1. $S = k_b \ln \Omega \approx k_b \ln \Omega_0$, ha N elég nagy. Ekkor $\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} = \frac{1}{T} = k_B \frac{3}{4} N \left(\frac{E}{N\varepsilon}\right)^{-1/4}$. Ebből kifejezhető $E(T,N)$, amit visszaírva az első egyenletbe, kapjuk $S(T,N)$. Ebből pedig egyszerűen adódik $c_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N}$.

2. Definíciókat használva, deriválás segítségével:

   $$Z_1 = \sum_n e^{-\beta E_n} = e^{-\beta(-\varepsilon)} + 2\cdot e^{\beta\cdot 0} + e^{-\beta\varepsilon} = 2\left(1+\mathrm{ch}(\beta\varepsilon)\right)$$

   $$Z = Z_1^N$$

   $$E(T) = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{1}{Z} N \frac{\partial Z_1}{\partial \beta} = -\frac{N}{2\left(1+\mathrm{ch}(\beta\varepsilon)\right)} 2\,\mathrm{sh}(\beta\varepsilon)\varepsilon = -\frac{N\varepsilon\,\mathrm{sh}(\beta\varepsilon)}{1+\mathrm{ch}(\beta\varepsilon)}$$

   Határesetként látható, hogy $E(T\to 0) = -\varepsilon$ illetve $E(T\to\infty) = 0$.

   $$F(T) = -k_B T \ln Z = -k_B T N \ln Z_1$$

   $$-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N} = S = k_B N\left(\ln Z_1 - T\frac{1}{Z_1} 2\,\mathrm{sh}(\beta\varepsilon)\frac{\varepsilon}{k_B T^2}\right) = k_B N\left(\ln\left[2\left(1+\mathrm{ch}(\beta\varepsilon)\right)\right] - T\frac{1}{2\left(1+\mathrm{ch}(\beta\varepsilon)\right)} 2\,\mathrm{sh}(\beta\varepsilon)\frac{\varepsilon}{k_B T^2}\right)$$

   Határesetben $S(T\to 0) = 0$, illetve $S(T\to\infty) = \ln 4$ (aztán lehet, hogy elszámoltam).

3. $\left\langle ar^2\right\rangle = \left\langle ax^2\right\rangle + \left\langle ay^2\right\rangle + \left\langle az^2\right\rangle = 3kT/2 \Rightarrow \left\langle r^2\right\rangle = 3kT/(2a)$, így $\left\langle|\mathbf{r}_S|\right\rangle = \left\langle\left|\frac{\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\ldots+\mathbf{r}_N}{N}\right|\right\rangle$ felhasználásával $\left\langle|\mathbf{r}_S|^2\right\rangle = \frac{\overbrace{\left\langle|\mathbf{r}_1\mathbf{r}_1|\right\rangle}^{=\langle r^2\rangle} + \overbrace{\left\langle|\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2|\right\rangle}^{=0} + \ldots + \overbrace{\left\langle|\mathbf{r}_1\mathbf{r}_N|\right\rangle}^{=0} + \overbrace{\left\langle|\mathbf{r}_2\mathbf{r}_1|\right\rangle}^{=0} + \overbrace{\left\langle|\mathbf{r}_2\mathbf{r}_2|\right\rangle}^{=\langle r^2\rangle} + \ldots + \overbrace{\left\langle|\mathbf{r}_2\mathbf{r}_N|\right\rangle}^{=0} + \ldots + \overbrace{\left\langle|\mathbf{r}_N\mathbf{r}_N|\right\rangle}^{=\langle r^2\rangle}}{N^2}$. A jelölt mennyiségek azért 0-k, mert a vizsgálandó mennyiségek egymástól függetlenek (korrelációjuk 0, meg ilyesmi, valszámból volt), vagyis $\left\langle {r_S}^2\right\rangle = 3kT/(2aN)$.

   $F = -k_B T \ln Z = -k_B T \ln \frac{\left(\int \frac{dx\cdot dy\cdot dz\cdot dp_x\cdot dp_y\cdot dp_z}{h^3} e^{-\beta\left(c\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2}+a\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)}\right)^N}{N!}$, az integrálás pedig triviális.

4. Jellemezhetjük a folt szétkentségét annak szórásával, $\sigma_x = L\sigma_\phi$, ahol bal oldalon a folt egy iránybeli szétkentségét jellemző, 1 dimenziós szórása szerepel, jobb oldalt pedig a tükör-fal távjának a tükör szög szerinti helyzetének a szórásának a szorzata. $\sigma_\phi = \left\langle\phi^2\right\rangle - \left\langle\phi\right\rangle^2$, ahol utóbbi tag 0. Mivel $E_{rot} = D\phi^2/2 \Rightarrow \left\langle E_{rot}\right\rangle = kT/2 \Leftrightarrow \left\langle D\phi^2/2\right\rangle = kT/2 \Rightarrow \left\langle\phi^2\right\rangle = kT/D$, így $\sigma_x = LkT/D$, ahol D az a csúnyaság.