A sorbanállás elmélete

tételkidolgozás

2010. május 20.

1. tétel

1.1. A tömegkiszolgálási rendszerek elméletének alapjai

a) beérkezés -> b) kiszolgálási idő -> c) távozási folyamat

a) és c) független, azonos eloszlású valószínűségi változó

Beérkezés: ξ_n idő várakozás, majd τ_n időpontban beérkezik az n-dik igény, ezek mind független eloszlású valószínűségi változók.

Kiszolgálási szabály: FCFS, First Come First Served, vagyis aki előbb érkezik előbb szolgálódik ki, ugyanaz mint elektronikában a pipeolás.

1.2. Kendall-féle osztályozás

érkezés/kiszolgálás/kiszolgáló egységek száma/kapacitás (ha ∞ akkorelhagyjuk), M -> exp eloszlás (Markov-folyamatok), G -> általános (nem exp) eloszlás

1.3. M/M/1 rendszer tranziens vizsgálata, transzformáltak alkalmazása

Markov-lánc: időktől függő v.v. rendszere $X_k : k = 0, 1, 2 \dots$ diszkrét paraméterű $(X(k))$ $X_t : t \geq 0$ folytonos paraméterű$(X(t))$ Iértéktartomány, ha diszkrét -> Markov lánc, egyébként Markov-folyamat

Speciális eset: $I = 0, 1, 2 \dots$. $[0, t]$-n beérkezett igények száma - folytonos folyamat $(A(t))$.

Markov-tulajdonságú Markov láncra

$$P(S_{n+k} = i_{n+k} | S_0 = i_0, \dots, S_n = i_n) = P(S_{n+k} = i_{n+k} | S_n = i_n) k \geq 1$$

Folytonos paraméter

$$P(S_t = X_t | S_{\tau_1} = X_{\tau_1}, \dots, S_{\tau_n} = X_{\tau_n}) = P(S_t = x_t | S_\tau = i_\tau) k < 1$$

$\tau_1 < \dots < \tau_n < t$, ahol τ_k eloszlása $\Gamma(k, \lambda)$, ha $\xi_1, \xi_2, \dots \lambda$ paraméterű exp, akkor a $[0, t]$-n beérkező igények száma $A(t)dt$ paraméterű Poisson folyamat.

$P(A(t)=k)=\frac{(t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$, ez $[s,t]=[0,t]-[0,s]$ intervallumon: $A(t)-A(s)\approx\lambda(t-s)$

A Poisson-folyamat egyben Markov-lánc is:

$$P(A(t)=k)=P(\tau_k\leq t<\tau_k+\xi_{k+1})=\int_0^t\int_{t-y}^{\infty}\lambda e^{-z}\frac{\lambda_k y^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda y}\,dz\,dx.$$

Lássuk tehát az M/M/1 rendszert:

- 1 kiszolgáló
- $N(t)$ rendszerben lévők száma
- λ par. függet. exp v.v. beérkezés
- μ par. függet. exp v.v. kiszolgálás
- $A(t)$ a $[0,t]$-n beérkező összes igény
- $P(A(t)=k)=\frac{(\lambda x)^k}{k!}e^{-\lambda t}$

N(t) változik a z idő minimumáról:

$P(min(\xi,\eta)>z)=P(\xi>z,\eta>z)=P(\xi>z)P(\eta>z)=e^{-\lambda z}e^{-\eta z}=e^{-(\lambda+\eta)z}$,

P$(\xi=min(\xi,\eta))=P(\xi<\eta)=\int_0^\infty\int_x^\infty\lambda e^{-\lambda x}\mu e^{-\mu y}\,dx\,dy=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

Tehát a rendszerben $\lambda+\mu$ idő után történik változás, $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ valószínűséggel beérkezés, $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ valószínűséggel távozás történik.

Milyen $N(t)$ eloszlása? Hogyan változik rövid idő alatt?

$P(N(t+\Delta t)-N(t)=j|N(t)=n)=?=P(N(t+\Delta t)=n+j)-P(N(t)=n)$

=> P(N(t+Δt) $=k)=\sum_{n=0}^{\infty}P(N(t+\Delta t)=k,N(t)=n)$

Tehát annak a valósznűsége, hogy nincs változás $P\approx e^{-(\lambda+\mu)\Delta t}$, az hogy 1 változás történik: $P\approx(\lambda+\mu)\Delta te^{-(\lambda+\mu)\Delta t}*e^{-(\lambda+\mu)\Delta t}$ (P(1 váltzoás) + P(nincs változás)) és így tovább.

Ha ezt felírjuk minden k-ra ahol $p'_k(t) = P(N(t) = k)$ egy differenciálegyenletet kapunk:

$$p'_k(t) = -(\lambda + \mu)p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \mu p_{k+1}(t),\ k > 0$$
$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),\ k = 0$$

Amit egy mátrixban is felírhatunk:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \lambda & -(\lambda+\mu) & mu) & \mu & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda & -(\lambda+\mu) & mu) & \mu & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Generátor fv:

$$P(t,z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(N(t) = k)$$

Deriváltja:

$$z\frac{\partial}{\partial t}P(t,z) = P(t,z)(\lambda z^2 - (\lambda+\mu)z + \mu) + p_0(t)\mu(z-1)$$

Ezt Laplace transzformáljuk:

$$P^*(s,z) = \int_0^\infty \lambda e^{-st} P(t,z)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int_0^\infty e^{-st} p_k(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k^*(s)$$

Itt felhasználtuk, hogy $\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt = -f(0) + sf^*(s)$ és hogy $P(0,z) = z^i$

$$P^*(s,z) = \frac{z^{i+1} + \mu(z-1)p_0^*(s)}{zs - (\lambda z^2 - (\lambda+\mu)z + \mu)} \tag{1}$$

Ha f korlátos a hatványsor a nyílt egységkörön konvergens, bal oldala a komplex egységkörön értelmezve van, a jobb oldal nem feltétlenül, hogyha a nevező 0, a sziámláló is: $\lambda z^2 - (\lambda + \mu + s)z + mu = 0$, $(\lambda + \mu + s)z$-nek 1 gyöke va z=0-ban, egyetlen gyöke az egységkörön: α_1.

Sok számolás...

$$P^*(s,z) = \frac{z^{i+1} + \mu(z-1)\frac{-\alpha_1^{i+1}}{\mu(\alpha_1 - 1)}}{-\lambda(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}$$

Ebből sajnos a $P_k(t), t \geq 0, k \geq 0$ zárt intervallum nem kapható meg.

2. tétel

2.1. Folytonos paraméter, stacionárus eloszlás

Mostantól a $t->\infty$ határesetet vizsgáljuk. Tegyük fel hogy $N(0)=i$.Ekkor

$$P(N(t)=k)=P_k(t), \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) z^k = P(t,z), \int_0^{\infty} P(t,z)e^{-st}\,ds = P^*(s,z), s>0$$

ahol P^* meghatározható, mégpedig:

$$\int_0^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) z^k e^{-st}\,ds = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int_0^{\infty} P_k(t)e^{-st}\,ds = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P_k^*(s)$$

$P_k^*(s), k=0,1,\dots$ pedig meghatározható, viszont $P_k^*(t)$ nem adható meg zárt alakban.

Tehát akkor nézzük mi van ha $t->\infty$:

$$P_k'(t) = -(\lambda+\mu)P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t) + \mu P_{k+1}(t),\ k>0$$

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),\ k=0$$

Itt megmutatható, hogy $\lim\limits_{t\to\infty} P_k(t) = P_k, \lim\limits_{t\to\infty} P_k'(t) = 0$, így:

$$0 = -(\lambda+\mu)P_k + \lambda P_{k-1} + \mu P_{k+1},\ k>0$$

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1,\ k=0$$

Ebből könnyen láthatóan következik, hogy $P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0$. A rekurziót tovább folytatva láthatjuk, hogy $P_k = P_0 \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}$. A teljes valószínűség tételéből tudjuk, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ ebből kifejezhetjük P_0-t:

$$P_0\left(1+\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}\right) = 1 \to P_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}}$$

Állítás: ha $\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} < \infty$, akkor $\exists P_k = \lim\limits_{t\to\infty} P_k(t), P_k'(t)\to 0, \sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$

2.2. Rendszerben lévő igények száma

Speciális M/M/1 eset, ha $P_k = P_0 \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} = P_0 \frac{\lambda}{\mu})^k$, tehát nem függ a j indextől, tehát a beérkezés és a kiszolgálás valószínűsége független a rendszer aktuális terheltségétől.

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda}{\mu}\Big)^k} \cong \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{\lambda}{\mu}\Big)^k}$$

Ha $\frac{\lambda}{\mu} = \rho < 1$, akkor az összeg véges lesz:

$$P_0 = 1 - \rho \, P_k = (1-\rho)\rho^k, k \geq 0$$

$$\lim_{t \to \infty} P(N(t) = k) = (1-\rho)\rho^k, k \geq 0$$

$$\lim_{t \to \infty} P(N(t) = \lim_{t \to \infty} < N(t) >) = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-\rho)\rho^k = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

Így P_k-ra geometriai/Pascal-eloszlást kaptunk (első sikeres kísérlet valószínűsége). Hogy a rendszer ne divergáljon hamarabb kell kiszolgálni átlagosan mint a beérkezési idő, tehát $\lambda < \mu$

2.3. Rendszerben töltött idő

Ez $k+1$db μ exp függet. v.v. összege lesz, tehát $\Gamma_{k+1}(\mu)$. A sűrűségfüggvény feltételes sfv, vagyis veérkezéskor k igény van a rendszerben:

$$F(\lambda, z) = \frac{\mu^{k+1} z^k}{k!} e^{1\mu z}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^k \frac{\mu^{k+1} z^k}{k!} e^{-\mu z} = e^{-\mu z}(1-\rho)\mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho \mu z)^k}{k!} = \cdots = e^{-(\mu-\lambda)z}(\mu - \lambda)$$

Tehát az átlagosan rendszerben töltött idő: $\frac{1}{\mu - \lambda}$

2.4. Várakozó igények száma

A t időpillanatban várakozók számát jelölje $w(t)$, ekkor $\lim_{t \to \infty} P(w(t) = k) =?$

$$w(t) = \begin{cases} N(t) - 1 & N(t) \geq 0 \\ 0 & N(t) = 0 \end{cases}$$

$$w(t) = 0 = N(t) = 0 + N(t) = 1, w(t) = j = N(t) = j + 1$$

$$\lim_{t\to\infty} P(w(t) = k) = \begin{cases} (1-\rho) + (1-\rho)\rho & k = 0 \\ (1-\rho)^{k+1} & k \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} (1-\rho)^2 & k = 0 \\ (1-\rho)^{k+1} & k \geq 0 \end{cases}$$

Átlagosan:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(1-\rho)\rho^{k+1} + 0(1-\rho)^2 = \rho^2(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}$$

Az előző kifejezésben a summa mögött pont egy derivált sor van $(\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1})' = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k$:

$$\rho^2(1-\rho)\frac{(1-\rho+\rho)}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

És már meg is kaptuk a végeredményt :)

2.5. Várakozással töltött idő

Ez $k$db μ exp összege, ha $k = 0$, a várakozási idő 0, ha $k > 0$, akkor $\Gamma_k(\mu)$. Így az átlagos várakozási idő:

$$0(1-\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\mu}(1-\rho)\rho^k = \frac{\rho}{\mu}(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1} = \frac{\rho}{\mu}\frac{(1-\rho)}{(1-\rho)^2} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

2.6. A Little-formula

	Várakozási	Rendszerben
Idő	$\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$	$\frac{1}{\mu-\lambda}$
$\downarrow$	$*\lambda$	$*\lambda$
Létszám	$\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$	$\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$

De miért van ez így? Mennyi a $[0, t]$-n beérkező összes igény $(A(t))$? Ezek az igények összesen mennyi időt töltöttek a rendszerben $(\gamma(t))$?

Legyen:

- $\frac{A(t)}{t} \to$ beérkezési intenzitás $\to \lambda$

- $\frac{\gamma(t)}{A(t)} \rightarrow$ egy igény által átlagosan a rendszerben töltött idő $\rightarrow \widehat{S}$
- $\frac{\gamma(t)}{t} \rightarrow$ rendszerben lévő igények átlagos száma $\rightarrow < N >$

Ezekből a Little-formula:

$$\frac{\gamma(t)}{t} = \frac{A(t)}{t}\frac{\gamma(t)}{A(t)} \rightarrow < N > = \lambda\widehat{S}$$

3. tétel

3.1. Az "elbátortalanított vásárlók" modellje, stacionárius eloszlás

Legyen a kiszolgálás μ exp függet. v.v ($\mu_k = \mu$), de a beérkezési folyamatt függjön k-tól, mégpedig:$\lambda_k = \frac{\alpha}{k+1}, k = 0, 1, \ldots$

$$P_k = P_0 \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} = P_0 \frac{\alpha^k}{\mu^k} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{1}{1+j} = P_0 \frac{\frac{\alpha^k}{\mu^k}}{k!}$$

$$P_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{\alpha^k}{\mu^k}}{k!}\right) = P_0 e^{\frac{\alpha}{\mu}} = 1, P_0 = e^{\frac{\alpha}{\mu}} \to P_k = \frac{\frac{\alpha^k}{\mu^k}}{k!} e^{\frac{\alpha}{\mu}}$$

Ez pedig egy $\frac{\alpha}{\mu}$ paraméterű Poisson eloszlás.

3.2. Rendszerben töltött idő

A beérkezett igény k igényt talál: $\frac{k+1}{\mu}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k \frac{k+1}{\mu} = \frac{1}{\mu} \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k + \sum_{k=0}^{\infty} k P_k \right) = \frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{\alpha}{\mu}\right) = \frac{\alpha + \mu}{\mu^2}$$

3.3. A beérkező igények által a rendszerben talált igények száma

- 1.beérkező igény $\pi_k^{(1)}$ valszínűséggel talál k igényt a rendszerben
- 2.beérkező igény $\pi_k^{(2)}$ valszínűséggel talál k igényt a rendszerben
- ...
- j. beérkező igény $\pi_k^{(j)}$ valszínűséggel talál k igényt a rendszerben

$\pi_k^{(1)} = P($1. beérkező igény k igényt talál a rendszerben$) = \sum_{l=k}^{\infty} P($1. beérkező k igényt talál$|N(0) = l) P(N(0) = l)$. Az első rész $= 0$, ha $l < k$.

$$\pi_k^{(1)} = \sum_{l=k}^{\infty} P_l \frac{\mu_l}{\lambda_l + \mu_l} \frac{\mu_{l-1}}{\lambda_{l-1} + \mu_{l-1}} \cdots \frac{\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1} + \mu_{k+1}} \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}$$

$$\pi_{k+1}^{(1)} = \sum_{l=k+1}^{\infty} P_l \frac{\mu_l}{\lambda_l + \mu_l} \frac{\mu_{l-1}}{\lambda_{l-1} + \mu_{l-1}} \cdots \frac{\mu_{k+2}}{\lambda_{k+2} + \mu_{k+2}} \frac{\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1} + \mu_{k+1}}$$

Ebből kaptunk is egy gyönyörű rekurzív formulát:

$$\frac{k + \mu_k}{\lambda_k} \pi_k^{(1)} = \frac{\mu_k + 1}{\lambda_k + 1} \pi_{k+1}^{(1)} + P_k$$

$\pi_k^{(2)} = P($2. beérkező igény k igényt talál a rendszerben| 1. igény i igényt talált $)P($1. beérkező i igényt talál). Az első rész $= 0$, ha $i + l < k$.

$$\pi_k^{(2)} = \sum_{i=max(k-1,0)}^{\infty} \pi_i^{(1)} \frac{\mu_{i+1}}{\lambda_{i+1} + \mu_{i+1}} \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \cdots \frac{\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1} + \mu_{k+1}} \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}$$

Innen a rekurzív formula:

$$\frac{k + \mu_k}{\lambda_k} \pi_k^{(2)} = \frac{\mu_k + 1}{\lambda_k + 1} \pi_{k+1}^{(2)} + \pi_{k-1}^{(1)}, k \geq 1$$

$$\frac{k + \mu_k}{\lambda_k} \pi_k^{(j)} = \frac{\mu_k + 1}{\lambda_k + 1} \pi_{k+1}^{(j)} + \pi_{k-1}^{(j-1)}, k \geq 1$$

Ezen felbuzdulva tegyünk így: $j \to \infty$, $\pi_k^{(j)} \to \pi_k$

$$\frac{\lambda_k + \mu_k}{\lambda_k} \pi_k = \frac{\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1}} \pi_{k+1} + \pi_{k-1}, k \geq 1$$

Mi van ha $k = 0$?

$$\pi_0^{(2)} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^{(1)} \frac{\mu_{i+1}}{\lambda_{i+1} + \mu_{i+1}} \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \cdots \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1} 1$$

$$\pi_1^{(2)} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^{(1)} \frac{\mu_{i+1}}{\lambda_{i+1} + \mu_{i+1}} \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \cdots \frac{\mu_2}{\lambda_2 + \mu_2} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1}$$

$$\pi_0^{(2)} = \frac{\mu_1}{\lambda_1}\pi_1^{(2)}$$

Általában:

$$\pi_0^{(j)} = \frac{\mu_1}{\lambda_1}\pi_1^{(j)}, j \to \infty, \pi_0 = \frac{\mu_1}{\lambda_1}\pi_1, \lambda_1\pi_0 - \mu_1\pi_1 = 0$$

Fejezzük ki π_0-ra:

$$\pi_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}\pi_0, \frac{\lambda_k + \mu_k}{\lambda_k}\pi_k = \frac{\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1}}\pi_{k+1} + \pi_k - 1$$

Azt szeretnénk kapni, hogy $\mu_{k+1}\pi_{k+1} - \lambda_{k+1}\pi_k = 0$.

$$\frac{1}{\lambda_{k+1}}(\mu_{k+1}\pi_{k+1} - \lambda_{k+1}\pi_k) = \frac{1}{\lambda_k}(\mu_k\pi_k - \lambda_k\pi_{k-1})$$

$$\mu_{k+1}\pi_{k+1} - \lambda_{k+1}\pi_k = \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}(\mu_k\pi_k - \lambda_k\pi_{k-1}) = \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1}}(\mu_{k-1}\pi_{k-1} - \lambda_{k-1}\pi_{k-2}) =$$

$$= \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1}(\mu_1\pi_1 - \lambda_1\pi_0) = 0$$

$$\pi_{k+1} = \frac{\lambda k + 1}{\mu_{k+1}}\pi k = \cdots = \pi_0 \prod_{j=1}^{k+1} \frac{\lambda_j}{\mu_j}, \sum \pi_k = 1$$

$$P_k = P_0 \prod_{j=1}^{k+1} \frac{\lambda_j}{\mu_j}{,}_k = 1$$

Megjegyzés: A tetszőleges időpontban beérkező igény más elszlást találhat mint a fix időpontban indíott, kivéve, ha $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda$, mert ekkor$P_k = \pi_k, k \geq 0$ (ezt nevezzük PASTA tulajdonságnak). Tehát M/M/1 rendszerre $P_k = \pi_k$.

Elbátortalanított vásárlóknál azonban

$$\pi_0 \prod_{j=1}^{k+1} \frac{\alpha}{(j+1)\mu} = \pi_0 \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^k \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\pi_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^k \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1$$

$$\frac{1}{\pi_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^k \frac{1}{(k+1)!} = \left(e^{\frac{\alpha}{\mu}-1}\right) \frac{\alpha}{\mu} \rightarrow \pi_0 = \frac{\alpha}{\mu} \frac{1}{\left(e^{\frac{\alpha}{\mu}} - 1\right)}$$

$$\pi_k = \frac{\alpha}{\mu\left(e^{\frac{\alpha}{\mu}} - 1\right)} \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^k \frac{1}{(k+1)!} = \left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^{k+1} \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{\left(e^{\frac{\alpha}{\mu}} - 1\right)}$$

4. tétel

4.1. M/M/∞ rendszer

Végtelen sok kiszolgálóegységünk van. $\lambda_k = \lambda, \mu_k =? \to \mu_k = k\mu$ A kiszolgálóegységek kimenete független. μ exp lesz. Ha a kiszolgálási idők $X_1, X_2, \ldots, X_k$, akkor a következő kiszolgálásig eltelő idő $min(X_1, \ldots, X_k)$

$$P(min(X_1, \ldots, X_k) > t) = P(X_1 > t, \ldots, X_k > t) = \prod_{j=1}^{k} P(X_j > t) = \left(e^{-\mu t}\right)^k = e^{-\mu k t}$$

Rendszerben lévő igények száma:

$$P_k = P_0 \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} = P_0 \frac{\lambda^k}{\mu^k} \frac{1}{k!} \to P_0 \left(1 + \sum \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \right) = 1$$

$$P_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}, P_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

4.2. Tranziens viselkedés

$$P(N(t) = k) = P_k(t)$$
$$P_k'(t) = -(\lambda_k + \mu_k)P_k(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) \; / * z^k \; , k > 0$$
$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) \; / * z^0 \; , k = 0$$

Tegyük fel, hogy $P(N(0) = i) = 1, P_k(0) = 0 k \neq i$. Ekkor a generátor fv. $P(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P_k(t)$. A peremfeltétel pedig $P(z,0) = z^i$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(z,t) = -\sum_{k=0}^{\infty} z^k \lambda_k P_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mu_{k+1} P_{k+1}(t) - \sum_{k=1}^{\infty} z^k \mu_k P_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} z^k \lambda_{k-1} P_{k-1}(t) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda z^k P_k(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k+1) z^k P_{k+1}(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \mu k z^k P_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda z^k P_{k-1}(t) =$$

$$= -\lambda P(z,t)+\lambda z P(z,t)+\mu\frac{\partial}{\partial z}P(z,t)-\mu z\frac{\partial}{\partial z}P(z,t) = \lambda(z-1)P(z,t)+\mu(1-z)\frac{\partial}{\partial z}P(z,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P(z,t) + 1 + \mu(z-1)\frac{\partial}{\partial z}P(z,t) = \lambda(z-1)P(z,t)$$

És így kaptunk egy elsőrendű parciális differenciál-egyenletet. Látható hogy a megoldást a $0 \leq t, 0 \leq z < 1$ intervallumon kell keresni. Térjünk át új változóra: $t(u), Z(u), P(z(u),t(u)) = f(u)$. Ekkor $f'(u) = \frac{\partial}{\partial z}Pz'(u) + \frac{\partial}{\partial t}Pt'(u)$. Legyen$z'(u) = \mu(z(u)-1), t'(u) = 1$. Ekkor $f'(u) = \lambda(z(u)-1)f(u)$. Tegyük fel hogy $t'(u) = 1$ mellett $t(0) = 0$, így $t(u) = u$.

$$z'(u) = \mu(z(u)-1) \to (z-1)' = \mu(z-1), z(u) - 1 = C_2 e^{\mu u}$$

$$f(u) = C_3 e^{\int_1^u \lambda(z(u)-1)\,ds} = C_3 e^{\int_1^u C_2 e^{\mu s}\,ds} = C_3 e^{2\frac{1}{\mu}(e^{\mu u}-1)}$$

$$t(n) = u,\ z(n) - 1 = C_2 e^{\mu u},\ f(n) = C_3 e^{C_2\frac{\lambda}{\mu}(e^{\mu u}-1)} = C_3 e^{(z(n)-1)\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{\mu u})}$$

z(0)-1=C$_2$ $\to z(0) = C_2{+}1, f(0) = z(0)^i = C_{33} = (C_2{+}1)^i f(u)e^{-\frac{\lambda}{\mu}(z-1)(1-e^{-\mu t})} =$ $C_3 = (C_2+1)^i = ((z-1)e^{-\mu u}+1)^i$

$$P(z,t) = \left(1 - e^{-\mu z} + z e^{-\mu z}\right)^i e^{-\frac{\lambda}{\mu}(z-1)(1-e^{-\mu t})} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P_k(t)$$

Legyen $P(\xi_1, \ldots, \xi_i)$ügget. v.v. úgy, hogy $P(\xi_j = 0) = 1 - e^{-\mu z}, P(\xi_j = 1) = e^{-\mu z}$. Ekkor:

$$e^{-\frac{\lambda}{\mu}(z-1)(1-e^{-\mu t})} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} \sum_z \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}z\right)^k (1-e^{-\mu t})}{k!} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{-\mu t}\right)\right)^k (1-e^{-\mu t})}{k!}$$

Ez $-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})$-paraméterű Poisson-eloszlás.

4.3. Stacionárius eloszlás, várakozási idő

$P(z,t) \to e^{-\frac{\lambda}{\mu}(uz)}$, ez $\frac{\lambda}{\mu}$ paraméterű Poisson elszlás. Tartsunk $t \to \infty$!

$N(t)$elsozsásfüggvénye így $\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})$ szerint $B(i, e^{-\mu t})$, ami binomiális eloszlás. Ami aszimptotikusan tart 0-hoz. Tehát egy igény csak a kiszolgálási idejét tölti a rendszerben, városakozási ideje 0!

5. tétel

5.1. M/M/m rendszer, stacionárius eloszlás

5.2. A kiszolgálás alatt lévő igények átlagos száma

5.3. Várakozási idő

5.4. Erlang C-formula, Erlang-féle veszteség formula

5.5. Összehasonlítás m=2 és m=1(kétszeres kiszolgálási sebesség) esetén

6. tétel

6.1. A távozó igények folyamata az M/M/1 rendszerben

6.2. A távozó igények folyamata az M/M/m rendszerben (levezetés nélkül)

7. tétel

7.1. M/G/1 rendszer

7.2. Markov modell, speciális esetben a távozó igények által hátrahagyott igények száma

7.3. A stacionárius eloszlás várható értéke (Polacsek-Hincsin formula)

7.4. A stacionárius eloszlás szórásnégyzete

7.5. A távozó igények által hátrahagyott igények és a beérkező igények általa rendszerben talált igények száma stacionárius megegyezése általános tömegkiszolgálási rendszerben

8. tétel

8.1. A transzformáltakra vonatkozó Polaczek-Hincsin formula

8.2. Várakozási idő, rendszeridő

9. tétel

9.1. A foglaltsági és az üresjárási periódus

9.2. Az eloszlásra vonatkozó egyenlet

9.3. A foglaltsági periódus átlagos hossza

10. tétel

10.1. A G/M/1 rendszer

10.2. A beérkező igények által talált igények száma mint beágyazott Markov-lánc

Tartalomjegyzék