaságban!

Hasznos formulák: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, $n! = \Gamma(n+1)$, ha $n = 0, 1, 2, \ldots$. A d dimenziós, R sugarú gömb térfogata: $C_d R^d$, ahol $C_d = \pi^{d/2}/\Gamma(1 + d/2)$, Stirling-formula: $\ln n! \approx n \ln - n$, ha $n \gg 1$.

Cserti József

Statisztikus fizika, 2. zárthelyi, III. BSc fizikus szak
(2011. május 18. (szerda), 10:15 – 11:45, 90 perc)

1. (10 pont) Számítsuk ki a $T = 0$ hőmérsékletű ideális fermiongáz Fermi-energiáját (eV-ban) rézatomok szabad elektronjaira! Adatok: az elektronok sűrűsége rézben $N/V = 8{,}47 \cdot 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$, az elektron tömege $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg és a töltése $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C, a Planck-állandó $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js.

2. (10 pont) a) Hányszorosára változik a Fermi-gáz Fermi-hőmérséklete, ha a részecskesűrűséget kétszeresére növeljük?
b) Hányszorosára változik a Bose-gáz Bose-kondenzációjának kritikus hőmérséklete, ha a részecskesűrűséget kétszeresére növeljük?

3. (10 pont) Kétdimenziós Fermi-gázban (pl. grafénben) az elektronok energiája: $\varepsilon(\mathbf{p}) = c|\mathbf{p}|$, ahol $\mathbf{p}$ az elektron impulzusa és c egy sebesség dimenziójú paraméter. Határozzuk meg a gáz energiáját a hőmérséklet és a részecskeszám függvényében Bethe–Sommerfeld-sorfejtésben alacsony hőmérsékleten (T/T_F-ben vezető rendig, ahol T_F a Fermi-hőmérséklet)!

4. (10 pont) Háromdimenziós Bose típusú gerjesztések kvantumgázában egy részecske energiája: $\varepsilon(\mathbf{p}) = \alpha|\mathbf{p}|^3$, ahol $\mathbf{p}$ a gerjesztés impulzusa és α egy állandó. Tudjuk, hogy a gerjesztések száma nem marad meg. Mekkora a gerjesztések kémiai potenciálja? Számítsuk ki a kvantumgáz fajhőjének és entrópiájának hőmérsékletfüggését! (A dimenziótlan integrált nem kell kiszámolni, de ki lehet.)