

Sorbanállás elmélete

Fizika BSc - Alkalmazott fizika szakirány

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Jegyzetet készítette:
Molnár Dávid és Vida Ádám

Oktató:
Dr. Michaletzky György

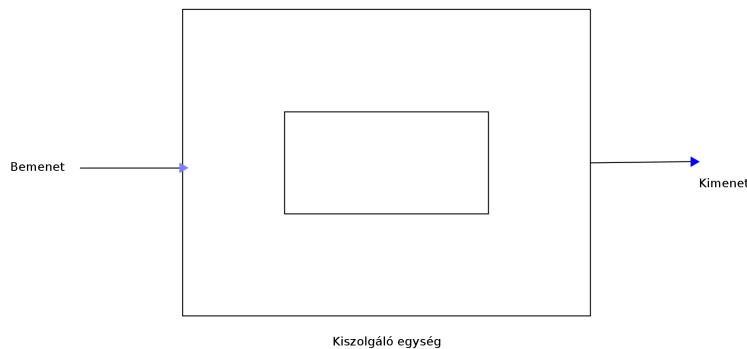
2013

Tartalomjegyzék

1. 1. előadás - 2013.02.12.	3
2. 2. előadás - 2013.02.19	8
3. 3. előadás - 2013.02.26	15
4. 4. előadás - 2013.03.05.	20
5. 5. előadás - 2013.03.12.	25
6. 6. előadás - 2013.03.19.	28
7. 7. előadás 2013.03.26.	35
8. 8. előadás - 2013.04.09.	40
9. 9. előadás 2013.04.16	44
10.10. előadás - 2013.04.23.	48
11.11. előadás - 2013.04.30.	52
12.12. előadás - 2013. 05.07.	57
13.13. előadás - 2013.05.14.	64

1. 1. előadás - 2013.02.12.

Az alapvető fogalmak bevezetésével kezdjük. Példaként egy közértet, mint kiszolgálóegységet tekintünk.



1. ábra. Kiszolgálóegység modellje

A kiszolgáló rendszerrel kapcsolatos fontosabb alapfogalmak: Valamilyen rendszer szerint ún. igények érkeznek a rendszerbe, sorbanállnak, majd sorra kerülnek és megtörténik a kiszolgálás, azután eltávoznak a rendszerből.

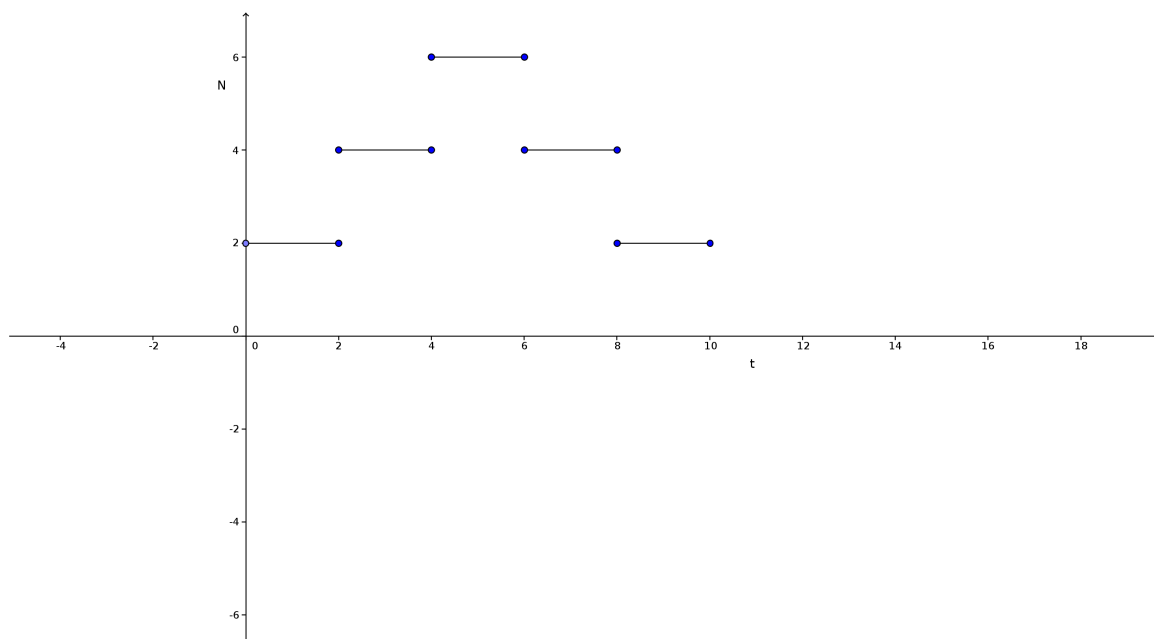
- Az egyes igények kiszolgálási időtartamai: $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n, \dots$ (ezek azonos eloszlású, független valószínűségi változók)
- Az egyes igények várakozási időtartamai: $W_1, W_2, W_3, \dots, W_n, \dots$
- Rendszerben töltött idő: $S_j = W_j + X_j, j \geq 1$.
- Beérkezési folyamat: jelölje $A(t)$ a $[0, t]$ intervallumon az összes beérkezések számát
- Kiszolgálási protokoll: FCFS - First Come First Served (beérkezés sorrendjében történik a kiszolgálás)
- Kiszolgálóegységek száma: kezdetben olyan rendszereket tekintük, ahol ez egy.

A beérkezési folyamatot – a legegyszerűbb esetben lehet másként is jellemzni: jelölje τ_1 a nulla időpont utáni első beérkezés időpontját, τ_2 a másodikét, stb. Az egyes beérkezések közötti időtartamokat $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ jelöli. Azaz $\zeta_n = \tau_n - \tau_{n-1}$.

Ekkor a $[0, t]$ időintervallumon pontosan akkor érkezett be éppen n igény, az n -dik beérkezés t előtt van, az $n + 1$ -dik már utána. Pontosabban, ha $\tau_n \leq t$, és $\tau_{n+1} > t$.

Azaz $\{A(t) = n\} = \{\tau_n \leq t < \tau_{n+1}\}$. Másféleképpen, $A(t) = \inf \{n \mid \tau_{n+1} > t\}, t \geq 0$.

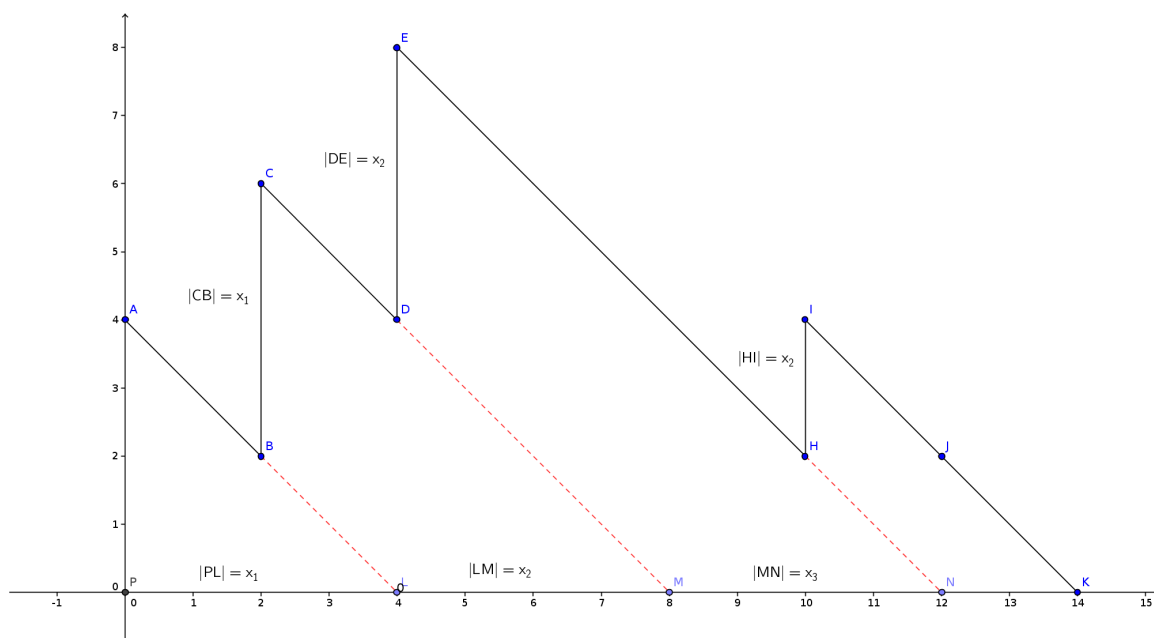
Alapvető mennyiség: a t pillanatban a rendszerben lévő igények száma. Jelölje ezt $N(t)$. Általában



2. ábra. Rendszerben lévő igények száma

ennek vizsgálata igen bonyolult. Amint azonban látni fogjuk, a legegyszerűbb eset akkor adódik, ha feltételezzük, hogy mind a beérkezések közötti időtartamok, mind a kiszolgálási idők exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Ezen eset egyszerűsége az exponenciális eloszlás két fontos tulajdonsága miatt van. Mielőtt ezek tárgyalására rátérnénk, még egy fontos rendszerjellemző mennyiséget is megemlítünk.

Ez a hátralévő teljes kiszolgálási idő, azaz az az időtartam, amely szükséges ahhoz, hogy a rendszerben tartózkodó összes igény kiszolgálása megtörténjék.



3. ábra. Hátralévő teljes kiszolgálási idő

A felfelé történő ugrások időpontjai a beérkezéseknek felelnek meg, az ugrások magassága az igény aktuális kiszolgálási ideje, a 45°-ban lefele menő egyenesek tengelymetszetei a távozások időpontjai.

Az előbb említett két tulajdonság közül az egyik az ún. "örökifjú" tulajdonság. Legyen X μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor X eloszlásfüggvény a következő:

$$F_X(x) = P(X < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x} & \text{ha } x \geq 0 \\ 0, & \text{ha } x \leq 0. \end{cases}$$

Ez alapján a sűrűségfüggvény ennek a deriváltja, vagyis:

$$f_x = \begin{cases} \mu e^{-\mu x}, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{ha } x \leq 0. \end{cases}$$

Tekintsük ekkor $P(X > u + y | X > u)$ mennyiséget $u \geq 0, y \geq 0$ esetén.

$$P(X > u + y | X > u) = \frac{P(\{X > u + y\} \cap \{X > u\})}{P(X > u)} = \frac{P(X > u + y)}{P(X > u)} = \frac{e^{-\mu(u+y)}}{e^{-\mu u}} = e^{-\mu y} = P(X > y),$$

ahol $u > 0, y > 0$. Ezért hívják az eloszlást "örökifjú" tulajdonságúnak.

A másik fontos tulajdonság taglalása előtt vizsgáljuk meg, hogy a tömegkiszolgálási rendszer szempontjából milyen kérdés merül fel. Tegyük fel tehát, hogy:

- $X_1, \dots, X_n, \dots$ – kiszolgálási időtartamok – független μ -paraméterű exponenciális valószínűségi változók;
- A beérkezések közti időtartamok – $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ – független λ -paraméterű exponenciális valószínűségi változók.

A rendszer állapota, azaz a rendszerben lévő igények száma akkor változik meg, ha vagy beérkezik egy új igény, vagy pedig egy igény kiszolgálása befejeződik és így eltávozik a rendszerből. Mivel az exponenciális eloszlás örökifjú, ezért egy adott időpont után hátralévő kiszolgálási idő, vagy a következő beérkezésig hátralévő idő is exponenciális eloszlású. Tehát a rendszerben változása két ilyen – egymástól független – exponenciális eloszlású valószínűségi változó minimumának megfelelő időpontban fog megtörténni. Nézzük meg, a hátralévő kiszolgálási idő (HKI) és a hátralévő beérkezési idők (HBI) kapcsolatát!

$$(min(HKI, HBI))$$

Amint már említettük, az "örökifjú" tulajdonság miatt ezek is exponenciális eloszlásúak, egymástól függetlenek. Jelölje a rövidség kedvéért ξ a hátralévő kiszolgálási időt, illetve η a következő beérkezésig hátralévő időt. Ekkor tehát:

- ξ : μ -paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó
- η : λ -paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó

Tehát nekünk a $\min(\xi, \eta)$ eloszlása kell.

- $\eta < \xi$: felfele ugrik az $N(t)$ függvény, mivel előbb következett be a beérkezés, mint befejeződött volna a kiszolgálás.
- $\eta > \xi$: lefele ugrik az $N(t)$ függvény, ekkor a következő beérkezés előtt befejeződik a kiszolgálás.
- $\eta = \xi$: ilyen eset "nem létezik", mert $P(\xi = \eta) = 0$, vagyis ennek nulla a valószínűsége!

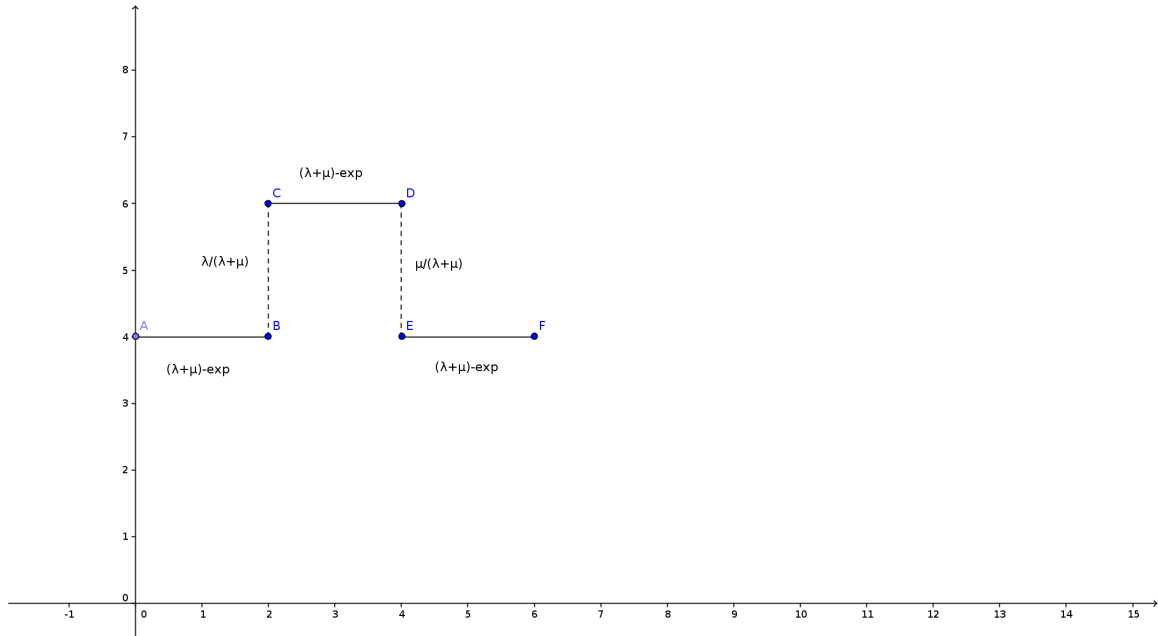
Kíváncsiak vagyunk a $\min(\xi, \eta)$ mennyiségre, illetve $P(\eta > \xi)$ -re és $P(\eta < \xi)$ -re.

$$P(\min(\eta, \xi) > u) = P(\xi > u, \eta > u) = P(\xi > u) \cdot P(\eta > u) = e^{-\mu u} \cdot e^{-\lambda u} = e^{-u(\mu+\lambda)}$$

Ekkor a $\min(\xi, \eta)$ tehát $(\lambda + \mu)$ -paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

$$\begin{aligned} P(\eta > \xi) &= \int_{y>x \geq 0} \lambda e^{-\lambda y} \cdot \mu e^{-\mu x} dy dx = \int_0^\infty \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda y} \cdot \mu e^{-\mu x} dy dx = \\ &= \int_0^\infty \mu e^{-\mu x} \cdot [-e^{-\lambda y}]_x^\infty dx = \int_0^\infty \mu e^{-(\lambda+\mu)x} dx = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \end{aligned}$$

A fent levezetés alapján $P(\xi > \eta) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}$. Ezért tehát ebben az esetben, ha a rendszer nem üres, akkor $\mu + \lambda$ -paraméterű exponenciális ideig marad változatlan állapotban. Ennek lejártá után $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ valószínűséggel eggyel növekszik – beérkezés – a rendszerben lévő igények száma, $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ valószínűséggel pedig eggyel csökken – kiszolgálás. Azaz



4. ábra. Folyamat mikrostruktúrája

az előzőekben megfigyelt viselkedés jelentősen általánosítható:

- Legyen az állapottér: $0, 1, 2, \dots$. A számunkra érdekes $N(t)$ sztochasztikus folyamat innen veszi fel az értékeit.
- Ha $N(t) = k$, akkor q_k -paraméterű exponenciális ideig nem változik az értéke,
- Ugráskor $k \rightarrow l : q_{kl}$ valószínűséggel ($l \neq k$)
- Feltevés: $\sum_{l, l \neq k} q_{kl} = 1$

Az ilyen folyamatokat nevezzük Markov folyamatoknak[1]. (Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága miatt, ahhoz, hogy a rendszer jövőbeni viselkedését leírjuk, nem érdekes számunkra, hogy mi volt a múltban, csak az, hogy aktuálisan éppen mennyi az értéke.)

Vezessük be a következő jelölést: $p_k(t) = P(N(t) = k), k \geq 0$. Szeretnénk leírni ezen függvények viselkedését, feltéve, hogy a $q_k, q_{kl}, l \neq k$ mennyiségek adottak. Képezzünk különbségi hányadost:

$$\frac{p_k(t+h) - p_k(t)}{h}; \quad t \geq 0, h > 0,$$

és tekintsük a $h \rightarrow 0$ határértéket. Alkalmazzuk az első tagban a teljes valószínűség tételét, azaz tekintsük az $N(t) = j$ események szerinti feltételes valószínűségeket:

$$\frac{1}{h} [P(N(t+h) = k) - P(N(t) = k)] = \frac{1}{h} \left(\sum_{j=0}^{\infty} P(N(t+h) = k | N(t) = j) P(N(t) = j) - P(N(t) = k) \right)$$

A feltételes valószínűségek pontos meghatározása nehéz, mert a kicsiny nagyságú h hosszúságú intervallumon is számtalan ugrás történhet. Azonban csak a $h \rightarrow 0$ határérték érdekel minket. Ha a t pillanatban éppen a j állapotban van a rendszer, akkor a következő lehetőségek vannak:

- a h -hosszú intervallumon nem történik semmi, ennek valószínűsége: $e^{-q_j h}$, (hiszen q_j -paraméterű exponenciális ideig marad itt, azaz annak valószínűségét kell tekinteni, hogy ennek értéke nagyobb, mint h), amely 1-hez tart – ez tehát nem elhanyagolható nagyságrendű;
- legalább egyet ugrik, ennek esélye: $1 - e^{-q_j h}$ – ez h -val osztva q_j -hez tart, azaz nem elhanyagolható nagyságrendű;
- Ugyanakkor az, hogy legalább kettőt ugrik, ennek a hozadéka elhanyagolható!

Ugyanis:

$$P((t, t+h) \text{ intervallumon legalább két ugrás volt} | N(t) = j) = \sum_{l, l \neq j} \int_0^h q_j e^{-q_j s} q_{jl} (1 - e^{q_l(h-s)}) ds$$

(q_j -paraméterű exponenciális ideig van a j állapotban – a sűrűségfüggvény $q_j e^{-q_j s}$ –, " s " idő elteltével bekövetkezett az első ugrás, onnan átugrik valamely más l állapotba – ennek valószínűsége q_{jl} –, itt most q_l paraméterű exponenciális ideig tartózkodik, és a hátralévő " $h-s$ " idő alatt történik még egy ugrás – ennek esélye $1 - e^{-q_l(h-s)}$.)

Alkalmazzuk az $e^{-q_j s} \leq 1$, és $1 - e^{-q_l(h-s)} \leq q_l(h-s)$ becsléseket. Adódik így, hogy

$$P((t, t+h) \text{ intervallumon legalább két ugrás volt} | N(t) = j) \leq q_j \sum_{l, l \neq j} q_{jl} q_l \int_0^h (h-s) ds$$

Tegyük fel, hogy:

$$\sum_{l, l \neq j} q_{jl} q_l < \infty \Rightarrow P(\text{legalább két ugrás volt a } (t, t+h) \text{ intervallumon} | N(t) = j) = O(h^2)$$

Ha h -val leosztunk, akkor a kifejezés nullához tart.

Ezt felhasználva a fenti differenciálhányados meghatározható. Ennek eredményeképpen kapjuk az ún. Chapman-Kolmogorov-féle differenciálegyenleteket!

2. 2. előadás - 2013.02.19

Az előző órán a Markov-folyamatok tárgyalásába kezdtünk bele.

$$p_k(t) = P(N(t) = k)$$

Ez annak a valószínűsége, hogy t időpontban k igény van a rendszerben.

Tekintsük a

$$\frac{p_k(t+h) - p_k(t)}{h}$$

differenciáhányadost. Ha h pozitív és nullához tart, akkor a következő adódik kihasználva azt, hogy a kicsiny intervallumon legalább két ugrás valószínűsége az intervallum hosszához képest elhanyagolható:

$$\begin{aligned} \frac{p_k(t+h) - p_k(t)}{h} &= \frac{1}{h} (P(N(t+h) = k) - P(N(t) = k)) = \\ &= \frac{1}{h} \left(\sum_j P(N(t+h) = k | N(t) = j) P(N(t) = j) - P(N(t) = k) \right) \end{aligned}$$

Azonban

$$\frac{P((t, t+h) - n \text{ legalább két ugrás volt} | N(t) = j)}{h} \rightarrow 0, \quad \text{ha } h \rightarrow 0, \quad \text{feltéve, hogy } \sum_l q_{jl} q_l < \infty.$$

Ezért $j = k$ esetén csak azt kell figyelembe venni, ha nincsen ugrás (hiszen, ha lenne, akkor még egyre szükség lenne, hogy az intervallum végére ismét a k állapotban legyen), $j \neq k$ esetén pedig azt, hogy pontosan egy ugrás van csak, amely éppen j -ből k -ba történik.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_k(t+h) - p_k(t)}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left([P(N(t+h) = k, \text{ nincs ugrás } (t, t+h) - n | N(t) = k) - 1] P(N(t) = k) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j, j \neq k} P(N(t+h) = k, \text{ egy ugrás volt } (t, t+h) - n | N(t) = j) P(N(t) = j) \right) \end{aligned}$$

Ugyanakkor

$$P(N(t+h) = k, \text{ nincs ugrás } (t, t+h) - n | N(t) = k) = e^{-q_k h}.$$

Az első két tagot összevonva használjuk majd a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-q_k h} - 1}{h} = -q_k$$

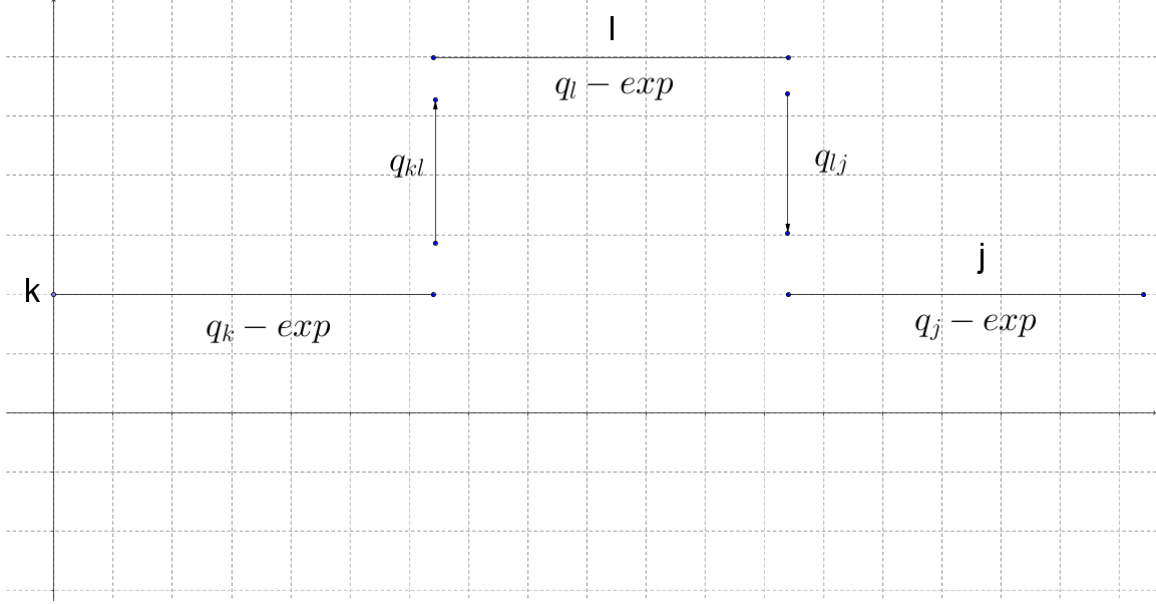
összefüggést.

$$\begin{aligned} P(N(t+h) = k, \text{ egy ugrás volt } (t, t+h) - n | N(t) = j) &= \int_0^h \underbrace{q_j e^{-q_j s}}_{(t+s) \text{ pillanatban ugrottunk}} q_{jk} \underbrace{e^{-q_k(h-s)}}_{(t+s, t+h)\text{-n nincs ugrás}} ds = \\ &= q_j q_{jk} e^{-q_k h} \int_0^h e^{s(q_k - q_j)} ds \end{aligned}$$

A fenti integrálhoz egy kis magyarázat. Az első rész, vagyis $q_j e^{-q_j s}$ a sűrűségfüggvény, hogy $t + s$ pillanatban ugrottunk. A q_{jk} annak esélye, hogy az ugrás során k -ba ugrottunk (mivel egyetlen ugrás van, tehát oda kell ugranunk). A $e^{-q_k(h-s)}$ pedig annak valószínűsége, hogy $(t + s, t + h)$ -n nincs további ugrás. Az integrál kiszámítása során két esetet választunk külön:

$$\begin{cases} q_k = q_j & h \\ q_k \neq q_j & \left[\frac{e^{s(q_k - q_j)}}{q_k - q_j} \right]_0^h = \frac{1}{q_k - q_j} (e^{h(q_k - q_j)} - 1) \end{cases}$$

Ha mindkét esetben h -val leosztunk és vesszük a $h \rightarrow 0$ határértéket, akkor a határérték mindig 1 lesz.



5. ábra. Folyamat mikroszintje

Felírhatóak a Master-egyenletek:

$$p_k(t)' = -q_k P(N(t) = k) + \sum_{j: j \neq k} q_j q_{jk} P(N(t) = j)$$

$$p_k(t)' = -q_k p_k(t) + \sum_{j: j \neq k} q_j q_{jk} p_j(t)$$

Ez utóbbit Chapman-Kolmogorov-féle differenciálegyenletnek is hívjuk.

Születési-halálozási folyamatok: A fent általánosan tekintett Markov-folyamatok speciális esete az ún. "születési-halálozási folyamatok

Ekkor két paramétercsalád adott λ_k , $k \geq 0$ és μ_k , $k \geq 1$. Ahol

- λ_k adja meg a következő beérkezésig hátralévő exponenciális eloszlású idő paraméterét, feltéve, hogy a rendszer a $k \geq 0$ állapotban van
- μ_k adja meg a következő távozásig hátralévő exponenciális eloszlású idő paraméterét, megintcsak azon feltétel mellett, hogy a rendszer a $k \geq 1$ állapotban van.

Ekkor tehát:

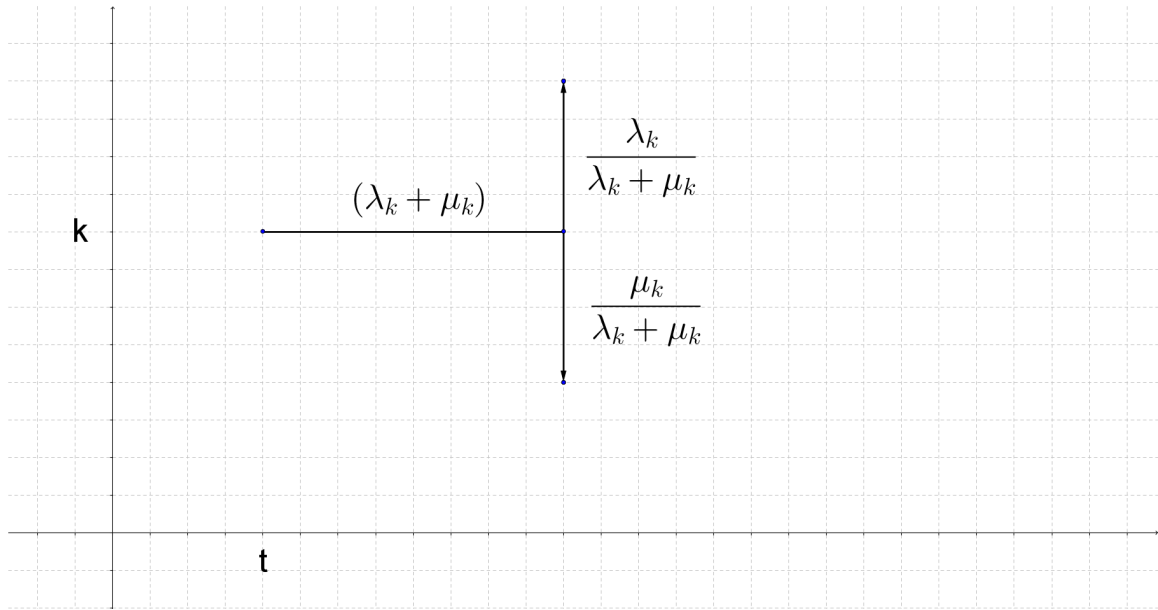
$$q_k = \begin{cases} \lambda_k + \mu_k & , \text{ ha } k \geq 1; \\ \lambda_0 & , \text{ ha } k = 0. \end{cases}$$

Továbbá, $k \geq 1$ esetén

$$q_{kj} = \begin{cases} \lambda_k/(\lambda_k + \mu_k); & \text{ ha } j = k + 1 \\ \mu_k/(\lambda_k + \mu_k) & \text{ ha } j = k - 1; \\ 0 & \text{ egyébként} \end{cases}$$

illetve $k = 0$ esetén

$$q_{0j} = \begin{cases} 1 & \text{ ha } j = 1 \\ 0 & \text{ ha } j \neq 1 \end{cases}$$



6. ábra. ?

Egyenletek: $k \geq 1$ esetén

$$\begin{aligned} p'_k(t) &= -(\lambda_k + \mu_k)p_k(t) + (\lambda_{k+1} + \mu_{k+1})\frac{\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1} + \mu_{k+1}}p_{k+1}(t) + (\lambda_{k-1} + \mu_{k-1})\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_{k-1} + \mu_{k-1}}p_{k-1}(t) = \\ &= -(\lambda_k + \mu_k)p_k(t) + \mu_{k+1}p_{k+1}(t) + \lambda_{k-1}p_{k-1}(t) \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

Ugyanakkor $k = 0$ esetén:

$$p'_0(t) = \lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \quad k = 0$$

Mátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} p'_0(t) \\ p'_1(t) \\ \vdots \\ p'_k(t) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \mu_1 & & & \\ \lambda_0 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \mu_2 & & \\ & \lambda_1 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \mu_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ \vdots \\ p_k(t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Ez homogén, lineáris differenciálegyenlet, amely az általános esetben végtelen méretű. Mátrixa tridiagonális mátrix!

$$\vec{P}'(t) = \mathbf{A}\vec{p}(t)$$

Véges-dimenziós esetben ennek megoldása $e^{At}P(0)$.

Ha azonban $\mathbf{A}$ végtelen méretű mátrix, akkor nem könnyű az e^{At} értelmezése! (Véges méretű mátrixok esetén a hatványsorral lehet. De az is eléggé bonyolult lesz.)

M/M/1 rendszer.

Tegyük fel, hogy:

- egy kiszolgálóegység van
- a beérkezési folyamat Poisson folyamat
- a kiszolgálási idő μ -paraméterű exponenciális eloszlású

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \quad k = 0$$

$$p'_k(t) = -(\lambda + \mu)p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \mu p_{k+1}(t)$$

Tegyük fel, hogy a nulladik pillanatban i igény van a rendszerben, azaz: $p_i(0) = P(N(0) = i) = 1$

Célunk a fenti differenciálegyenletrendszer megoldása:

1. lépés. Áttérünk az eloszlás helyett a generátorfüggvényre. Legyen:

$$P(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(N(t) = k) = \langle z^{N(t)} \rangle = g_{N(t)}(z) \quad t \geq 0, |z| \leq 1$$

Beszorozva a fenti egyenleteket z megfelelő hatványával és összegezve, adódik:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k p'_k(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) - (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^{\infty} z^k p_k(t) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} z^k p_{k-1}(t) + \mu \sum_{k=1}^{\infty} z^k p_{k+1}(t)$$

Az első három tagban külön tekintve a λ -t tartalmazó, illetve a μ -t tartalmazó tagokat, a negyedikben z -t, az ötödikben pedig $1/z$ -t kiemelve kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k p'_k(t) = \frac{\partial}{\partial t} P(z, t) = -\lambda P(z, t) + \lambda z P(z, t) - \mu(P(z, t) - p_0(t)) + \mu \frac{1}{z} (P(z, t) - p_0(t))$$

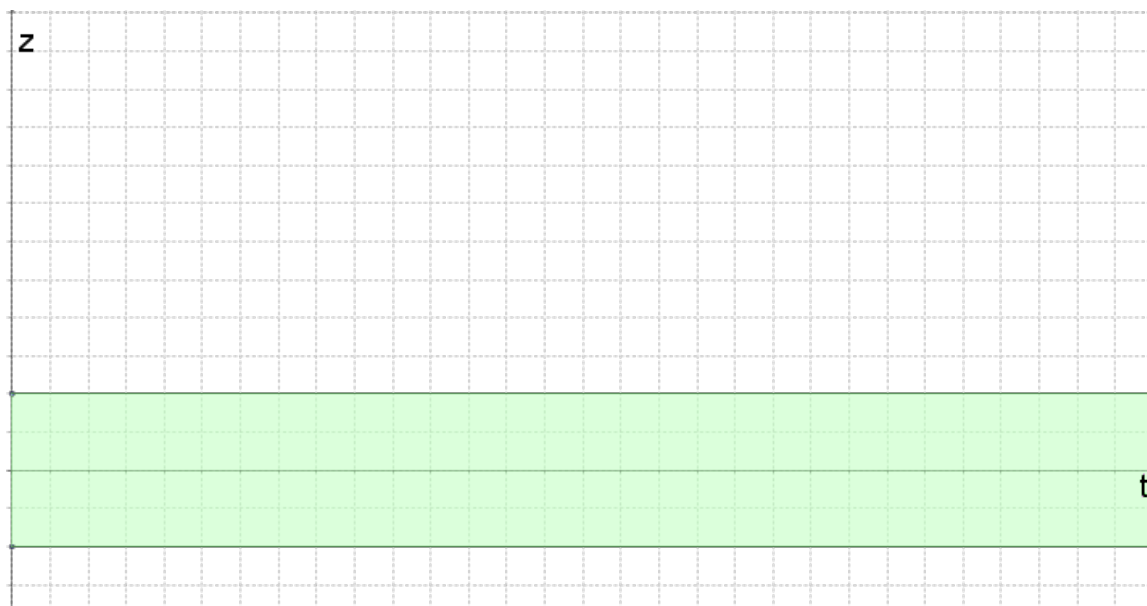
Beszorozva z -vel és rendezve:

$$z \frac{\partial}{\partial t} P(z, t) = P(z, t)(\mu - \mu z + \lambda z^2 - \lambda z) + p_0(t)(\mu z - \mu) = P(z, t)(z - 1)(\lambda z - \mu) + p_0(t)\mu(z - 1)$$

$$P(z, 0) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j p_j(0) = z^i$$

$$P(0, t) = p_0(t)$$

Lineáris parciális differenciálegyenletet kaptunk a P függvényre, amelynek értelmezési tartománya $t \geq 0, |z| \leq 1$. Azonban tartalmazza a $p_0(t)$ függvényt, amely szintén ismeretlen.



7. ábra. ?

2. lépés. Laplace-transzformált – ennek eredményeként a parciális differenciálegyenletből algebrai egyenlet lesz:

$$f(t) \rightarrow f^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad s > 0$$

A deriváltfüggvény Laplace-transzformáltja:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = [e^{-st} f(t)]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Azaz

$$f'^*(s) = s f^*(s) - f(0)$$

Legyen tehát

$$P^*(z, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} P(z, t) dt \quad s > 0, |z| \leq 1$$

A fenti parciális differenciálegyenletből a Laplace-transzformáció elvégzése után a következő algebrai egyenlet adódik:

$$z(sP^*(z, s) - P(z, 0)) = (z - 1)(\lambda z - \mu)P^*(z, s) + \mu(z - 1)p_0^*(s)$$

Ebben is szerepel egy "extra" ismeretlen függvény $p_0^*(s)$.

Átrendezve:

$$P^*(z, s) = \frac{zP(z, 0) + \mu(z - 1)p_0^*(s)}{zs - (z - 1)(\lambda z - \mu)} \quad s > 0, |z| \leq 1$$

A generátorfüggvény definíciójában megengedhetjük, hogy z komplex szám legyen. $P^*(z, s)$ véges értékű az egységgörlemezben. Ezért, ha a baloldali tört nevezője – rögzített s mellett – valamely z értékre eltűnik a körön belül, akkor ott a számláló értéke is nulla kell, legyen. Azaz így esetleg meghatározható $p_0^*(s)$ értéke.

A nevező másodfokú polinom z -ben. Ha ennek egyik gyöke az egységkörön belül van, pl. $z_1(s)$, akkor tehát teljesülni kell az

$$z_1(s)^{i+1} + \mu(z_1(s) - 1)p_0^*(s) = 0$$

összefüggésnek is, azaz

$$p_0^*(s) = \frac{z_1(s)^{i+1}}{\mu(1 - z_1(s))}$$

3. 3. előadás - 2013.02.26

M/M/1 rendszert vizsgálunk.

$$p_k(t) = P(N(t) = k)$$

$$p'_k(t) = -(\lambda + \mu)p_k(t) + \mu p_{k+1}(t) + \lambda p_{k-1}(t) \quad k \geq 1$$

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

Kezdeti érték: $t = 0$ pontban i darab igény van a rendszerben.

- $p_i(0) = 1$
- $p_j(0) = 0 \quad j \neq i$

$$P(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k(t) \quad \text{ez az eloszlás generátorfüggvénye}$$

$$P^*(z, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} P(z, t) dt \quad s > 0, |z| \leq 1$$

$$p^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} p_0(t) dt \quad z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$P^*(z, s) = \frac{zP(z, 0) - \mu(1 - z)p_0^*(s)}{zs - (1 - z)(\mu - \lambda z)}$$

$$P(z, 0) = z^i$$

Nevező:

$$-(\lambda z^2 - z(s + \mu + \lambda) + \mu)$$

zérushelyei:

$$z_{1,2} = \frac{s + \mu + \lambda \pm \sqrt{(s + \mu + \lambda)^2 - 4\lambda\mu}}{2\lambda}$$

Hajjaj: mekkora ennek abszolútértéke? Helyette: alkalmazzuk Rouché-tételét. Ha f és g analitikus függvények az egységgörön, továbbá

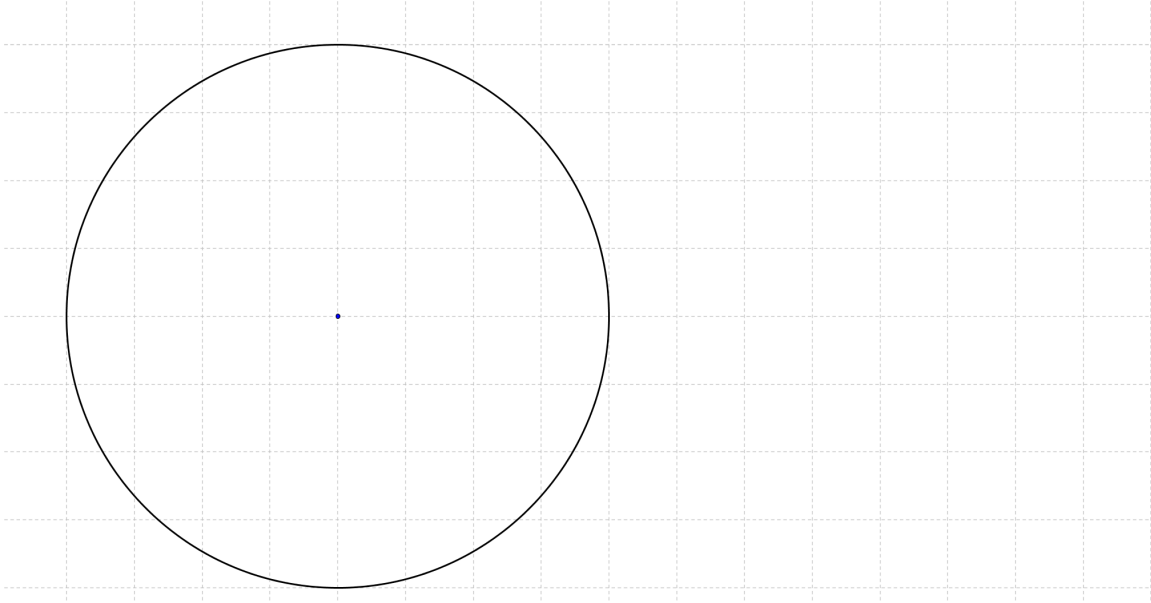
$$|f(z)| > |g(z)| \text{ a peremen } (|z| = 1)$$

akkor $f \pm g$ gyökeinek száma megegyezik f gyökeinek a számával az egységgörben.

(A bizonyítás gondolatmenete, hogy ha tekintjük az $f - \epsilon g$ függvényt, miközben ϵ értékét mozgatjuk 0-tól 1-ig. A gyökök folytonosan vándorolnak, de nem tudnak a peremen "kimenni" vagy "bejönni", mert a feltétel szerint a peremen $f - \epsilon g$ soha nem nulla $0 \leq \epsilon \leq 1$.)

Legyen most

$$f(z) = z(s + \mu + \lambda)$$



8. ábra. Kör

$$g(z) = \lambda z^2 + \mu$$

$|z| = 1$ esetén

$$|f(z)| = |z(s + \lambda + \mu)| = s + \mu + \lambda$$

$$|g(z)| = |\lambda z^2 + \mu| \leq |\lambda z^2| + |\mu| = \lambda + \mu < s + \lambda + \mu,$$

mivel $s > 0$. Tehát pontosan egy gyök van az egységszög belsejében.

Jelölje $z_2(s)$ az egységszögben levő gyököt! Ekkor tehát a korábbi gondolatmenet alapján ezen a helyen a számláló értéke is nulla kell legyen. Adódik tehát, hogy

- $z_2(s)^{i+1} - \mu(1 - z_2(s))p_0^*(s) = 0$
- $p_0^*(s) = \frac{z_2^{i+1}(s)}{\mu(1 - z_2(s))}$

Visszahelyettesítve:

$$\begin{aligned} P^*(z, s) &= \frac{z^{i+1} - \mu(1 - z) \frac{z_2^{i+1}(s)}{\mu(1 - z_2(s))}}{-\lambda(z - z_1(s))(z - z_2(s))} = \frac{z^{i+1} - z_2^{i+1}(s) + z_2^{i+1}(s) \left(1 - \frac{1-z}{1-z_2(s)}\right)}{-\lambda(z - z_1(s))(z - z_2(s))} = \\ &= \frac{z^i + z^{i-1}z_2(s) + \dots + z_2^i(s) + \frac{z_2^{i+1}(s)}{1 - z_2(s)}}{-\lambda(z - z_1(s))} \end{aligned}$$

3. lépés. Invertálás. Azaz a Laplace-transzformált ismeretében meg kell határozni a $P(z, t)$ generátorfüggvényt, majd azt hatványsorba fejtvé az együtthatók adják meg a keresett valószínűségeket. Az alábbi gondolatmenet mutatja, hogy fordított sorrendben is el lehetne járni, azaz előbb hatványsorba fejteni, azután invertálni a Laplace-transzformáltat:

$$P^*(z, s) = \int_0^\infty e^{-st} P(z, t) dt = \int_0^\infty e^{-st} \sum_{k=0}^\infty z^k p_k(t) dt = \sum_{k=0}^\infty z^k \int_0^\infty e^{-st} p_k(t) dt = \sum_{k=0}^\infty z^k p_k^*(s)$$

A $P^*(z, s)$ függvényre kapott fenti kifejezést z szerint hatványsorba lehet könnyen fejteni, azonban ahhoz, hogy tovább tudjuk lépni, szükség van annak meghatározására, hogy $z_2(s)$ minek a Laplace-transzformáltja.

Azaz az alábbi egyenletet kellene megoldani – keresendő az a $h(t)$ függvény, melyre:

$$\frac{s + \mu + \lambda - \sqrt{(s + \mu + \lambda)^2 - 4\lambda\mu}}{2\lambda} = \int_0^\infty e^{-st} h(t) dt$$

Sajnos nem adható meg az inverz transzformált véges alakban. Tehát a látszólagos siker ellenére – sikerült megadni a Laplace-transzformált értékét – magát az eloszlást nem tudjuk leírni.

Ezért a "tranzien" viselkedés helyett az aszimptotikus viselkedést tekintjük. Azaz mi van $t \rightarrow \infty$ esetén? (aszimptotikus viselkedés)

Tegyük fel, hogy

$$p_k(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} p_k \quad \text{miközben} \quad p'_k(t) \rightarrow 0$$

Ekkor a Chapman-Kolmogorov egyenletekből adódik, hogy

$$0 = -(\lambda_k + \mu_k)p_k + \mu_{k+1}p_{k+1} + \lambda_{k-1}p_{k-1} \quad k \geq 1$$

$$0 = -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 \quad k = 0$$

Átrendezve:

$$\mu_{k+1}p_{k+1} - \lambda_k p_k = \mu_k p_k - \lambda_{k-1}p_{k-1} = \mu_{k-1}p_{k-1} - \lambda_{k-2}p_{k-2} = \mu_1 p_1 - \lambda_0 p_0 = 0$$

Ezért:

$$p_{k+1} = \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} p_k = \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}} \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} p_{k-1} = \dots = p_0 \frac{\lambda_k \lambda_{k-1} \dots \lambda_0}{\mu_{k+1} \mu_k \dots \mu_1}$$

Továbbá a p_k , $k \geq 0$ értékek valószínűségeloszlást alkotnak (ha teljesül az aszimptotikus viselkedésre tett feltevésünk), ezért:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$$

Kifejezve a p_j $j \geq 1$ mennyiségeket p_0 segítségével, kapjuk, hogy

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_{j-1} \dots \lambda_0}{\mu_j \dots \mu_1} \right) p_0 = 1$$

Vezessük be az alábbi jelölést:

$$S_1 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \dots \mu_j}.$$

Állítás: Megmutatható, hogy ha $S_1 < \infty$, akkor léteznek a $\lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t)$ határértékek, és teljesül, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t) = 1. \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p'_k(t) = 0, .$$

Továbbá ekkor

$$p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_j(t) = \frac{\lambda_{j-1} \dots \lambda_0}{\mu_j \dots \mu_0} \frac{1}{S_1}$$

Alkalmazzuk ezt az állítást az M/M/1 rendszer esetén: Ekkor

- $\lambda_k = \lambda$
- $\mu_k = \mu$

Ezért

$$S_1 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\mu^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j$$

Ez akkor is csak akkor véges, ha $\lambda < \mu$. Ebben az esetben

$$S_1 = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

Adódik tehát, hogy a határeloszlás értéke

$$p_j = \frac{\lambda^j}{\mu^j} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \quad j = 0, 1, \dots$$

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Megmutatható, hogy ez a határeloszlás egyben stacionárius eloszlás is, azaz ha a kezdeti eloszlást éppen ez adja, azaz $p_k(0) = p_k$ akkor tetszőleges véges t esetén teljesül, hogy $p_k(t) = p_k$, $k \geq 0$. Másképpen fogalmazva:

$$P(N(0) = k) = p_k, k \geq 0 \rightarrow P(N(t) = k) = p_k, k \geq 0$$

Ennek megmutatásához elegendő ellenőrizni, hogy a $p_k(t) \equiv p_k$, $k \geq 0$ függvények kielégítik a korábban levezetett differenciálegyenletet:

$$p'_k(t) = -(\lambda_k + \mu_k)p_k(t) + \mu_{k+1}p_{k+1}(t) + \lambda_{k-1}p_{k-1}(t) \quad k \geq 1$$

Valóban:

$$0 = -(\lambda_k + \mu_k)p_k + \mu_{k+1}p_{k+1} + \lambda_{k-1}p_{k-1}$$

Megjegyzés: A $\lambda < \mu$ feltétel szemléletesen az alábbi módon fogalmazható meg:

- az igények átlagosan $\frac{1}{\lambda}$ időközönként jönnek (ez a λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke)
- a kiszolgálási idő átlagosan $\frac{1}{\mu}$

Ha $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\mu} \Rightarrow \lambda < \mu$: van határeloszlás. Ellenkező esetben nincsen határeloszlás, így a sor hossza végtelenhez tart és "felrobban" a rendszer.

További rendszerjellemzők meghatározása az M/M/1 rendszer esetén.

Rendszerben lévő igények átlagos száma.

Előbb egy apró kitérőt teszünk az ún. geometriai eloszlással kapcsolatos fogalmakat elevenítünk fel:

- Sikeres kísérlet valószínűsége: q
- sikertelen kísérlet valószínűsége: $1 - q$

Egymástól függetlenül ismételjük a kísérletet. Legyen X az első sikeres kísérlet száma. Ekkor

$$P(X = k) = (1 - q)^{k-1}q \quad k \geq 1$$

Tudjuk, hogy

$$\langle X \rangle = \frac{1}{q}$$

A konkrét stacionárius eloszlás nagyon hasonlít ehhez, azonban ott $p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$. (Azaz a kitevő és az index itt megegyeznek. Ez olyan geometriai eloszlás, melynek során csak az első sikeres kísérlet előtt végrehajtott sikertelen kísérletek számát tekintjük. Azaz eggyel kevesebb ennek értéke, mint a "klasszikus" geometriai eloszlásé. Ezért várható értéke is eggyel kevesebb.) **A rendszerben levő igények számának várható értéke:**

$$\langle N(t) \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} p_j j = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} - 1 = \frac{1 - \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Várakozó igények száma átlagosan:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} p_j(j-1) + p_0 \cdot 0 &= \sum_{j=1}^{\infty} p_j j - \sum_{j=1}^{\infty} p_j = \sum_{j=0}^{\infty} p_j j - (1 - p_0) = \\ &= \frac{\lambda}{\mu - \lambda} - (1 - 1 + \frac{\lambda}{\mu}) = \frac{\lambda\mu - \lambda(\mu - \lambda)}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \end{aligned}$$

Rendszerben töltött idő:

Ha egy tetszőleges igény beérkezésekor k darab igény van a rendszerben, akkor $k + 1$ darab független μ -exp összege (hiszen végig kell várnia az előtte lévő k igény kiszolgálását, és még a sajátját is), ami nem más, mint a gamma-eloszlás: $\Gamma_{k+1}(\mu) \quad k \geq 0$.

Annak valószínűsége, hogy beérkezéskor éppen k igény van a rendszerben p_k . Ezért a rendszerben töltött idő eloszlása:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k \Gamma_{k+1}(\mu)$$

Sűrűségfüggvény – kihasználva, hogy $\Gamma_{k+1}(\mu)$ sűrűségfüggvénye $\frac{\mu^{k+1}x^k}{k!}e^{-\mu x}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{\mu^{k+1}x^k}{k!} e^{-\mu x} = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \mu e^{-\mu x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} = (\mu - \lambda) e^{-x(\mu - \lambda)}$$

Azaz az eloszlás $\mu - \lambda$ -paraméterű exponenciális eloszlás.

Az átlagos rendszerben töltött idő:

$$\frac{1}{\mu - \lambda}$$

Várakozási idő: Itt most csak az átlagos várakozási időt határozzuk meg.

Ha a beérkező igény k igényt talál a rendszerben, akkor ezek kiszolgálását kell végigvárni. Mindegyik μ paraméterű exponenciális időtartam, ezért külön-külön a várható értékük $\frac{1}{\mu}$. Ez összesen tehát $\frac{k}{\mu}$ -t kell várakozni.

Súlyozva annak valószínűségével, hogy k igényt talál adódik, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k \frac{k}{\mu} = \frac{1}{\mu} \sum p_k k = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

4. 4. előadás - 2013.03.05.

Legyen

- $A(t)$: a $[0, t]$ időintervallumban beérkező igények száma
- $\gamma(t)$: az ezen igények által a rendszerben töltött teljes időtartamok összege

Képzeljük el, hogy minden egyes igény beérkezésekor egységnyi magasságú téglalapot helyezünk le, melynek alapja a beérkezés időpontjában kezdődik és az igény az igény távozásáig tart. Ekkor minden egyes időpontban megszámlálva, hogy hány téglalap "nyúlik el felette" megkapjuk, hogy akkor éppen hányan vannak a rendszerben. Mivel $\gamma(t)$ a téglalapok összterülete, ezért az átlagmagasság $\gamma(t)/t$. (Itt most elhanyagoljuk azt a tényt, hogy az egyes igények beérkezésekor megrajzolt téglalap esetleg túlnyúlik a $[0, t]$ intervallumon, mivel t -vel osztva ez elhanyagolható lesz.) Azaz ennyien vannak "átlagosan" a rendszerben. Ezt jelölje $\bar{N}$

Ugyanakkor összesen $A(t)$ igény érkezett be, tehát összesen $A(t)$ darab, egységnyi magasságú téglalapunk van. Ezek összterülete $\gamma(t)$. Tehát egy téglalap alapjának átlagos hossza $\gamma(t)/A(t)$. Azaz átlagosan egy igényt ennyit időt tölt a rendszerben. Ezt jelölje $\bar{T}$

Azonban

$$\frac{\gamma(t)}{t} = \frac{\gamma(t)}{A(t)} \frac{A(t)}{t}$$

Tartsunk t -vel a végtelenbe – feltéve, hogy léteznek a határértékek – adódik, hogy

$$\bar{N} = \bar{T}\lambda$$

Azaz a rendszerbenlévő igények átlagos száma megkapható úgy, hogy az átlagosan a rendszerben töltött időt megszorozzuk a beérkezések intenzitásával (a beérkezések időegységre eső átlagos számával). Ez a Little-formula.

Átírható úgy is, hogy megkapjuk az átlagos várakozók számát ($\bar{L}$):

$$\bar{L} = \bar{W}\lambda$$

ahol $\bar{W}$ az átlagos várakozási idő.

Az M/M/1 rendszer esetében közvetlenül ellenőrizhetjük, hogy teljesül a fenti összefüggés mind a várakozók átlagos számára, mind pedig rendszerben lévők átlagos számára.

Térjünk át egy másik M/M/∞ – rendszerre.

A beérkezési folyamat nem változott, azaz $\lambda_k = \lambda$, $k \geq 0$. Azonban a μ_k paraméterrendszer változik, hiszen az "elhalálozásnak" az felel meg, ha valaki elhagyja a rendszert. Azonban ha k igény van éppen a rendszerben, akkor mindegyik kiszolgálása μ paraméterű exponenciális ideig tart, egymástól függetlenül, és akinek legrövidebb ideig tart a kiszolgálása, az távozik el következőnek a rendszerből. Mivel – amint láttuk korábban – független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók minimuma is exponenciális eloszlású, melynek paramétere a paraméterek összege, tehát

$$\lambda_k = \lambda$$

$$\mu_k = k\mu$$

Írjuk fel a Chapman-Kolmogorov egyenleteket:

$$p'_k(t) = -(\lambda + k\mu)p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t) + \lambda p_{k-1}(t) \quad k \geq 1$$

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

Legyen a kezdeti érték ismét:

$$P(N(0) = i) = 1, \text{ azaz } p_i(0) = 1, p_k(0) = 0 \quad k \neq i$$

Próbálkozzunk meg újra a generátorfüggvénnyel, mert a fenti differenciálegyenlet-rendszer ismét végtelen sok függvényt tartalmaz, így nem tudjuk közvetlenül megoldani.

$$P(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k(t)$$

Közvetlen számolás adja, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} z^k p'_k(t) &= \frac{\partial}{\partial t} P(z, t) = \\ &= -\lambda \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k(t) - \mu \sum_{k=1}^{\infty} z^k k p_k(t) + \mu \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k p_{k+1}(t) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} z^k p_{k-1}(t) = \\ &= -\lambda P(z, t) + \lambda z P(z, t) + \mu \frac{\partial}{\partial z} P(z, t) - \mu z \frac{\partial}{\partial z} P(z, t) \end{aligned}$$

Azaz

$$\frac{\partial}{\partial t} P(z, t) = \lambda(z-1)P(z, t) + \mu(1-z) \frac{\partial}{\partial z} P(z, t).$$

Kicsit átrendezve a következőt kapjuk:

$$\lambda(z-1)P(z, t) = \frac{\partial}{\partial t} P(z, t) - \mu(1-z) \frac{\partial}{\partial z} P(z, t)$$

Ez elsőrendű lineáris parciális differenciálegyenlet. Alkalmazható a karakterisztikus görbék módszere. Azaz paraméterezett görbéket helyezünk a felületre, azokkal beborítjuk.

Jelölje a görbe paraméterét u , és legyenek a görbe koordinátái: $t(u), z(u), f(u)$. Akkor lesz valóban a felületen, ha a harmadik koordináta így írható fel:

$$f(u) = P(z(u), t(u))$$

Ekkor viszont:

$$\frac{d}{du} f(u) = \frac{\partial}{\partial z} P(z(u), t(u)) \frac{d}{du} z(u) + \frac{\partial}{\partial t} P(z(u), t(u)) \frac{d}{du} t(u)$$

Összehasonlítva ezt a megoldandó parciális differenciálegyenlettel kapjuk, hogy $z'(u) = \mu(z(u) - 1)$ valamint $t'(u) = 1$ választás mellett, kell, hogy teljesüljön az

$$f'(u) = \lambda(z(u) - 1)f(u)$$

egyenlet. (Vegyük észre, hogy abban szabad kezünk van, hogy az általunk felrajzolandó görbe t és z koordinátáit hogyan választjuk meg, csak az hozzá tartozó f koordináta lesz már kötött.)

Ezek az egyenletek megoldhatók, ha van kezdeti értékünk!

Milyen u érték mellett válasszunk kezdeni értéket? Ez rajtunk múlik. Legyen tehát $u = 0$ a kezdeti paraméterérték.

Kezdjük t -vel. Mekkora értéket vegyen fel nulla helyen? Mivel $t \geq 0$ tartományon akarjuk az egyenletet megoldani, ezért célszerű az alábbi választás: $t(0) = 0$.

Ekkor $t(u) = u$

Vezessük be az alábbi jelöléseket: $z(0) = C_2$, $f(0) = C_3$. Mivel $P(z, 0) = z^i$, tehát feltétlen $C_3 = C_2^i$.

Oldjuk meg az egyenleteket:

$$(z(u) - 1)' = \mu(z(u) - 1)$$

Ezért

$$(z(u) - 1) = (C_2 - 1)e^{\mu u}$$

$$f(u) = C_3 e^{\int_0^u \lambda(z(s)-1)ds} = C_3 e^{\lambda \int_0^u (C_2-1)e^{\mu s} ds} = C_3 e^{\lambda(C_2-1) \frac{e^{\mu u}-1}{\mu}}$$

Megvan tehát azon paraméterezett görbe tetszőleges pontjának három koordinátája, amely a $0, C_2, C_3$ pontból indult ki. Meg kellene találnunk az összefüggést a három koordináta között. Olyan összefüggést, amely nem tartalmazza a C_2, C_3 kezdeti értékeket.

$$C_2 - 1 = \frac{z(u) - 1}{e^{\mu u}} = \frac{z(u) - 1}{e^{\mu t(u)}}$$

Így

$$C_3 = \left(\frac{z(u) - 1}{e^{\mu t(u)}} + 1 \right)^i$$

$$f(u) = ((z(u) - 1)e^{-\mu t(u)} + 1)^i \cdot e^{\frac{\lambda}{\mu}(z(u)-1)e^{-\mu t(u)}(e^{\mu t(u)}-1)}$$

Továbbá:

$$t(u) = u$$

Ezért tehát:

$$P(z, t) = ((z - 1)e^{-\mu t} + 1)^i \cdot e^{\frac{\lambda}{\mu}(z-1)(1-e^{-\mu t})} = (ze^{-\mu t} + 1 - e^{-\mu t})^i \cdot e^{\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})(z-1)}$$

. Másrészt viszont

$$P(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(N(t) = k)$$

Látjuk tehát, hogy az eloszlás generátorfüggvénye szorzatra bomlik. Ez valamilyen valószínűségi változók függetlenségére utal. Próbáljuk meg megkeresni őket. Ehhez értelmeznünk kell a képletben lévő mennyiségeket.

Kezdetben – feltételezünk szerint – i igény volt a rendszerben. Kiszolgálásuk azonnal megkezdődött. Vezessünk be valószínűségi változókat. Legyen $\nu_j(t) = 0$, ha a kezdetben a rendszerben lévő j . igény a t pillanatban már nincsen a rendszerben, azaz a kiszolgálása befejeződött. Egyébként legyen az értéke 1, azaz ha a t pillanatban tart még a kiszolgálása, azaz még a rendszerben van.

Ekkor

$$P(\nu_j(t) = 0) = 1 - e^{-\mu t} \quad - \text{annak a valószínűsége, hogy az igény } t\text{-ben már nincs a rendszerben}$$

$P(\nu_j(t) = 1) = e^{-\mu t}$ – annak a valószínűsége, hogy az igény t -ben még a rendszerben van

Tehát $\nu_j(t)$ generátorfüggvénye éppen $1 - e^{-\mu t} + ze^{-\mu t}$. Kezdetben i igény volt feltevésünk szerint a rendszerben. Tehát az első tényező éppen annak az eloszlásnak a generátorfüggvénye, hogy közülük hányan maradnak még a t pillanatban a rendszerben.

A második tényező értelmezése:

$$\text{Legyen } d = \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})$$

$$e^{d(z-1)} = e^{dz-d} = e^{-d}e^{dz} = e^{-d} \sum \frac{(dz)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \frac{d^j}{j!} e^{-d} \quad (\text{Poisson-eloszlás})$$

Jelölje tehát $\eta(t)$ a 0 pillanat után érkezett (azaz kezdetben még nem a rendszerben lévő) igények közül azok számát, akik még a t pillanatban is a rendszerben vannak. Ekkor nyilvánvalóan:

$$N(t) = \nu_1(t) + \nu_2(t) + \dots + \nu_i(t) + \eta(t)$$

Az M/M/ ∞ rendszer tranziens viselkedése tehát két részből tevődik össze:

$$B(i, e^{-\mu t}) * \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t}) - \text{Poisson}$$

(Az első tényező binomiális eloszlás, a második Poisson-eloszlás.)

$t \rightarrow \infty$ -re az első tényező hatása eltűnik, mert az elsők elmennek. A Poisson-eloszlás paramétere tart a $\frac{\lambda}{\mu}$ értékhez. Tehát a határeloszlás, amely egyben a stacionárius eloszlás is, ilyen paraméterű Poisson-eloszlás lesz.

Ezt másképpen is megkaphatjuk. Oldjuk meg a stacionárius eloszlást karakterizáló egyenletrendszert. Ennek alapján:

$$p_k = p_0 \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \dots \mu_k} = p_0 \frac{\lambda^k}{\mu^k k!}$$

$$\sum_k p_k = 1; \quad p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} = 1$$

$$\Rightarrow p_0 = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}; \quad p_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

tehát Poisson-eloszlás, melynek paramétere λ/μ . Ez adódott a tranziens viselkedés elemzéséből is.

Ellenőrizzük a Little-formula első alakját:

- A rendszerben levő igények száma: $\frac{\lambda}{\mu}$ (a Poisson-eloszlás várható értéke megegyezik a paraméterével)
- A rendszerben töltött átlagos idő: $\frac{1}{\mu}$ (mivel mindig van szabad kiszolgálóegység, tehát csak a saját $-\mu$ -paraméterű exponenciális ideig tartó kiszolgálását tölti a rendszerben)

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{\mu} \lambda \rightarrow \text{azaz teljesül a Little-Formula}$$

A Little-formula második alakja:

Fölösleges felírni, mert a váróteremben töltött idő, és a várakozási idő is nulla!

Eddig elsődleges mennyiségnek az adott időpontban a rendszerben lévő igények számát tekintettük. Fontos információt szolgáltat azonban a tömegkiszolgálási rendszerekhez az is, ha tudjuk, hogy milyen eséllyel lesz előbb-utóbb nulla igény a rendszerben.

Jelölje f_i annak valószínűségét, hogy feltéve, hogy pillanatnyilag i igény van a rendszerben ($i \geq 1$), a rendszer valamikor később kiürül. Az első változás (távozás vagy beérkezés) szerint alkalmazva teljes valószínűség tételét kapjuk, hogy

$$f_i = f_{i+1} \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} + f_{i-1} \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \quad i \geq 2$$

mivel $\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}$ valószínűséggel az első változás beérkezést jelent, azaz eggyel nő a rendszerben lévő igények száma, és $\frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$ valószínűséggel csökken.

Hasonlóan:

$$f_1 = f_2 \frac{\lambda_1}{\mu_1 + \lambda_1} + \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}$$

Itt a második tag mellett lévő együttható 1, hiszen ha éppen csak egyetlen igény van a rendszerben, akkor távozáskor kiürül a rendszer, azaz bekövetkezik a vizsgált esemény.

Legyen $f_0 = 1$. (Fontos, hogy ez **nem** annak valószínűségét jelöli, hogy ha most nincsen igény a rendszerben, akkor majd valamikor később megint lesz olyan időpont, hogy ismét nincsen igény a rendszerben. Csak az egyenletek egyöntetűbb kezelése miatt vezetjük be ezt a jelölést.)

Átrendezve

$$(\lambda_i + \mu_i)f_i = \lambda_i f_{i+1} + \mu_i f_{i-1} \quad i \geq 1$$

$$\mu_i(f_i - f_{i-1}) = \lambda_i(f_{i+1} - f_i)$$

Iterálva

$$f_{i+1} - f_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i}(f_i - f_{i-1}) = \frac{\mu_i}{\lambda_1} \frac{\mu_i}{\lambda_{i-1}}(f_{i-1} - f_{i-2}) \dots = \frac{\mu_i \mu_{i-1} \dots \mu_1}{\lambda_i \lambda_{i-1} \dots \lambda_1}(f_1 - f_0)$$

Adjuk össze:

$$(f_{i+1} - f_i) + (f_i - f_{i-1}) \dots + (f_1 - f_0)$$

$$f_{i+1} - f_0 = \left(\sum_{j=0}^i \frac{\mu_j \dots \mu_2 \mu_1}{\lambda_j \dots \lambda_2 \lambda_1} \right) (f_1 - f_0)$$

Tartsunk i -vel a végtelenbe. A szumma határértéke éppen – jelölje ezt S_2

$$S_2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu_j \dots \mu_2 \mu_1}{\lambda_j \dots \lambda_2 \lambda_1}$$

Ha $S_2 = \infty$, akkor $f_1 = 1 \Rightarrow f_j = 1 \forall j$, hiszen $-1 \leq f_{i+1} - f_0 \leq 0$, de $f_1 - f_0 \neq 0$ esetén $f_{i+1} - f_0$ nem maradna korlátos. Tehát ekkor bármilyen sokan vannak pillanatnyilag a rendszerben, 1 valószínűséggel előbb-utóbb kiürül a rendszer.

Emlékezzünk vissza:

$$S_1 = \sum_j \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_j}$$

Ha $S_1 < \infty$, akkor létezik stacionárius eloszlás!

5. 5. előadás - 2013.03.12.

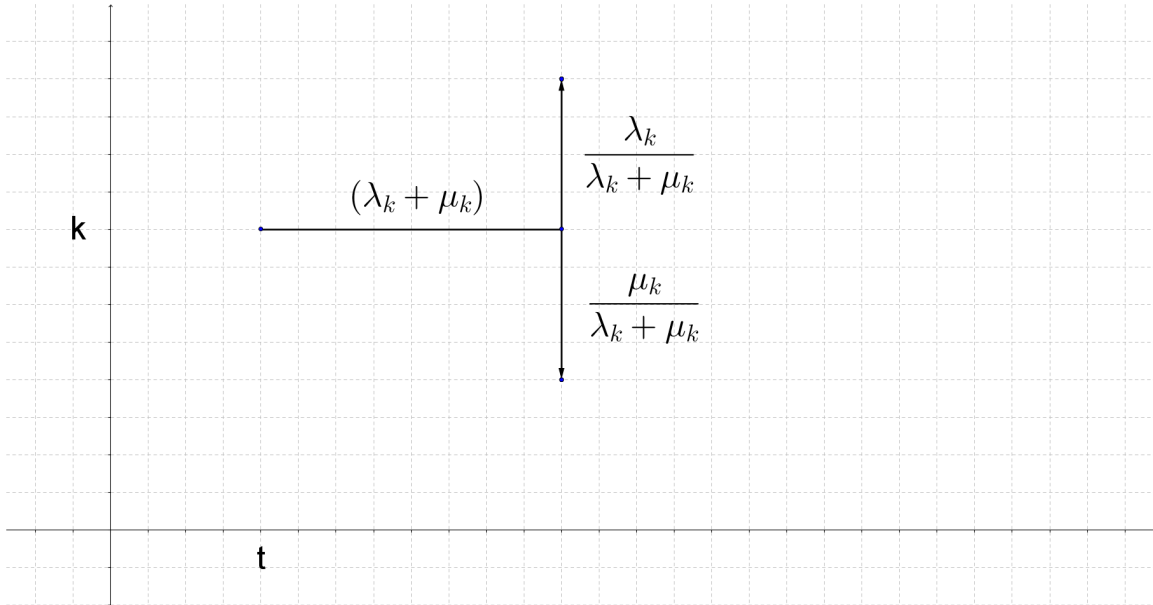
A legutóbb azt kaptuk, hogy bizonyos feltétel mellett a rendszer 1 valószínűséggel kiürül. Szeretnénk ezen állítás megfordítását megvizsgálni. Azaz születési-halálozási folyamatot vizsgálunk. Nézzük meg kicsit részletesebben annak valószínűségét, hogy kiürül a rendszer.

- születési paraméterek: $\lambda_0, \lambda_1 \dots$
- halálozási paraméterek: $\mu_1, \mu_2 \dots$

Tegyük fel, hogy mind különböznek nullától.

Vezessük be a következő jelöléseket: $f_i^{(n)} = P(\text{előbb ér nullába, mint } n\text{-be} \mid i\text{-ből indul el})$ feltéve, hogy $n > i$. Ekkor $f_i^{(n)} \leq f_i^{(n+1)}$ (mivel $\{\text{előbb ér nullába, mint } n\text{-be}\} \subset \{\text{előbb ér nullába, mint } (n+1)\text{-be}\}$, mivel, ha a nulla elérése előtt elérte az $n + 1$ állapotot, akkor az n -et is el kellett érnie, ugyanis nem ugorhatja át, ezért az események monoton nőnek)

Ugyanakkor az n -nel a végtelenbe tartva a fenti kifejezés az f_i -hez tart!



9. ábra. ?

Ismét a teljes valószínűség tételét alkalmazva az első változás szerint, és használva az $f_0^{(n)} = 1$ illetve $f_n^{(n)} = 0$ jelöléseket:

$$f_i^{(n)} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} f_{i+1}^{(n)} + \frac{\mu_i}{\mu_i + \lambda_i} f_{i-1}^{(n)} \quad 1 \leq i \leq n-1$$

A nevezővel átszorozva a következő egyenletet kapjuk:

$$(\lambda_i + \mu_i) f_i^{(n)} = \lambda_i f_{i+1}^{(n)} + \mu_i f_{i-1}^{(n)}$$

$$\mu_i (f_i^{(n)} - f_{i-1}^{(n)}) = \lambda_i (f_{i+1}^{(n)} - f_i^{(n)})$$

$$f_{i+1}^{(n)} - f_i^{(n)} = \frac{\mu_i}{\lambda_i} (f_i^{(n)} - f_{i-1}^{(n)}) = \frac{\mu_i}{\lambda_i} \frac{\mu_{i-1}}{\lambda_{i-1}} (f_{i-1}^{(n)} - f_{i-2}^{(n)}) = \frac{\mu_i}{\lambda_i} \frac{\mu_{i-1}}{\lambda_{i-1}} \dots \frac{\mu_1}{\lambda_1} (f_1^{(n)} - f_0^{(n)})$$

$$\underbrace{f_n^{(n)} - f_{n-1}^{(n)} + f_{n-1}^{(n)} - f_{n-2}^{(n)} + \dots + f_1^{(n)} - f_0^{(n)}}_{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mu_i}{\lambda_i} \dots \frac{\mu_1}{\lambda_1} (f_1^{(n)} - 1)$$

Ezért

$$f_1^{(n)} - 1 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} \prod_{j=1}^i \frac{\mu_j}{\lambda_j}}$$

Másképpen

$$f_1^{(n)} = 1 - \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} \prod_{j=1}^i \frac{\mu_j}{\lambda_j}}$$

Tekintsük az $n \rightarrow \infty$ határátmenetet:

$$f_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_1^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^i \frac{\mu_j}{\lambda_j} = \infty \\ 1 - \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^i \frac{\mu_j}{\lambda_j}} & \text{ha } \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^i \frac{\mu_j}{\lambda_j} < \infty \end{cases}$$

Másfelől tudjuk, hogy

$$f_{i+1} - f_0 = \prod_{j=1}^{i-1} \frac{\mu_j}{\lambda_j} (f_1 - f_0)$$

Ezért

- ha $\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{\mu_j}{\lambda_j} = \infty$, akkor $f_i = 1$ bármely i mellett, azaz 1 valószínűséggel előbb-utóbb kiürül a rendszer
- ha $\sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{\mu_j}{\lambda_j} < \infty$, akkor $f_1 < 1$ és így minden i esetén is $f_i < 1$, hiszen csak az 1 állapoton keresztül ürülhet ki a rendszer. Azaz, ha valamely kezdeti állapotból 1 valószínűséggel kiürülne a rendszer, akkor az 1 kezdeti állapotból is. Azaz bármely kezdeti, pozitív igényszám esetén, pozitív valószínűséggel nem ürül ki a rendszer soha.

Megjegyzés:

–M/M/1

$$\mu > \lambda : \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i = \infty \rightarrow \text{előbb-utóbb, 1 valószínűséggel kiürül a rendszer}$$

–M/M/ ∞

- $\lambda_j = \lambda$
- $\mu_j = j \cdot \mu$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mu^i i!}{\lambda^i} = \infty \rightarrow \text{előbb-utóbb kiürül a rendszer}$$

Térjünk át egy "köztes" rendszerre: véges sok kiszolgáló egység.
 $-\mathbf{M}/\mathbf{M}/\mathbf{m}$

Mivel a tranziens viselkedés elemzése már $m = 1$ esetén nem járt teljes sikerrel, ezért az általánosabb esetben is csak a stacionárius viselkedést vizsgáljuk.

$$\lambda_j = \lambda$$

$$\mu_j = \begin{cases} j \cdot \mu, & \text{ha } j \leq m; \\ m \cdot \mu, & \text{ha } j > m. \end{cases}$$

Stacionárius eloszlás:

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1} \dots \lambda_0}{\mu_k \dots \mu_1} p_0 = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} p_0 & \text{ha } k \leq m \\ \frac{\lambda^k}{m! \mu^m m^{k-m} \mu^{k-m}} p_0 & \text{ha } k > m \end{cases}$$

Stacionaritás feltétele: legyen pozitív megoldása az alábbi egyenletnek

$$p_0 \left(\sum_{k=0}^m \frac{\lambda^k}{\mu^k k!} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{m! m^{k-m} \mu^k} \right) = 1$$

A második tényező első tagja véges sok összeadandót tartalmaz, így véges, a második tag geometriai sor, amely véges, ha $\lambda < m\mu$. Ez tehát a stacionaritás feltétele. Ekkor:

$$p_0 = \frac{1}{\left(\sum_{k=0}^m \frac{\lambda^k}{\mu^k k!} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{m! m^{k-m} \mu^k} \right)}$$

Ennél nagyon szebb alakban ezt nem lehet felírni, ezért a későbbiek során többnyire a p_0 segítségével fejezzük ki a többi mennyiséget.

Várakozók átlagos száma:

Csak akkor kell várakozni, ha több, mint m igény van a rendszerben.

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^{\infty} (k-m)p_k &= \sum_{k=m+1}^{\infty} (k-m)p_0 \frac{\lambda^k}{\mu^k m! m^{k-m} \mu^k} = p_0 \frac{1}{m!} \frac{\lambda^m}{\mu^m} \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu m} \right)^{k-m} (k-m) = \\ &= p_0 \frac{\lambda^m}{\mu^m} \frac{1}{m!} \frac{\frac{\lambda}{m\mu}}{\left(1 - \frac{\lambda}{m\mu}\right)^2} = p_0 \frac{\lambda^m}{\mu^m m!} \frac{m\mu\lambda}{(m\mu - \lambda)^2} \end{aligned}$$

Átlagos várakozási idő: – ha a beérkező igény k igényt talál a rendszerben – ennek valószínűsége p_k

– akkor:

- 0, ha $k < m$
- $\frac{k-m+1}{m\mu}$, ha $k \geq m$

(Hiszen – bár mindegyik igény kiszolgálási ideje μ -paraméterű exponenciális eloszlású, de – (a második esetben) egyszerre működik mind az m kiszolgáló egység, tehát a következő távozásig $m\mu$ paraméterű exponenciális eloszlású idő telik el.)

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{\infty} p_k \frac{k-m+1}{m\mu} &= p_0 \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\mu^k m! m^{k-m}} \frac{k-m+1}{m\mu} = p_0 \frac{\lambda^{m-1}}{\mu^m m!} \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu m}\right)^{k-m+1} (k-m+1) = \\ &= p_0 \frac{\lambda^{m-1}}{\mu^m m!} \frac{\frac{\lambda}{\mu m}}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu m}\right)^2}\end{aligned}$$

(A várakozók átlagos száma ennek éppen λ -szorosa. (Little-formula.)

Rendszerben töltött idő:

várakozási idő + kiszolgálási idő

Rendszerben lévők átlagos száma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \text{várakozók átlagos száma} + \text{a kiszolgálás alatt levők átlagos száma}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=m+1}^{\infty} (k-m) p_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} m p_k + \sum_{k=0}^m k p_k$$

Kiszolgálás alatt levők átlagos száma:

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^{\infty} m p_k + \sum_{k=0}^m k p_k &= \sum_{k=m+1}^{\infty} m \frac{\lambda^k}{\mu^k m! m^{k-m}} p_0 + \sum_{k=0}^m k \frac{\lambda^k}{\mu^k k!} p_0 = \\ &= p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \sum_{k=1}^m \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)! \mu^{k-1}} + \frac{\lambda}{\mu} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{m! m^{k-m-1} \mu^{k-1}} \right) = \frac{\lambda}{\mu} p_0 \left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{\lambda^j}{\mu^j j!} + \sum_{j=m}^{\infty} \frac{\lambda^j}{m! \mu^j m^{j-m}} \right) = \frac{\lambda}{\mu}\end{aligned}$$

Azaz nem függ attól, hogy hány kiszolgálóegység van.

6. 6. előadás - 2013.03.19.

Az előző órán tárgyaltak alapján összehasonlíthatjuk az M/M/1 és az M/M/2 rendszereket – mintegy választ keresve arra a kérdésre, hogy ha javítani akarjuk az M/M/1 rendszer hatékonyságát, akkor vajon célszerűbb-e kétszer olyan gyors kiszolgálóegységet alkalmazni, vagy inkább megduplázzuk a kiszolgáló egységek számát. Azaz a $\lambda, 2\mu$ paraméterekhez tartozó M/M/1 rendszert akarjuk összehasonlítani a λ, μ paraméterekhez tartozó M/M/2 rendszerrel.

$m = 2$ esetén közvetlen számolással egyszerű explicit formula adódik p_0 értékére. Behelyettesítve ezt a fenti képletekbe adódnak az alábbi kifejezések.

	$\lambda, 2\mu$	viszony	λ, μ
p_0	$\frac{2\mu-\lambda}{2\mu}$	$>$	$\frac{2\mu-\lambda}{2\mu+\lambda}$
Várakozók száma	$\frac{\lambda^2}{2\mu(2\mu-\lambda)}$	$>$	$\frac{\lambda^3}{\mu(2\mu+\lambda)(2\mu-\lambda)}$
Igények száma	$\frac{\lambda^2}{2\mu(2\mu-\lambda)} + \frac{\lambda}{2\mu}$	$<$	$\frac{\lambda^3}{\mu(2\mu+\lambda)(2\mu-\lambda)} + \frac{\lambda}{\mu}$

Megjegyzés: történeti érdekesség szempontjából megemlítünk két klasszikus problémát. Mindkettő régi típusú telefonközpontok működésével volt kapcsolatos.

Erlang-féle C-formula:

Mi a valószínűsége annak, hogy beérkező igény teljesen foglalt rendszer talál (azaz nincsen üres kiszolgáló egység, várakoznia kell)?

$$\sum_{k=m}^{\infty} p_k = p_0 \frac{\lambda^m}{\mu^m m!} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\lambda^{k-m}}{\mu^{k-m} m^{k-m}} = p_0 \frac{\lambda^m}{\mu^m m!} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{m\mu}}$$

Erlang-féle veszteségformula: kicsit átalakítjuk a rendszert. Ha tele van, azaz mind az m kiszolgáló egység foglalt, akkor nem jöhet igény a rendszerbe. (Váróterem mérete nulla.) Az átalakítás miatt $'$ -vel jelöljük az egyes mennyiségeket.

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda, & \text{ha } k < m; \\ 0, & \text{ha } k \geq m. \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu, & \text{ha } k < m; \\ m\mu, & \text{ha } k \geq m. \end{cases}$$

Megjegyzendő, hogy a rendszerben lévő igények száma nem lehet nagyobb, mint m .

$$p'_k = p'_0 \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \dots \mu_k} \quad 1 \leq k \leq m$$

$$p'_k = p'_0 \frac{\lambda^k}{\mu^k k!}; \quad \sum_{k=0}^m p'_k = 1$$

$$p'_0 \sum_{k=0}^m \frac{\lambda^k}{\mu^k k!} = 1; \quad p'_m = p'_0 \frac{\lambda^m}{\mu^m m!}$$

Tekintsünk most egy olyan rendszert, amelyben a beérkezési folyamatot befolyásolja az, hogy éppen hányan vannak a rendszerben.

Elbátortaltott vásárlók esete:

- egy kiszolgálóegység van: a kiszolgálási idő μ -exp. Ez nem függ a rendszerben lévő igények számától. ($\mu_k = \mu$)
- beérkezési folyamat: ha éppen k igény van a rendszerben, akkor $\lambda_k = \frac{\alpha}{k+1}$ paraméterű exponenciális eloszlás értéke múlva lesz a következő beérkezés. (Megjegyzendő, hogy ha közben megváltozik a rendszer állapota, azaz befejeződik egy kiszolgálás, akkor a következő beérkezésig hátralévő idő már nem λ_k , hanem λ_{k-1} paraméterű exponenciális eloszlás lesz, stb.) ($\alpha, \mu > 0$)

Alkalmazva a stacionáris eloszlás meghatározására vonatkozó általános képletet:

$$p_k = p_0 \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_0 \dots \mu_k} = p_0 \frac{\alpha^k}{\mu^k k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \rightarrow p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha/\mu)^k}{k!} = p_0 e^{(\alpha/\mu)} \rightarrow p_0 = e^{-\alpha/\mu}$$

$$p_k = \frac{(\alpha/\mu)^k}{k!} e^{-\alpha/\mu} \quad k \geq 0$$

Ez egy α/μ -paraméterű Poisson-eloszlás! Ez a rendszer sosem robban fel. Azaz bármely α, μ paraméterérték mellett van stacionárius eloszlás.

A rendszerben tartózkodó igények átlagos száma:

$$\frac{\alpha}{\mu}$$

A Poisson-eloszlás várható értéke.

Átlagos rendszerben töltött idő:

–ha a beérkező igény k igényt talál:

$$\frac{k}{\mu} + \frac{1}{\mu}$$

(azaz k darab kiszolgálást kell végigvárnia, majd a sajátját) – tekintve tehát a súlyozott összeget:

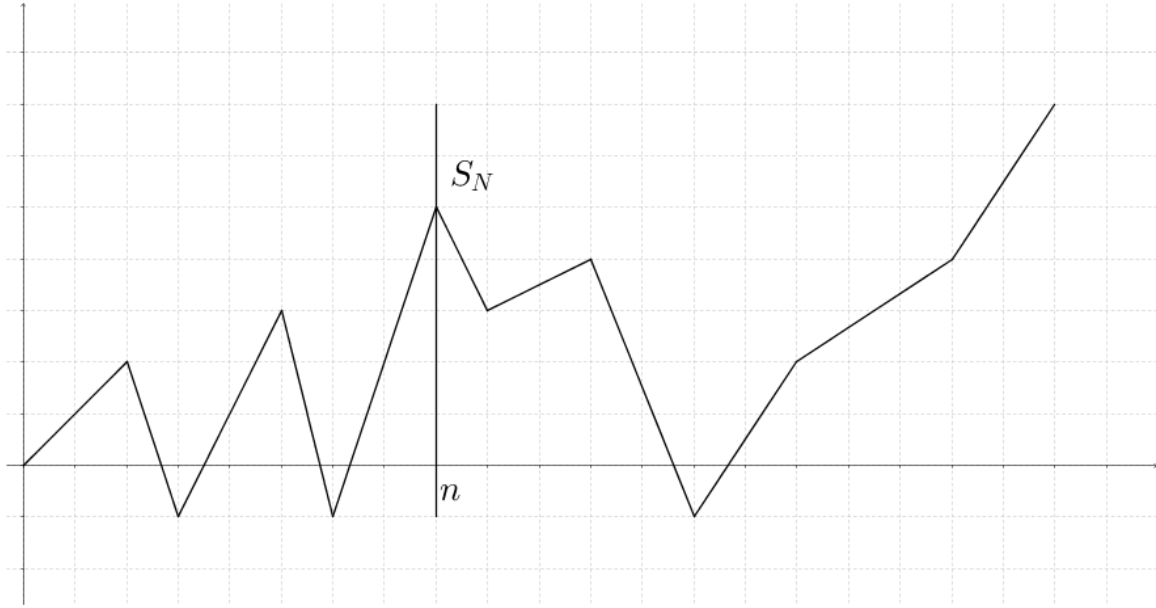
$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k \frac{k+1}{\mu} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \frac{k}{\mu} + \sum_{k=0}^{\infty} p_k \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} \frac{\alpha}{\mu} + \frac{1}{\mu} = \frac{\alpha}{\mu^2} + \frac{1}{\mu}$$

Beérkezési folyamat intenzitása:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} p_k \lambda_k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha/\mu)^k}{k!} e^{-\alpha/\mu} \frac{\alpha}{k+1} = e^{-\alpha/\mu} \mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha/\mu)^{k+1}}{(k+1)!} = \\ &= e^{-\alpha/\mu} \mu (e^{\alpha/\mu} - 1) = \mu(1 - e^{-\alpha/\mu}) \end{aligned}$$

Itt "sérül" a Little-formula! Ugyanis

$$\frac{\alpha}{\mu} \neq \left(\frac{\alpha}{\mu^2} + \frac{1}{\mu} \right) \times \mu(1 - e^{-\alpha/\mu})$$



10. ábra. Szimmetrikus bolyongás

Gyanús. Egyetlen remény: a beérkező igény nem "fix" időpontban tekint a rendszerre, hanem véletlen időpontban. Lehetséges tehát, hogy ő nem a stacionárius eloszlást látja. Azaz az átlagos várakozási idő kiszámítása során más súlyokat kell venni.

Ilyen jelenség máshol is előfordul. Pl. szimmetrikus bolyongás.

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók.

$$S_n = \sum_{j=1}^n X_j \quad P(X_j = 1) = P(X_j = -1) = \frac{1}{2}$$

Ekkor

$$\langle S_n \rangle = 0$$

bármely n esetén. Ugyanakkor legyen $\tau = \inf \{n \mid S_n = 1\}$. Ekkor megmutatható, hogy $P(\tau < \infty) = 1$. Azonban $\langle S_\tau \rangle = 1$ – ellentétben azzal, hogy minden fix időpontban az átlag értéke nulla.

Térjünk vissza a tömegkiszolgálási rendszerhez. Mi a valószínűsége annak, hogy egy beérkező k igényt talál?

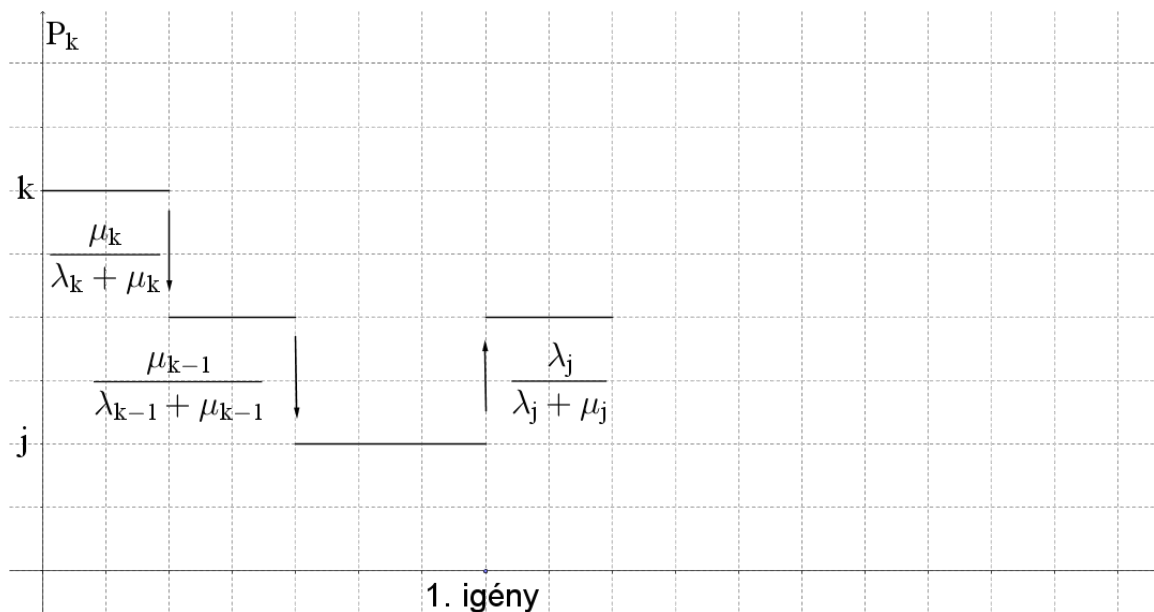
Tegyük fel, hogy a nulla időpontban a stacionárius eloszlásnak megfelelő számú igény van a rendszerben. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

- Nulla időpont utáni első igény: $\Pi_j^{(1)} = P(\text{1. igény pontosan } j \text{ igényt talál beérkezésekor})$
- nulla időpont utáni második igény: $\Pi_j^{(2)} = P(\text{2. igény pontosan } j \text{ igényt talál beérkezésekor})$
- nulla időpont utáni n -edik igény: $\Pi_j^{(n)} = P(\text{n. igény pontosan } j \text{ igényt talál beérkezésekor})$

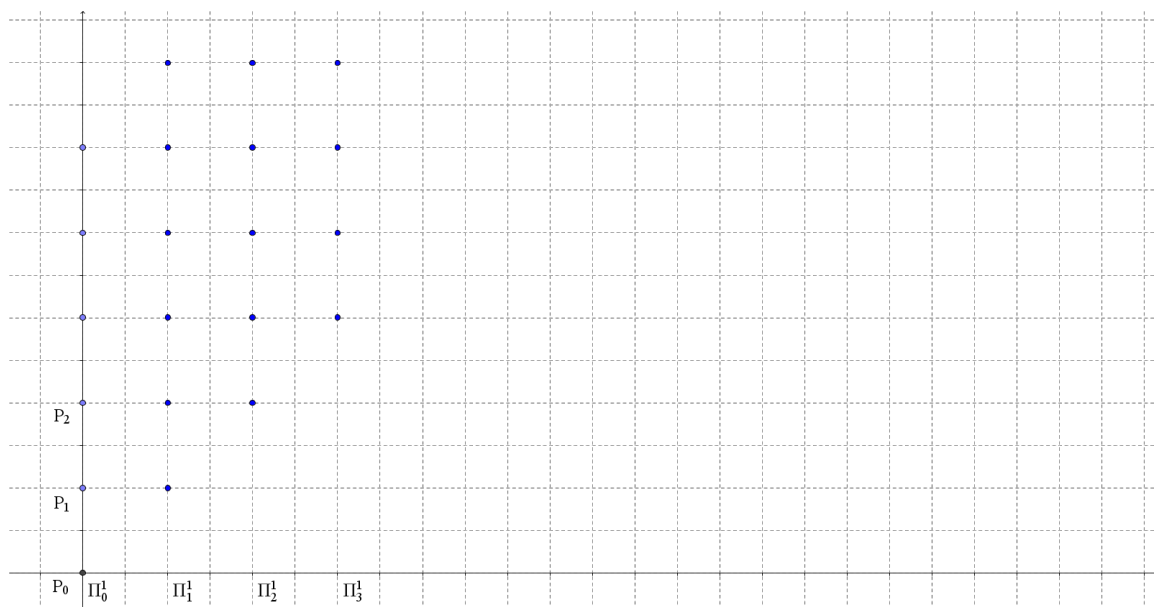
Ezen valószínűségek meghatározásához alkalmazzuk ismét a teljes valószínűség tételét, azaz tekintsünk feltételes valószínűségeket aszerint, hogy korábban hány igény volt a rendszerben.

Feltéve, hogy a nulla pillanatban k igényünk volt, mi annak a valószínűsége, hogy az elsőnek beérkező igény j igényt talál? (Az "elsőnek beérkezőt" úgy értjük, hogy a nulla időpont után elsőnek beérkező.)

Ha $k < j$, akkor az elsőnek beérkező nem találhat pontosan j igényt a rendszerben, hiszen közben csak távozás fordulhat elő. Ha $k > j$, akkor az elsőnek beérkező pontosan akkor talál éppen j igényt a rendszerben, ha a beérkezéséig $k - j$ igény eltávozik. Másféleképpen, az első "változáskor" csökken a rendszerben lévő igények száma (eltávozik valaki, mielőtt beérkezne az új igény) – ennek valószínűsége $\frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}$ –, stb. amíg le nem csökken a rendszerben lévő igények száma j -re. Ekkor érkezik be az első igény, azaz most a beérkezés megelőzi az aktuális kiszolgálás befejeződését – ennek valószínűsége $\frac{\lambda_j}{\lambda_j + \mu_j}$.



11. ábra. ?



12. ábra. ?

Azaz – alkalmazva a teljes valószínűség tételét – :

$$\Pi_j^{(1)} = \sum_{k=j}^{\infty} p_k \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} \frac{\mu_{k-1}}{\lambda_{k-1} + \mu_{k-1}} \cdots \frac{\mu_{j+1}}{\lambda_{j+1} + \mu_{j+1}} \frac{\lambda_j}{\lambda_j + \mu_j}$$

Átosztva az utolsó tényezővel:

$$\frac{\lambda_j + \mu_j}{\lambda_j} \Pi_j^{(1)} = \sum_{k=j}^{\infty} p_k \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} \cdots \frac{\mu_{j+1}}{\lambda_{j+1} + \mu_{j+1}} = p_j + \sum_{k=j+1}^{\infty} p_k \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} \cdots \frac{\mu_{j+1}}{\lambda_{j+1} + \mu_{j+1}}$$

A második összeadandót vessük össze $\Pi_{j+1}^{(1)}$ értékével:

$$\Pi_{j+1}^{(1)} = \sum_{k=j+1}^{\infty} p_k \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} \cdots \frac{\mu_{j+2}}{\lambda_{j+2} + \mu_{j+2}} \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_{j+1} + \mu_{j+1}}$$

Csak az utolsó tényező számlálójában van eltérés. Ezért tehát

$$\frac{\mu_j + \lambda_j}{\lambda_j} \Pi_j^{(1)} = p_j + \frac{\mu_{j+1}}{\lambda_{j+1}} \Pi_{j+1}^{(1)}$$

Reménytelennek látszik expliciten megoldani. Ezért iteráljunk. A 2-nak érkező igényt nézzük. Figyelembe kell venni azonban, hogy akkor kell k -ról "fogyasztani, ha az elsőnek érkező igény $k-1$ igényt talált, mert akkor vele együtt lesz k .

$$\Pi_j^{(2)} = \sum \Pi_{k-1}^{(1)} \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} \cdots \frac{\mu_{j+1}}{\lambda_{j+1} + \mu_{j+1}} \frac{\lambda_j}{\lambda_j + \mu_j}$$

Mik az összegzés határai? Ha $j \geq 1$, akkor az előző beérkezőnek legalább $j-1$ igényt kellett találnia, azaz $k-1 \geq j-1$. $j=0$ esetén azonban $j-1 = -1$. Ennyi igényt nem találhat a beérkező. Tehát $j=0$ esetén $k=1, 2, 3, \dots$ a figyelembe veendő értékek.

$$\Pi_j^{(2)} = \sum_{k=j}^{\infty} \Pi_{k-1}^{(1)} \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} \cdots \frac{\mu_{j+1}}{\lambda_{j+1} + \mu_{j+1}} \frac{\lambda_j}{\lambda_j + \mu_j}; \text{ ha } j \geq 1$$

$$\Pi_0^{(2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_{k-1}^{(1)} \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} \cdots \frac{\mu_{j+1}}{\lambda_{j+1} + \mu_{j+1}} \frac{\lambda_j}{\lambda_j + \mu_j}$$

Hasonlóan átalakítva, mint korábban:

$$\frac{\lambda_j + \mu_j}{\lambda_j} \Pi_j^{(2)} = \Pi_{j-1}^{(1)} + \frac{\mu_{j+1}}{\lambda_{j+1}} \Pi_{j+1}^{(2)}; \text{ ha } j \geq 1$$

$$\Pi_0^{(2)} = \frac{\mu_1}{\lambda_1} \Pi_1^{(2)}$$

$$\lambda_1 \Pi_0^{(2)} - \mu_1 \Pi_1^{(2)} = 0$$

Hasonló egyenletek adódnak, ha a 2. igény helyett a 3-at, 4-et, stb. vesszük. Tegyük fel, hogy léteznek $n \rightarrow \infty$ határértékek.

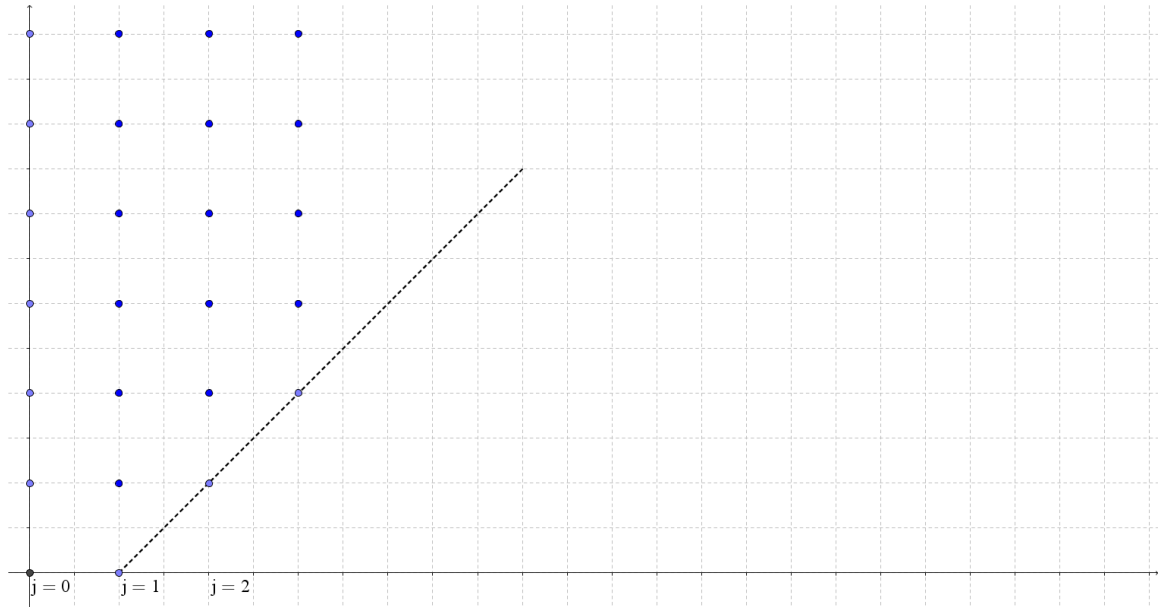
$$\Pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_j^{(n)}$$

Ezekre a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\lambda_1 \Pi_0 - \mu_1 \Pi_1 = 0$$

Továbbá:

$$\frac{\lambda_j + \mu_j}{\lambda_j} \Pi_j = \Pi_{j-1} + \frac{\mu_{j+1}}{\lambda_{j+1}} \Pi_{j+1}$$



13. ábra. ?

Szorozzunk λ_{j+1} értékével

$$\lambda_{j+1}\Pi_j + \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}\mu_j\Pi_j = \lambda_{j+1}\Pi_{j-1} + \mu_{j+1}\Pi_{j+1}$$

Átrendezve és iterálva:

$$\mu_{j+1}\Pi_{j+1} - \lambda_{j+1}\Pi_{j-1} = \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}(\mu_j\Pi_j - \lambda_j\Pi_{j-1}) = \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} \frac{\lambda_j}{\lambda_{j-1}}(\mu_{j-1}\Pi_{j-1} - \lambda_{j-1}\Pi_{j-2}) = \dots = 0$$

Így tehát:

$$\Pi_j = \frac{\lambda_j}{\mu_j}\Pi_{j-1} = \dots = \frac{\lambda_j}{\mu_j} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_{j-1}} \dots \frac{\lambda_1}{\mu_1}\Pi_0$$

. Ugyanakkor ezek valószínűségeloszlást alkotnak. így:

$$\sum \Pi_k = 1$$

Vessük össze a fenti rekurziót a fix időponthoz tartozó stacionárius eloszlás rekurziójával:

$$p_j = \frac{\lambda_{j-1}\dots\lambda_0}{\mu_j\dots\mu_0}p_0;$$

Az egyetlen különbség, hogy a λ paraméterek indexezése változik meg. Ezért teljesül a következő állítás: Állítás: Ha $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots$; akkor $p_k = \Pi_k$; $k \geq 0$

→ PASTA: Poisson Arrivals See Time Average

(Ez jó hír, mert korábban is használtuk már, hogy pl. az M/M/1 rendszerben a beérkező igény hány igényt talál a rendszerben (ettől függött, hogy átlagosan mennyi időt tartózkodik a rendszerben). A korábban vizsgált rendszerben teljesült a PASTA tulajdonság, tehát az ottani gondolatmenetek érvényben maradnak.

Térjünk vissza az "elbátortalanított vásárlók" modellhez.
A beérkező igény "által tapasztalt" stacionárius eloszlás:

$$\Pi_k = \Pi_0 \frac{\alpha^k}{\mu^k (k+1)!} \quad \text{így} \quad \Pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\mu^k (k+1)!} = 1$$

$$\Pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha/\mu)^{k+1} \mu}{(k+1)! \alpha} = 1$$

$$\Pi_0 = \frac{\alpha}{\mu} \frac{1}{e^{\alpha/\mu} - 1}$$

$$\Pi_k = \frac{\alpha}{\mu} \frac{1}{e^{\alpha/\mu} - 1} \frac{\alpha^k}{\mu^k (k+1)!}$$

Az ebből adódó átlagos rendszeridő:

$$\begin{aligned} \sum \Pi_k \frac{k+1}{\mu} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha}{\mu} \frac{1}{e^{\alpha/\mu} - 1} \frac{\alpha^k}{\mu^k (k+1)!} \frac{k+1}{\mu} \\ &= \frac{\alpha}{\mu^2} \frac{1}{e^{\alpha/\mu} - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^k}{(k!)} \\ &= \frac{\alpha}{\mu^2} \frac{e^{\alpha/\mu}}{e^{\alpha/\mu} - 1} \end{aligned}$$

Ellenőrizzük a Little-formulát:

$$\frac{\alpha}{\mu} = \frac{\alpha}{\mu^2} \frac{e^{\alpha/\mu}}{e^{\alpha/\mu} - 1} \times \mu (1 - e^{-\alpha/\mu}) .$$

Valóban.

7. 7. előadás 2013.03.26.

A múlt órán az elbátortalanított vásárlókat vettük. Ekkor a beérkezési folyamat már nem Poisson folyamat volt, de a kiszolgálási idő továbbra is exponenciális eloszlású volt.

Most olyan rendszereket szeretnénk vizsgálni, ahol a kiszolgálási idő másfajta eloszlású.

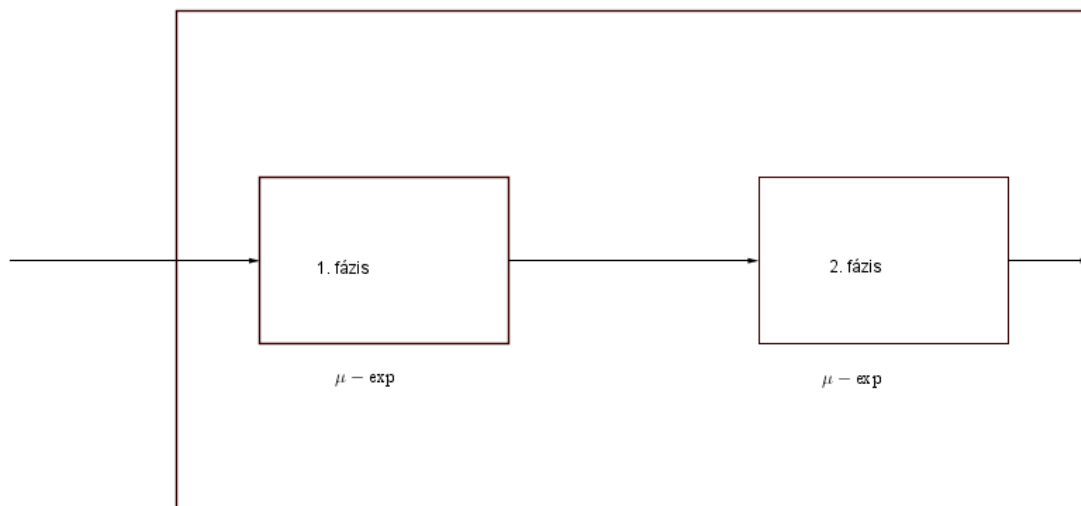
Ez lesz az M/G/1 rendszer.

- **M**: λ -paraméterű exponenciális időközönként érkeznek az igények.
- **G**: azonos eloszlású és független valószínűségi változók. Ezek határozzák meg a kiszolgálás időtartamokat.
- **1**: egyetlen kiszolgáló egység.

Ugyanakkor a korábbi rendszerek vizsgálata a Markov-láncok elméletét használta fel, ahol az egyes állapotokban exponenciális ideig kell, hogy tartózkodjék a rendszer. Ezért kezdetben olyan – általánosabb – rendszereket érintünk, amelyekben a kiszolgálási idő eloszlása exponenciális eloszlásbókból épül fel.

Példa:

$\Gamma_2(\mu)$: két független μ -exp összege (Gamma-eloszlás)



14. ábra. ?

Két változat is lehetséges. Csak akkor kezdődhet meg a következő igény kiszolgálása, ha az aktuális igény esetében mindkét a exponenciális eloszlású kiszolgálási "fázis" befejeződött. Másik lehetőség: az első fázis befejeződése után az aktuális igény kiszolgálása átlép a második fázisba, és megkezdődik a következő igény kiszolgálásának első fázisa. Ez utóbbi voltaképpen két sorbakapcsolt M/M/1 rendszer. Pontosabban "M/M/1-szerű" rendszer, hiszen a második fázis "beérkezési" folyamata az első fázis "távozási" folyamata lesz.

Távozási folyamat M/M/1 rendszerben:

- Ha marad igény a rendszerben, akkor μ -exp múlva következik be a következő távozás
- Ha üres rendszer marad, akkor várni kell a következő beérkezésre – ez λ -exp idő múlva lesz –, majd a beérkezett igény kiszolgálására – ez μ -exp. E kettő összege tehát ebben az esetben.

Ahhoz, hogy magát a tényleges eloszlást meg tudjuk határozni, ismernünk kellene az egyes esetek valószínűségét. Ezt általánosabban is megvizsgáljuk.

Vezessük be a következő jelöléseket:

q_n az n . igény távozásakor hátramaradt igények száma.

Q_n az n . igény beérkezésekor a rendszerben talált igények száma.
Tehát pl.

$$P(\text{távozáskor marad igény a rendszerben}) = P(q_n > 0),$$

illetve

$$P(\text{üres rendszer marad hátra}) = P(q_n = 0).$$

Rajzoljuk le az egyes igények beérkezési illetve távozási időpontjait. Mivel a kiszolgálási protokoll FCFS és egyetlen kiszolgálóegység van, ezért nem előzhetik meg egymást az igények. Másképpen, aki később érkezik, később is távozik. Tegyük fel, hogy $q_n \leq k$. Azaz az n . igény kevesebb, mint k igényt hagyott hátra a rendszerben. Ezek mind utána érkeztek, de az alatt az idő alatt, amikor az n . igény még a rendszerben volt. Ha tehát ezek száma k -nál nem nagyobb, akkor az utána következő $(k+1)$. igény már az ő távozása után érkezik. (Egyébként ez is a hátrahagyott között lenne, tehát azok száma legalább $k+1$ lenne.) Hány igény találhat ez az $(n+k+1)$. igény. Csak olyanokat, akik nála korábban érkeztek. De azok közül az n -nek beérkezett már eltávozott, tehát az n -t megelőzően érkezettek is. Az n . és az $(n+k+1)$. igény között éppen k igény van. Legfeljebb ezeket találhatja a rendszerben az $(n+k+1)$. igény. Azaz, ha $q_n \leq k$ akkor $Q_{n+k+1} \leq k$.

Megfordítva. Ha az n . igény legfeljebb k igény talál beérkezésekor, azaz $Q_n \leq k$, akkor – mivel a beérkezések sorrendje megegyezik a távozások sorrendjével – ezek csak ő előtte beérkező igények. Ugyanakkor, aki előtte $(k+1)$. volt (visszafelé számolva most őket), az már eltávozott – hiszen legfeljebb k igényt talált. Azaz, az eredeti sorrendben véve, az $(n-k-1)$. igény már nincsen a rendszerben. (Ha még ő is ott lenne, akkor a kettejük között lévő k darab igény is ott lenne, ez együtt $k+1$. Tehát ekkor legalább ennyit találna az n -nek beérkező igény.)

Ugyanakkor hány igényt hagyhatott hátra az $(n-k-1)$. igény? Akik őt megelőzően érkeztek, azok az ő távozása előtt már elhagyták a rendszert, tehát őket nem hagyhatta hátra. Amint láttuk az n . igény az ő távozása után érkezik. Tehát csak a kettejük közötti igények lehetnek a rendszerben az n . igény távozásakor. Kettejük között éppen k darab igény van. Legfeljebb őket hagyhatja hátra. Azaz, ha $Q_n \leq k$ akkor $q_{n-k-1} \leq k$. Mivel ez minden $k < n$ értékre igaz, tehát akár az $n+k+1$. igényre is.

Összegezve tehát

$$\{q_n \leq k\} \subset \{Q_{n+k+1} \leq k\} \subset \{q_n \leq k\}$$

Azaz megegyeznek ezek az események.

De

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Q_n \leq k) = \sum_{j=0}^k \Pi_j$$

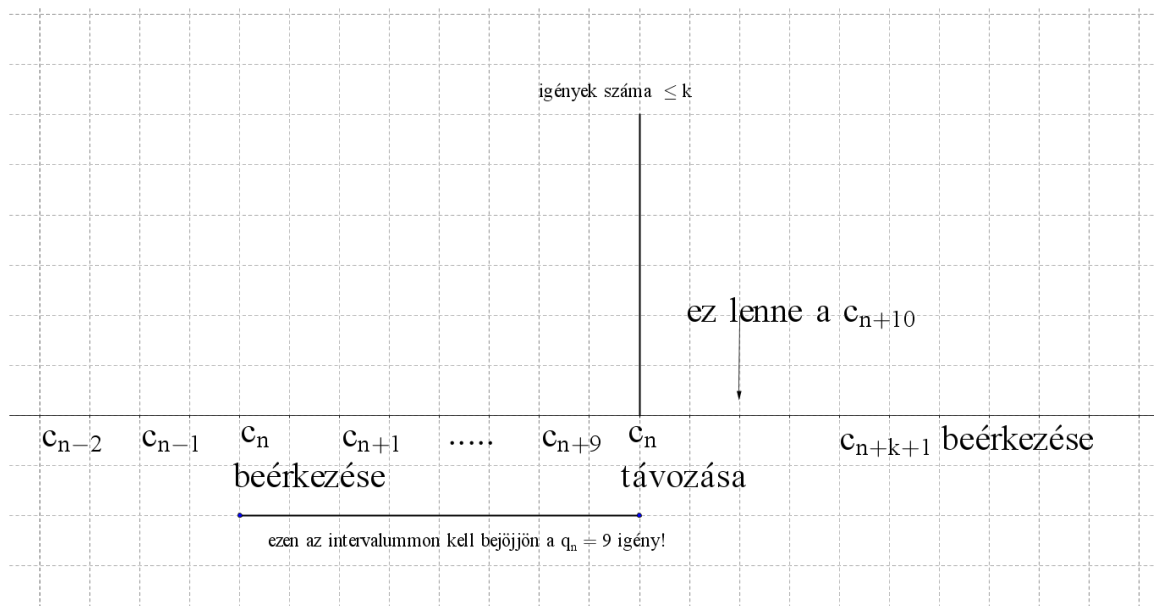
Ezért – rögzített k mellett –

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(q_n \leq k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Q_{n+k+1} \leq k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Q_n \leq k) = \sum_{j=0}^k \Pi_j$$

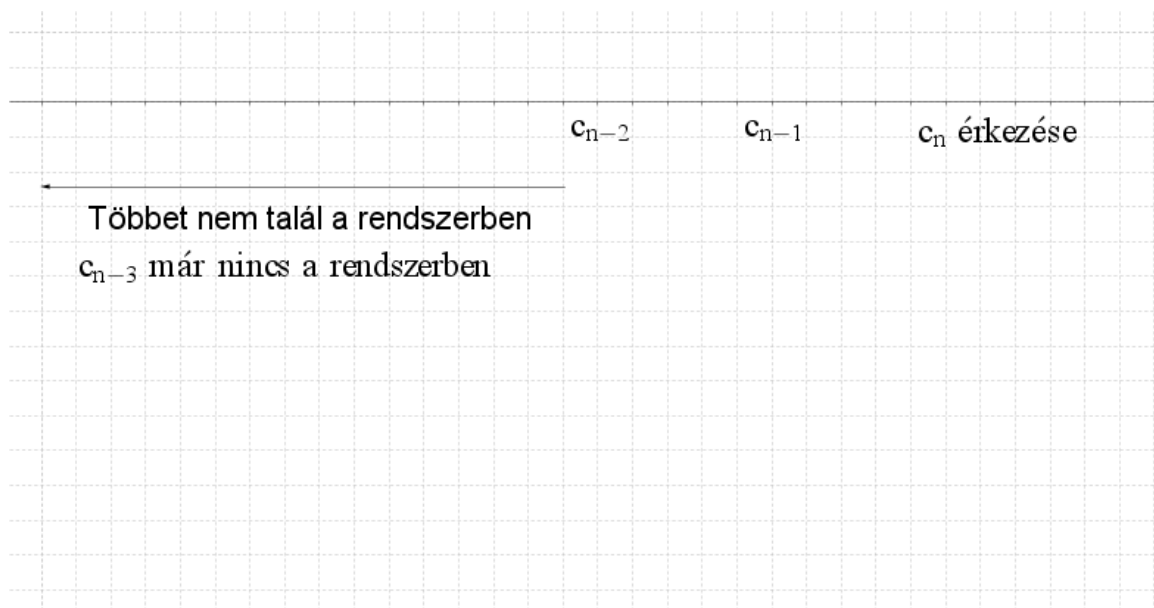
Alkalmazva ez k helyett $k-1$ -re, és tekintve a különbséget, kapjuk, hogy

$$P(q_n = k) \rightarrow \Pi_k \quad \text{tehát} \quad Q_n \text{ és } q_n \text{ határeloszlása megegyezik}$$

Hangsúlyozzuk, hogy csak annyit használtunk ki, a beérkezési sorrend megegyezik a kiszolgálási sorrenddel, továbbá, hogy létezik stacionárius viselkedés.



15. ábra. ?



16. ábra. ?

Speciális eset:

Térjünk vissza ezek után az $M/M/1$ rendszer távozási folyamatához.

- $M/M/1$
- PASTA
- FCFS-protokoll
- Legyen határeloszlás, tudjon stacionáriusan viselkedni, azaz $\lambda < \mu$.

Erre teljesül a PASTA tulajdonság, tehát

$$\Pi_k = p_k, \quad k \geq 0$$

Ugyanakkor a beérkezéskor talált igények számának határeloszlása, megegyezik a hátrahagyott igények számának határeloszlásával, tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(q_n = k) = \Pi_k = p_k = (1 - \frac{\lambda}{\mu}) (\frac{\lambda}{\mu})^k$$

Ezért tehát

$$P(q_n = 0) \rightarrow 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

és

$$P(q_n \geq 1) \rightarrow \frac{\lambda}{\mu}$$

Ennek alapján meghatározható, hogy stacionárius esetben milyen eloszlású lesz két távozás között eltelt időtartam.

$\frac{\lambda}{\mu}$ súllyal μ paraméterű exponenciális idő múlva lesz a következő távozás, $1 - \frac{\lambda}{\mu}$ súllyal egy λ -paraméterű és egy μ -paraméterű exponenciális összege idő múlva lesz a következő távozás. Ezért tehát annak valószínűsége, hogy a következő távozásig eltelt idő nem nagyobb, mint t az alábbi alakban írható:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) + (1 - \frac{\lambda}{\mu}) \underbrace{\int_0^t (1 - e^{-\mu(t-s)}) \lambda e^{-\lambda s} ds}_{P(\zeta + \eta \leq t)} \\ &= \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) + \frac{\mu - \lambda}{\mu} (-e^{-\lambda t} + 1 - \frac{\lambda}{\mu - \lambda} e^{-\lambda t} + \frac{\lambda}{\mu - \lambda} e^{-\mu t}) \\ &= \frac{\lambda}{\mu} + 1 - \frac{\lambda}{\mu} + e^{-\mu t} (-\frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda}{\mu}) + e^{-\lambda t} (-\frac{\mu - \lambda}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu}) = 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Azaz $P(\text{két távozás közt eltelt idő} \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Tanulság: A távozási és beérkezési időközök egyenlő eloszlásúak.

Állítás:

–M/M/m esetén is stacionárius állapotban a távozási időközök független, λ -paraméterű exponenciális véletlen valószínűségi változók.

"Bizonyítás": (ötlet) figyelembe kell venni, hogy mennyi igény marad hátra!

$$\Pi_k = p_k; \quad P_0 = (\dots + \dots)^{-1} \leftarrow \text{nem szép az alakja}$$

Térjünk vissza az általános kiszolgálási idővel rendelkező rendszerekhez. **M/G/1:**

–Megmenthető a Markovitás? (igen!)

Ha kibővítjük az állapotváltozót, amely eddig csak a rendszerben tartózkodó igények száma volt, a hátralevő kiszolgálási idővel.

$$(N(t), \text{hátralevő kiszolgálási idő}(t))$$

Ezt ismerve, a múlt ismerete nélkül már felépíthető, hogy a későbbiekben hogyan viselkedik folyamat.

–Milyen a Markov-folyamat állapottere? (nem igazán diszkrét!) Ezért az eddigi eszköztár nem alkalmazható, általánosabb Markov-folyamatok elméletére lenne szükség.

Azonban, ha olyankor pillantunk rá a rendszerre, amikor éppen befejeződött egy kiszolgálás – azaz távozás pillanatában –, akkor a hátralévő kiszolgálási idő nulla. Ez a sorozat, Markov-láncot alkot. Ez az ún. beágyazott Markov-lánc.

Vizsgáljuk tehát a $q_1, q_2, \dots$ – távozáskor hátramaradó igények száma – $q_j \geq 0$ sorozatot.

$$q_{n+1} = \begin{cases} q_n - 1 + \kappa_{n+1} & \text{ha } q_n \geq 1 \\ \kappa_{n+1} & \text{ha } q_n = 0 \end{cases}$$

ahol κ_{n+1} az $(n+1)$. igény kiszolgálása alatt beérkezett igények száma. Ugyanis, ha az n . igény távozásakor marad igény a rendszerben, akkor amikor a következő eltávozik, akkor általa eggyel csökken a rendszerben lévő igények száma, de az ő kiszolgálási ideje alatt érkezett növelték a rendszerben lévő igények számát.

Ha pedig üres rendszer maradt hátra, akkor meg kell várni míg az $(n+1)$. igény beérkezik. Az ő távozásakor csak azok maradnak hátra, akik az ő kiszolgálási ideje alatt érkeztek.

8. 8. előadás - 2013.04.09.

M/G/1 rendszerekről lesz szó.

- **M**: λ -paraméterű exponenciális; beérkezési időközök
- **G**: független, azonos eloszlású valószínűségi változók; kiszolgálási időtartamok
- **1**: egy darab kiszolgálóegység

FCFS kiszolgálás van.

Jelölje $B(t)$ a kiszolgálási idő eloszlásfüggvényét, b a várható értékét.

Amint már arról volt szó, $N(t)$ általában nem Markov-folyamat, de ha kibővítjük, és egy vektorként írjuk fel, akkor már az lesz. Ennek módja a következő:

($N(t)$, hátralévő kiszolgálási idő)

Az állapottér: $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^+$. Ez azonban folytonos állapottér, tehát a Markov-láncok elmélete nem alkalmazható.

Azonban vizsgáljuk a folyamatot a távozások pillanatában. Emlékezzünk vissza, hogy q_n jelölte a hátrahagyott igények számát. Ezek Markov-láncot alkot. A múlt alkalommal már levezettük az alábbi egyenletet:

$$q_{n+1} = \begin{cases} \kappa_{n+1} & \text{ha } q_n = 0 \\ q_n - 1 + \kappa_{n+1} & \text{ha } q_n \geq 1 \end{cases}$$

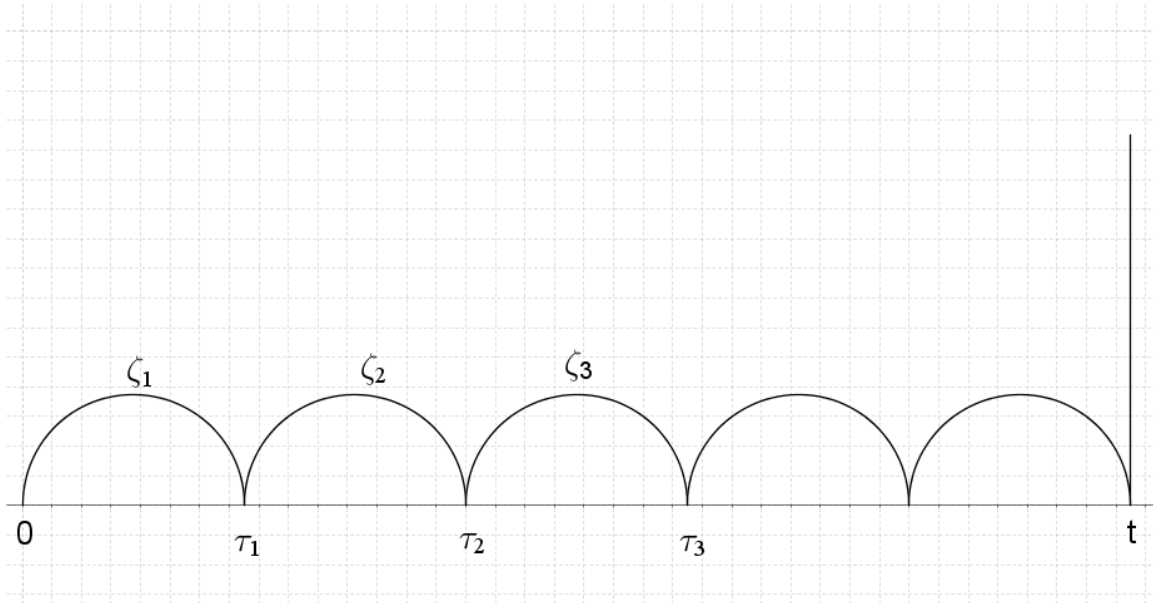
κ_{n+1} : $(n+1)$. igény kiszolgálása alatt beérkezett igények száma.

Ezért a q_n sorozat viselkedésének megértéséhez szükségünk van a κ_{n+1} valószínűségi változó tulajdonságainak ismeretére. Mekkora a várható értéke, illetve milyen eloszlású?

$\langle \kappa_j \rangle = ?$

Itt teszünk egy kis kitérőt:

–beérkezési folyamat: erről tudjuk, hogy független, λ -paraméterű exponenciális időközönként vannak a beérkezések, ezért a k . beérkezés időpontja Gamma-eloszlású:



17. ábra. ?

$$\tau_k = \sum_{j=1}^k \zeta_j \rightarrow \text{eloszlása Gamma-eloszlás: } \Gamma_k(\lambda)$$

$$\text{Sűrűségfüggvénye: } \frac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x}$$

Ennek alapján meghatározhatjuk, hogy adott hosszúságú időintervallumon belül hány igény érkezik be:

$$\begin{aligned} P([0, t] \text{-n pontosan } k \text{ igény jön be}) &= P(\tau_k \leq t < \tau_{k+1}) = P(\tau_k \leq t < \tau_k + \zeta_{k+1}) = \\ &= \iint_{0 \leq x \leq t \leq x+y} \lambda e^{-\lambda y} \frac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} dy dx = \int_0^t \int_{t-x}^{\infty} \frac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dx dy = \\ &= \int_0^t \frac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t-x)} dx = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^t x^{k-1} dx = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = P(A_t = k), \end{aligned}$$

ahol A_t jelöli a $[0, t]$ intervallumon beérkezett igények számát. Ez tehát Poisson-eloszlású valószínűségi változó.

Ugyanígy megmutatható, hogy ez tetszőleges részintervallumra is igaz. A Poisson-eloszlás paramétere az intervallum hossza szorozva λ -val lesz. Azaz

$$P(A_t - A_s = l) = \frac{(\lambda(t-s))^l}{l!} e^{-\lambda(t-s)}$$

Ugyanakkor a κ_j nem fix hosszúságú intervallumon beérkezett igények számát jelöli, hanem véletlen hosszúságún, a j -dik igény kiszolgálási ideje alatt. De az előző gondolatmenet megadja κ_j feltételes eloszlását – rögzítve a kiszolgálási idő hosszát. Ezért

$$P(\kappa_j = k) = \int_0^\infty P(\kappa_j = k | t \text{ hosszú a kiszolgálási idő}) dB(t) = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB(t)$$

Illetve az átlagos igényszám:

$$\langle \kappa_j | X_j = t \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k P(\kappa_j = k | X_j = t) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t$$

$$\langle \kappa_j \rangle = \int \langle \kappa_j | X_j = t \rangle dB(t) = \int \lambda t dB(t) = \lambda \int t B(t) = \lambda \langle X_j \rangle = \lambda b = \rho$$

mivel a kiszolgálási idő várható értékét b jelöli. (Tehát ρ jelöli a λb szorzatot.)

Ha speciálisan X_j -k μ -paraméterű exponenciális eloszlásúak, (azaz az M/M/1 rendszert tekintjük) akkor:

- $\langle X_j \rangle = \frac{1}{\mu}$
- $b = \frac{1}{\mu}$
- $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$,

amely összhangban van az ott bevezetett jelöléssel.

Hasonlóan

$$\begin{aligned} \langle \kappa_j^2 \rangle &= \int \langle \kappa_j^2 | X_j = t \rangle dB(t) = \int \left(\sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(\kappa_j = k | X_j = t) \right) dB(t) = \int ((\lambda t)^2 + \lambda t) dB(t) = \\ &= \lambda^2 \int t^2 dB(t) + \lambda \int t dB(t) = \lambda^2 \langle X_j^2 \rangle + \lambda \langle X_j \rangle \end{aligned}$$

Megjegyzés a fenti levezetés megértésének megkönnyítéséhez:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(\kappa_j = k | X_j = t) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \sum_{k=1}^{\infty} (k(k-1) + k) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!} (\lambda t)^2 e^{-\lambda t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda e^{-\lambda t} = \lambda^2 t^2 + \lambda t \end{aligned}$$

Vezessünk be egy jelölést:

$$U(k) = \begin{cases} 0 & \text{ha } k = 0 \\ 1 & \text{ha } k \geq 1 \end{cases}$$

Ekkor összefoglalóan írhatjuk, hogy: $q_{n+1} = q_n - U(q_n) + \kappa_{n+1}$

Vegyük mindkét oldal várható értékét:

$$\langle q_{n+1} \rangle = \langle q_n \rangle - \langle U(q_n) \rangle + \langle \kappa_{n+1} \rangle$$

Tegyük fel, hogy a rendszer stacionárius állapotban van, ekkor $\langle q_{n+1} \rangle = \langle q_n \rangle$

Ezért adódik, hogy: $\langle U(q_n) \rangle = \langle \kappa_{n+1} \rangle = \lambda b$ Ugyanakkor $\langle U(q_n) \rangle = P(q_n \geq 1)$. Tehát

$$P(q_n \geq 1) = \lambda b = \rho$$

Így feltétlen kell teljesülnön a $\rho \leq 1$ egyenlőtlenség. Azonban megmutatható $\rho = 1$ esetén még nincs stacionárius viselkedés. A stacionárius viselkedés szükséges és elégséges feltétele: $0 < \rho < 1$.

q_n várható értékének meghatározásához emeljük négyzetre egyenletünk mindkét oldalát. Kapjuk, hogy

$$q_{n+1}^2 = q_n^2 + U(q_n)^2 + \kappa_{n+1}^2 - 2q_n U(q_n) + 2q_n \kappa_{n+1} - 2U(q_n) \kappa_{n+1}$$

Vegyük észre, hogy $U(q_n)^2 = U(q_n)$, továbbá $q_n U(q_n) = q_n$ valamint q_n és κ_{n+1} független valószínűségi változók, tehát szorzatuk várható értéke megegyezik a várható értékük szorzatával. Ennek alapján – tekintve mindkét oldal várható értékét:

$$\langle q_{n+1}^2 \rangle = \langle q_n^2 \rangle + \langle U(q_n) \rangle + \lambda^2 \langle X_j^2 \rangle + \lambda b - 2 \langle q_n \rangle + 2 \langle q_n \rangle \langle \kappa_{n+1} \rangle - 2 \langle U(q_n) \rangle \langle \kappa_{n+1} \rangle$$

$$0 = \rho + \lambda^2 \langle X_j^2 \rangle + \rho - 2 \langle q_n \rangle + 2\rho \langle q_n \rangle - 2\rho^2$$

Átrendezve:

$$\langle q_n \rangle = \frac{2\rho - 2\rho^2 + \lambda^2 \langle X_j^2 \rangle}{2 - 2\rho} = \rho + \frac{\lambda^2 \langle X_j^2 \rangle}{2(1 - \rho)}$$

Egyenletünk tehát alkalmas volt arra, hogy a távozáskor hátramaradt igények átlagos számát meghatározzuk. A kiszolgálási idő első és második momentuma játszik ebben szerepet. Jó lenne azonban látni, hogy ennek a mennyiségnek milyen kapcsolata van azokkal az mennyiségekkel, amelyeket eddig vizsgáltunk. Ehhez vegyük észre, hogy q_n nem más, mint az n -edik igény rendszerben töltött ideje alatt beérkezett igények száma (azaz, akik későbbben érkeztek mint ő, de még az ő távozása előtt – tehát amikor ő a rendszerben volt). Így alkalmazható ugyanaz a gondolatmenet, mint amit a kiszolgálási ideje alatt beérkezettek számával kapcsolatban alkalmaztunk: ha a feltételes eloszlást tekintjük, rögzítve a rendszeridő hosszát, akkor erre vonatkoztatva q_n feltételes eloszlása már Poisson eloszlás lesz. Így

$$\langle q_n \rangle = \int \langle q_n | S_n = t \rangle dF_{S_n}(t) = \int \lambda t dF_{S_n}(t) = \lambda \langle S_n \rangle$$

Ezért

$$\langle S_n \rangle = \frac{\langle q_n \rangle}{\lambda} = b + \frac{\lambda \langle X_j^2 \rangle}{2(1 - \rho)}$$

Ebből az átlagos várakozási idő is meghatározható, hiszen $S_n = W_n + X_n$.

$$\langle W_n \rangle = \langle S_n \rangle - \langle X_n \rangle = \frac{\lambda \langle X_j^2 \rangle}{2(1 - \rho)}$$

A Little-formula felhasználásával megkaphatjuk a fix időpontban a rendszerben tartózkodó igények átlagos számát – stacionárius esetben: $\langle N(t) \rangle = \langle S(t) \rangle \lambda$. Vegyük észre, hogy $\langle N(t) \rangle = \langle q_n \rangle$, azaz a távozáskor hátrahagyott igények átlagos száma megegyezik a stacionárius állapotban lévő rendszerben

tartózkodó igények átlagos számával.

Ahelyett, hogy az előző gondolatmenetet megismételnénk a harmadik, negyedik .. hatványra vegyük a **generátorfüggvényt**:

Jelölje:

$$Q_n(z) = \sum z^k P(q_n = k) = \langle z^{q_n} \rangle$$

Alkalmazva a q_n sorozatra vonatkozó egyenletet és kihasználva q_n és κ_{n+1} függetlenségét kapjuk, hogy

$$Q_{n+1}(z) = \langle z^{q_{n+1}} \rangle = \langle z^{q_n - U(q_n) + \kappa_{n+1}} \rangle = \langle z^{q_n - U(q_n)} \rangle \langle z^{\kappa_{n+1}} \rangle, .$$

Továbbá

$$\begin{aligned} \langle z^{q_n - U(q_n)} \rangle &= P(q_n = 0) \cdot 1 + P(q_n = 1) \cdot 1 + z P(q_n = 2) + z^2 P(q_n = 3) + \dots = P(q_n = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(q_n = k) z^{k-1} = \\ &= P(q_n = 0) + \frac{1}{z} \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k P(q_n = k) - P(q_n = 0) \right) \end{aligned}$$

Behelyettesítve:

$$Q_{n+1}(z) = \left(1 - \rho + \frac{1}{z} (Q_n(z) - (1 - \rho)) \right) \Phi_{n+1}(z),$$

ahol $\Phi_{n+1}(z)$ a κ_{n+1} valószínűségi változó generátorfüggvénye.

Stacionárius esetben:

$$Q(z) = \left((1 - \rho) + \frac{1}{z} (Q(z) - (1 - \rho)) \right) \Phi(z)$$

Átrendezve

$$Q_n(z) = Q(z) = \frac{\Phi(z) [(1 - \rho) - \frac{1-\rho}{z}]}{1 - \frac{\Phi(z)}{z}} = \frac{\Phi(z)(1 - \rho)(z - 1)}{z - \Phi(z)}$$

Másfelől ismét használva, hogy q_n feltételes eloszlása az $S_n = t$ feltétel mellett λt paraméterű Poisson-eloszlás, melynek generátorfüggvénye $e^{\lambda t(1-z)}$, ezért

$$Q_n(z) = \langle z^{q_n} \rangle = \int \langle z^{q_n} | S_n = t \rangle dF_{S_n}(t) = \int e^{-\lambda t(1-z)} dF_{S_n}$$

mert

$$\begin{aligned} \langle z^{q_n} | S_n = t \rangle &= \sum z^l P(q_n = l | S_n = t) = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} z^l \frac{(\lambda t)^l}{l!} e^{-\lambda t} = e^{zt\lambda} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t(1-z)} \end{aligned}$$

9. 9. előadás 2013.04.16

M/G/1 rendszereket vizsgálunk.

Láttuk, hogy $q_{n+1} = q_n - U(q_n) + \kappa_{n+1}$ ű. Itt $(\kappa_{n+1} \rightarrow (n+1))$ igény kiszolgálása alatt beérkezett igények száma) ahol

$$U(q_n) = \begin{cases} 1 & \text{ha } q_n \geq 1 \\ 0 & \text{ha } q_n = 0 \end{cases}$$

Továbbá meghatároztuk, hogy $\langle \kappa_{n+1} \rangle = \lambda b = \rho \quad 0 < \rho < 1$

$$P(q \geq 1) = \rho$$

$$\langle W_n \rangle = \frac{\lambda \langle X_n^2 \rangle}{2(1 - \lambda \langle X_n \rangle)}$$

Ez a várható értékre vonatkozó Pollaczek-Hincsin-formula.

Meghatároztuk a generátorfüggvényt is: (pontosabban kapcsolatot teremtettünk q_n és κ_{n+1} generátorfüggvénye között)

$$\langle z^{q_{n+1}} \rangle = \sum z^k P(q_{n+1} = k) = Q_{n+1}(z)$$

$$Q_{n+1}(z) = \langle z^{q_{n+1} - U(q_n) + \kappa_{n+1}} \rangle = \langle z^{q_{n+1} - U(q_n)} \rangle \langle z^{\kappa_{n+1}} \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle z^{q_n - U(q_n)} \rangle &= P(q_n = 0) \cdot 1 + P(q_n = 1) \cdot 1 + P(q_n = 2) \cdot z + P(q_n = 3) \cdot z^2 + \dots = \\ &= 1 - \rho + \frac{1}{z} \left(\sum_{k=0}^{\infty} P(q_n = k) z^k - P(q_n = 0) \right) = 1 - \rho + \frac{1}{z} (Q_n(z) - (1 - \rho)) \end{aligned}$$

Stacionárius esetben:

A távozás pillanatában hátralevő igények generátorfüggvénye:

$$\begin{aligned} Q(z) &= (1 - \rho + \frac{1}{z} (Q(z) - (1 - \rho))) \Phi(z) \\ Q(z) &= \frac{\Phi(z) [z(1 - \rho) - (1 - \rho)]}{z - \Phi(z)} = \frac{(1 - \rho)(z - 1) \Phi(z)}{z - \Phi(z)} \end{aligned}$$

Használjuk ki, hogy mind κ_n , mind q_n feltételes eloszlását ismerjük. Ennek alapján:

$$\Phi(z) = \sum z^k P(\kappa = k) = \sum z^k \int \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB(t) = \int e^{z\lambda t} e^{-\lambda t} dB(t) = \int e^{-(1-z)\lambda t} dB = B^*(\lambda(1-z))$$

ahol

$$B^*(s) = \int e^{-st} dB(t)$$

a kiszolgálási idő eloszlásának laplace-transzformáltja.

Hasonlóan

$$Q(z) = \langle z^{q_n} \rangle = \sum z^k P(q_n = k) = \sum z^k \int \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dF_{S_n}(t) = \int e^{-[(1-z)\lambda]t} dF_{S_n}(t),$$

ahol

$$S^*(s) = \int e^{-st} dF_{S_n}(t)$$

a rendszeridő eloszlásának Laplace-transzformáltja. Behelyettesítve adódik, hogy

$$Q(z) = S^*(\lambda(1-z)) = \frac{B^*(\lambda(1-z))(z-1)(1-\rho)}{z - B^*(\lambda(1-z))}$$

Végezzük el az $s = \lambda(1 - z)$ változó cserét. Ekkor $z = \frac{\lambda-s}{\lambda}$, illetve $z - 1 = \frac{\lambda-s}{\lambda} - 1 = -\frac{s}{\lambda}$.
 Kapjuk, hogy

$$S^*(s) = -\frac{B^*(s)(1-\rho)(s/\lambda)}{1-(s/\lambda)-B^*(s)} = -\frac{B^*(s)(1-\rho)s}{\lambda-s-\lambda B^*(s)}$$

Tehát a rendszeridő (Laplace-transzformáltja) kifejezhető a kiszolgálási idő segítségével (Laplace-transzformáltja).
 Kihashználhatjuk, hogy $S_n = W_n + X_n$, ahol W_n és X_n független valószínűségi változók. Ezért

$$S^* = \int e^{-st} dF_{S_n}(t) = \langle e^{-sS_n} \rangle = \langle e^{-s(W_n+X_n)} \rangle = \langle e^{-sW_n} \rangle \langle e^{-sX_n} \rangle = W_n^*(s) \cdot B_n^*(s)$$

Így

$$W_n^*(s) \cdot B_n^*(s) = -\frac{B^*(s)(1-\rho)s}{\lambda-s-\lambda B^*(s)}.$$

Egyszerűsítve a B^* mennyiséggel:

$$W^*(s) = \frac{(1-\rho)s}{-\lambda+s+\lambda B^*(s)} = \frac{1-\rho}{1-\lambda \frac{1-B^*(s)}{s}} = \frac{1-\rho}{1-\rho \left(\frac{1-B^*(s)}{sb} \right)}$$

Ez a transzformáltra vonatkozó Pollaczek-Hincsin formula.

Speciális eset:

$$-M/M/1$$

$$B^*(s) = \int e^{-st} \mu e^{-\mu t} dt = \mu \int_0^{\infty} e^{-(s+\mu)t} dt = \frac{\mu}{s+\mu} \quad s > 0$$

$$\begin{aligned} W^*(s) &= \frac{(1-\rho)s}{-\lambda+s+\lambda \frac{\mu}{s+\mu}} = \frac{(1-\rho)s}{s+\lambda \left(\frac{\mu}{s+\mu} - 1 \right)} = \frac{(1-\rho)s}{s-\lambda \frac{s}{s+\mu}} = \frac{1-\rho}{1-\frac{\lambda}{s+\mu}} = \\ &= \frac{(1-\rho)(s+\mu)}{(s+\mu)-\lambda} = \frac{1-\lambda/\mu(s+\mu)}{(s+\mu)-\lambda} \end{aligned}$$

$$W^*(s) = \int e^{-st} dF_{W_n}(t) = P(W_n = 0) \cdot 1 + P(W_n > 0) \langle e^{-sW_n} \mid W_n > 0 \rangle$$

$$\frac{\frac{(1-\rho)(s+\mu)}{s+\mu-\lambda} - (1-\rho)}{\rho} = \frac{1-\rho}{\rho} \left[\frac{s+\mu}{s+\mu-\lambda} - 1 \right] = \frac{1-\rho}{\rho} \frac{\lambda}{s+\mu-\lambda} = \frac{(1-\lambda/\mu)}{\lambda/\mu} \frac{\lambda}{s+\mu-\lambda} = \frac{\mu-\lambda}{s+\mu-\lambda}$$

$\rightarrow (\mu - \lambda)$ – paraméterű exponenciális eloszlás

Tehát a várakozási idő két eloszlás keveréke. Ha a beérkező igény üres rendszert talál, akkor a várakozási idő értéke nulla, ennek súlya éppen $1 - \frac{\lambda}{\mu}$, illetve $\frac{\lambda}{\mu}$ eséllyel nem üres a rendszer beérkezéskor, ezen feltétel mellett a várakozási idő $\mu - \lambda$ -paraméterű exponenciális eloszlású. Röviden a várakozási idő eloszlása:

$$(1 - \frac{\lambda}{\mu})\delta_0 + \frac{\lambda}{\mu} ((\mu - \lambda)\text{-paraméterű exponenciális eloszlás})$$

Hasonló gondolatmenettel határozható meg a rendszeridő eloszlása is. (Egyébként korábban már szerepelt, hogy ez $(\mu - \lambda)$ – paraméterű exponenciális eloszlás.)

Mese a várakozási idő Laplace-transzformáltjáról – stacionárius eset:

$$W^*(s) = (1 - \rho) \frac{1}{1 - \rho \frac{1 - B^*(s)}{sb}} = \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \rho) \rho^j \left(\frac{1 - B^*(s)}{sb} \right)^j$$

Értelmezni szeretnénk a megkapott végtelen sort. Ehhez kitérőt teszünk. Legyenek $Z_1, Z_2, \dots, Z_j, \dots$: független, azonos eloszlású valószínűségi változók és

$V_j = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_j$. Ekkor

$$\langle e^{-sV_j} \rangle = \langle e^{-s(Z_1 + \dots + Z_j)} \rangle = \langle e^{-sZ_1} \rangle \dots \langle e^{-sZ_j} \rangle = \langle e^{-sZ_1} \rangle^j$$

Legyen $\nu \geq 0$ egészértékű, független a Z -k sorozatától. Jelölje

$$V = \sum_{l=1}^{\nu} Z_l$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \langle e^{-sV} \rangle &= \langle e^{-s \sum_{l=1}^{\nu} Z_l} \rangle = \sum P(\nu = j) \langle e^{-s \sum_{l=1}^{\nu} Z_l} | \nu = j \rangle = \\ &= \sum P(\nu = j) \langle e^{-s \sum_{l=1}^j Z_l} | \nu = j \rangle = \\ &= \sum P(\nu = j) \langle e^{-s \sum_{l=1}^j Z_l} \rangle \end{aligned}$$

Tehát

$$\langle e^{-sV} \rangle = \sum P(\nu = j) \langle e^{-sZ_1} \rangle^j.$$

Azaz a várakozási idő eloszlásának Laplace-transzformáltjára vonatkozó képlet "esetleg" azonosítható véletlen tagszámú összeg Laplace-transzformáltjával. Ehhez megmutatjuk, hogy $\frac{1 - B^*(s)}{sb}$ is Laplace-transzformált.

Valóban

$$\begin{aligned} \frac{1 - B^*(s)}{sb} &= \frac{1 - \int e^{-st} dB(t)}{sb} = \frac{1}{b} \int \frac{1 - e^{-st}}{s} dB(t) = \\ &= -\frac{1}{b} \int \frac{1 - e^{-st}}{s} d(1 - B(t)) = -\frac{1}{b} \left[\frac{1 - e^{-st}}{s} (1 - B(t)) \right]_0^{\infty} + \int (1 - B(t)) d_t \left(\frac{1 - e^{-st}}{s} \right) = \\ &= \frac{1}{b} \int_0^{\infty} e^{-st} (1 - B(t)) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{1 - B(t)}{b} dt \end{aligned}$$

Legyen

$$B_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < 0 \\ \int_0^t \frac{1 - B(z)}{b} dz & \text{ha } t > 0 \end{cases}$$

Ekkor tehát

$$\frac{1 - B^*(s)}{st} = \int_0^{\infty} e^{-st} dB_0(t) = B_0^*(s)$$

amely tehát B_0 Laplace-transzformáltja.

A várakozási idő Laplace-transzformáltja így áll elő:

$$W^*(s) = \sum (1 - \rho) \rho^j B_0^*(s)^j$$

Azaz, ha $Z_1, \dots, Z_n, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek eloszlásfüggvénye B_0 , továbbá $\nu \geq 0$ egész,

$$P(\nu = j) = (1 - \rho) \rho^j$$

Akkor

a várakozási idő eloszlása megegyezik a: $\sum_{j=1}^{\nu} Z_j$ összeg eloszlásával.

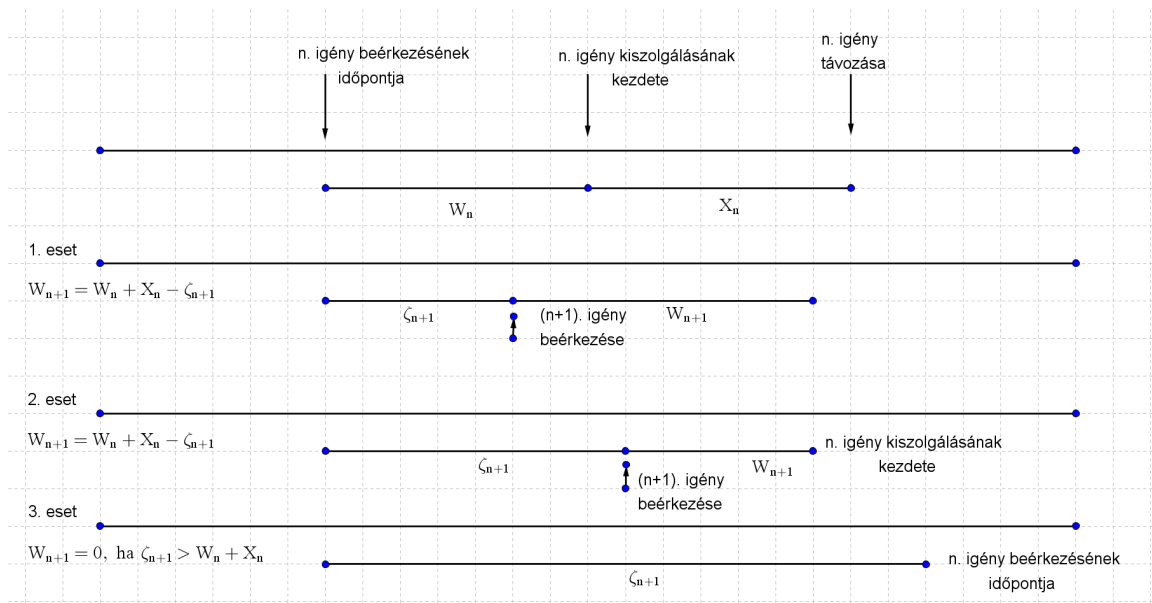
Na ez még furcsább. Lehet-e a tömegkiszolgálási rendszerben konkrétan megtalálni esetleg az itt szerepet játszó $Z_1, Z_2, \dots$ valószínűségi változókat?

10. 10. előadás - 2013.04.23.

A múlt órán a Pollaczek-Hincsin formulákról esett szó.

Az n . igény várakozási ideje: W_n

Rekurziót szeretnénk felírni úgy, hogy: $W_{n+1} = W_n + \dots$



18. ábra. ?

$$W_{n+1} = \max(0, W_n + X_n - \zeta_{n+1}) = [W_n + X_n - \zeta_{n+1}]^+$$

Milyen eloszlású $n \rightarrow \infty$ a W_n ?

Legyen $\xi_n = X_n - \zeta_{n+1}$ $n = 1, 2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók ξ_n azt a eltérést méri, hogy ha az n . igény üres rendszert talál, akkor az ő távozása illetve a következő igény beérkezése között mennyi az eltérés.

$$W_{n+1} = [W_n + \xi_n]^+; \quad \text{speciálisan } W_2 = [W_1 + \xi_1]^+$$

Tegyük fel, hogy $W_1 = 0$ – az üres rendszerrel indítunk, az elsőnek beérkező igénynek nem kell várakoznia:

Ekkor

$$W_2 = \max(0, \xi_1)$$

$$W_3 = \max(0, W_2 + \xi_2) = \max(0, \xi_2 + \max(0, \xi_1)) = \max(0, \max(\xi_2, \xi_2 + \xi_1)) = \max(0, \xi_2, \xi_2 + \xi_1)$$

$$W_4 = \max(0, W_3 + \xi_3) = \max(0, \max(\xi_3, \xi_3 + \xi_2, \xi_3 + \xi_2 + \xi_1)) = \max(0, \xi_3, \xi_3 + \xi_2, \xi_3 + \xi_2 + \xi_1)$$

Általánosan:

$$W_{n+1} = \max(0, \xi_n, \xi_n + \xi_{n-1}, \xi_n + \xi_{n-1} + \xi_{n-2}, \dots, \xi_n + \dots + \xi_1)$$

$n \rightarrow \infty$ esetén kellene a határeloszlás. Azonban, ha n -et eggyel megnöveljük, akkor az összes valószínűségi változót ki kell cserélni, mert n -től visszafelé kell tekinteni a részletösszegeket. Ugyanakkor csak az **eloszlás** érdekel minket. A $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, tehát ha az n . visszafelé tekintjük a részletösszegek maximumát, az ugyanolyan **eloszlású** lesz, mintha más sorrendben vennénk őket, mondjuk elejétől véve a részletösszegeket.

Azaz

W_{n+1} és $\max(0, \xi_1, \xi_1 + \xi_2, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_1 + \dots + \xi_n)$ eloszlása megegyezik.

Ezért $W_n, n \rightarrow \infty$ határeloszlásához elég a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max(0, \xi_1, \xi_1 + \xi_2, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \xi_1 + \dots + \xi_n)$$

határeloszlást vizsgálni. Azonban

$$\max(\max(\sum_{j=1}^k \xi_j, \quad k = 1, \dots, n), 0) \rightarrow \max(0, \sup_{k \geq 1} \sum_{j=1}^k \xi_j) = \sup_{k \geq 0} (\sum_{j=1}^k \xi_j)$$

(Itt a nulla értéket beolvasztottuk úgy, mint a $k = 0$ -nak megfelelő üres tagszámú összeg értékét.)

Ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(W_n < t) = P(\sup_{k \geq 0} \sum_{j=1}^k \xi_j < t)$$

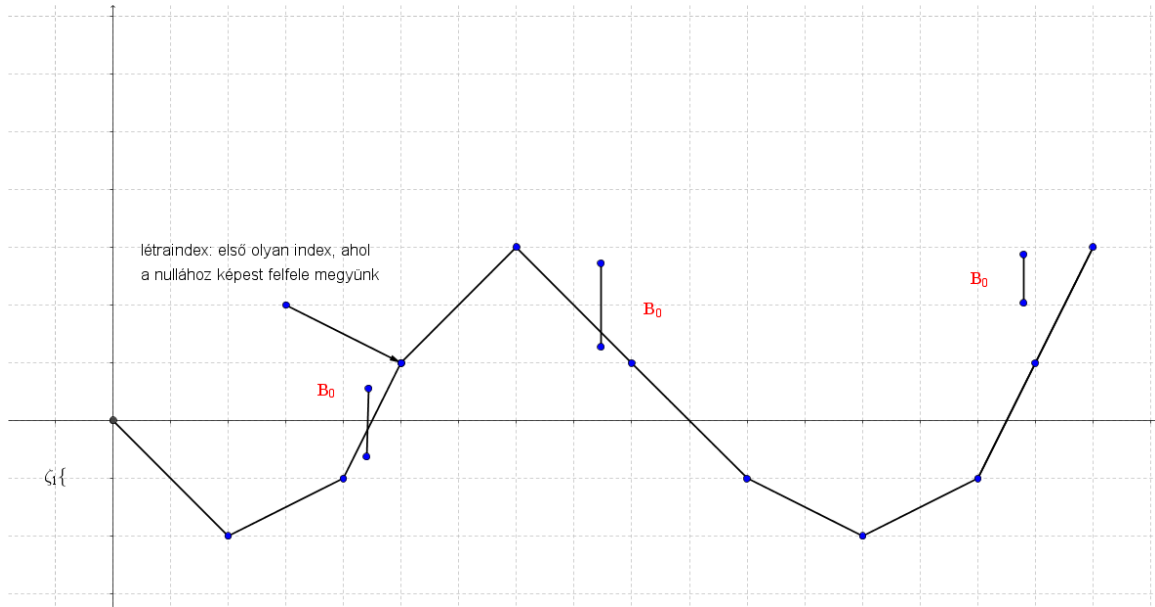
Bevezetve a W jelölést a W_n sorozat határértékére, kapjuk, hogy

$$P(W < t) = P(\sup_{k \geq 0} \sum_{j=1}^k \xi_j < t)$$

Kitérő:

$$\frac{\sum_{j=1}^k \xi_j}{k} \xrightarrow{\text{nagy számok erős törvénye}} \langle \xi_j \rangle$$

$$\langle \xi_1 \rangle = \langle X_1 - \zeta_2 \rangle = b - \frac{1}{\lambda}$$



19. ábra. ?

Ha $\langle \xi_1 \rangle > 0$, akkor $\sum_{j=1}^k \xi_j \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow P(\sup_k \sum_{j=1}^k \xi_j = \infty) = 1 \quad \text{ha } \rho > 1$$

Ha $\langle \xi_1 \rangle = 0$, akkor –Chung-Fuchs-tétel–:

$$P(\limsup_k \sum_{j=1}^k \xi_j = \infty) = 1 = P(\liminf_k \sum_{j=1}^k \xi_j = -\infty) \quad \text{--- feltéve, ha nem azonosan nulla } \xi_j$$

Ekkor:

$$P(\limsup_k \sum_{j=1}^k \xi_j = \infty) = 1 \quad (\lambda b = 1)$$

A stacionárius viselkedéshez az kell, hogy $0 < \lambda b < 1$ feltétel teljesüljön!

Ekkor $\sum_{j=1}^k \xi_j$ egy valószínűséggel $-\infty$ -hez tart. Így $\sup_{k \geq 0} \sum_{j=1}^k \xi_j$ 1 valószínűséggel véges.

Ez eddig nagyszerű, de azt láttuk, hogy a várakozási idő határeloszlása véletlen tagszámú összeg eloszlásával azonosítható, nem részletösszegek maximumának (szuprémumának) eloszlásával. Hogyan lehetne a további azonosítást megtenni?

Ehhez vezessük be az ún. létraindexeket. Mivel a részletösszegek maximuma érdekel minket, ezért elegendő csak olyan pillanatban rátekinteni a részletösszegekre, amikor értéke nagyobb, mint a korábban felvett értékek maximuma. (Amikor tehát tényleg növekszik a részletösszegek sorozata. "Felfelé megyünk, mint egy létrán.")

Legyen $\epsilon_1 = \inf \left\{ k \mid \sum_{j=1}^k \xi_j > 0 \right\}$. Az első növekedési pont. Természetesen elképzelhető, hogy nincsen ilyen érték. Azaz a $\xi_1, \xi_2, \dots$ valószínűségi változók részletösszegei mindig negatívak. Ekkor tehát soha

nincsen várakozás. (W_{n+1} eloszlása megegyezik az első n részletösszeg maximumának eloszlásával. Ha ez utóbbi nem pozitív, akkor W_{n+1} sem lehet pozitív.) De akkor sincsen várakozás, ha a beérkező igény üres rendszert talál, ennek stacionárius valószínűsége ugyanaz, minthogy a távozó igény üres rendszert hagy hátra. Tehát $P(q_n = 0)$ stacionárius esetben.

Mennyi ennek értéke: $P(q_n = 0) = ?$

Vegyük észre, hogy ezt korábban már meghatároztuk: $P(q_n \geq 1) = < U(q_n) > = \rho$. Ezért $P(q_n = 0) = 1 - \rho$. A mostani esetre vonatkoztatva ez tehát azt jelenti, hogy

$$P(\exists \text{ véges értékű első } \underbrace{\text{létraindex}}_{\epsilon = \inf(k: \sum_{j=1}^k \xi_j > 0)}) = \rho \rightarrow P(\epsilon_1 < \infty) = \rho$$

Hasonlóan, legyen $\epsilon_2 = \inf \left\{ k > \epsilon_1 \mid \sum_{j=1}^k \xi_j > \sum_{j=1}^{\epsilon_1} \xi_j \right\}$. Az előző tényleges növekedéshez képest most növekedett újra. Stb.

$$P(\exists \text{ véges értékű második } \underbrace{\text{létraindex}}_{\epsilon_2 = \inf(k > \epsilon_1 \mid \sum_{j=1}^k \xi_j > \sum_{j=1}^{\epsilon_1} \xi_j)}) = \rho^2 \rightarrow P(\epsilon_2 < \infty) = \rho^2$$

$$P(\exists l. \text{létraindex}) = \rho^l$$

$$W_s^* = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \rho) \rho^k B_0^{*k}(s)$$

B_0 azonosítása mint a létrafokok távolsága – bizonyítás (heurisztika) nélkül:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\epsilon_1} \xi_j & \text{ eloszlásfüggvénye éppen } B_0, \text{ feltéve, hogy } \epsilon_1 \text{ véges} \\ \sum_{j=1}^{\epsilon_2} \xi_j - \sum_{j=1}^{\epsilon_1} \xi_j & \text{ eloszlásfüggvénye éppen } B_0, \text{ feltéve, hogy } \epsilon_2 \text{ véges} \\ & \dots \\ \sum_{j=1}^{\epsilon_l} \xi_j - \sum_{j=1}^{\epsilon_{l-1}} \xi_j & \text{ eloszlásfüggvénye éppen } B_0, \text{ feltéve, hogy } \epsilon_l \text{ véges} \end{aligned}$$

Megjegyzés – kicsit másképpen az M/G/1 rendszer elemzése:

–M/G/1:

Távozás idejében hátrahagyott igények száma: $q_n \rightarrow$ beágyazott Markov-láncot alkot!

Stacionárius esetben:

$$\Pi_k = P(q_n = k)$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$r_j = P(\kappa_{n+1} = j).$$

Ekkor

$$P(q_{n+1} = k) = \sum_{l=0}^{\infty} P(q_{n+1} = k | q_n = l) P(q_n = l)$$

Szükségünk van a fenti összegben a feltételes valószínűségek értékére:

ha $l = 0$, azaz az n . igény üres rendszert hagyott hátra, akkor az $(n + 1)$. igény akkor fog k igényt hátrahagyni, ha a kiszolgálási ideje alatt éppen ennyi érkezik be. Azaz

$$P(q_{n+1} = k | q_n = 0) = P(\kappa_{n+1} = k) = r_k, \quad k \geq 0$$

Ha $l \geq 1$, akkor a következő igény akkor hagy hátra pontosan k igény, ha kiszolgálási ideje alatt $k - l + 1$ igény érkezett be. Azaz, ekkor

$$P(q_{n+1} = k | q_n = l) = P(\kappa_{n+1} = k - l + 1) = r_{k-l+1}, \quad \text{ha } l \geq 1, k \geq l - 1.$$

Így

$$\Pi_0 = \Pi_0 r_0 + \Pi_1 r_0$$

$$\Pi_1 = \Pi_0 r_1 + \Pi_1 r_1 + \Pi_2 r_0$$

$$\Pi_2 = \Pi_0 r_2 + \Pi_1 r_2 + \Pi_2 r_1 + \Pi_3 r_0$$

Általános formula:

$$\Pi_j = \Pi_0 r_j + \Pi_1 r_j + \Pi_2 r_{j-1} + \Pi_3 r_{j-2} + \dots + \Pi_{j+1} r_0$$

Mátrix alakban:

$$[\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \dots] \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & \cdots & r_j & \cdots \\ r_0 & r_1 & r_2 & \cdots & r_j & \cdots \\ & r_0 & r_1 & \cdots & r_{j-1} & \cdots \\ & & r_0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & & r_0 & \cdots \end{bmatrix} = [\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \dots]$$

A j . egyenletet z^j -nel szorozva és összegezve ismét az eloszlás generátorfüggvényére kapunk összefüggést:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} z^j (\Pi_0 r_j + \sum_{l=1}^{j+1} \Pi_l r_{j+1-l}) = \Pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} r_j z^j + \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_l z^l r_{j+1-l} z^{j+1-l}$$

Generátor-függvényes módszer:

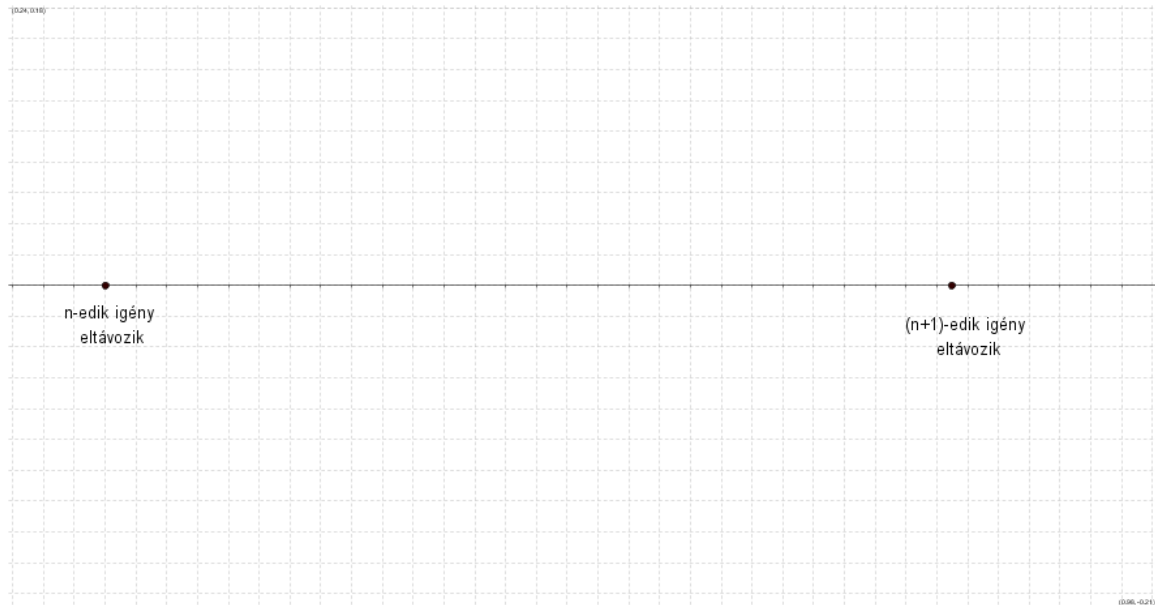
$$Q(z) = \Pi_0 \Phi(z) + \frac{1}{z} \dots$$

Ugyanazt az egyenletet kapjuk, mint korábban. Ezért ezt már nem részletezzük.

11. 11. előadás - 2013.04.30.

A mai órán tovább folytatjuk az M/G/1 rendszerek elemzését.

Először a távozó igények folyamatát vizsgáljuk. Megjegyzés: távozók folyamata (M/M/1 esetén Poisson-folyamat, azaz az egyes távozások közötti időtartamok λ -exp, amint azt korábban már láttuk.)



20. ábra. ?

1; a hátrahagyott rendszer nem üres: ekkor a kiszolgálási idő eloszlása határozza meg, hogy mikor lesz a következő távozás

2; A hátrahagyott rendszer üres: beérkezés + kiszolgálás határozza meg, hogy mennyi idő múlva fog az igény távozni.

$$1; q_n \geq 1 \rightarrow \text{marad hátra igény } P(q_n \geq 1) = \lambda b = \rho$$

$$2; q_n = 0 \rightarrow \text{nem marad hátra igény } P(q_n = 0) = 1 - \rho$$

Mivel X jelöli a kiszolgálási időt, ζ pedig az egyes beérkezés közötti időt, amely az M/G/1 rendszer esetén λ -paraméterű exponenciális eloszlású, ezért Távozások közti idő: $P(\text{távozások közti idő} < t) = \rho P(X < t) + (1 - \rho)P(\zeta + X < t)$ Az általános esetben ez nem feltétlen exponenciális eloszlású.

Határozzuk meg a távozások közötti átlagos időköz értékét:

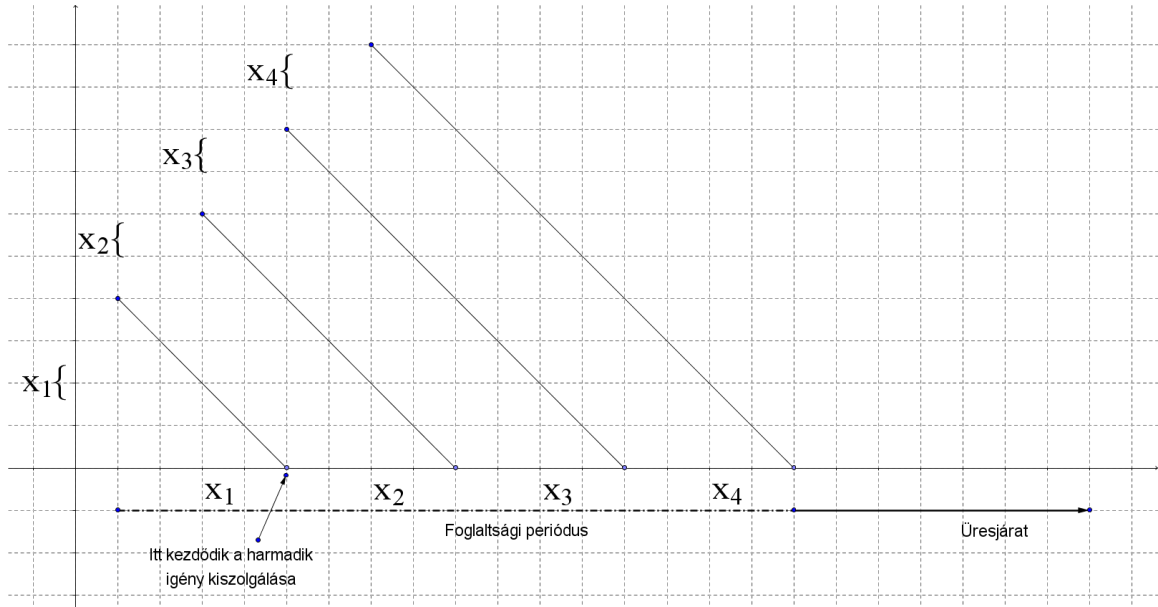
$$\rho b + (1 - \rho)\left(\frac{1}{\lambda} + b\right) = \lambda b^2 + (1 - \lambda b)\left(\frac{1}{\lambda} + b\right) = \lambda b^2 + \frac{1}{\lambda} - b + b - \lambda b^2 = \frac{1}{\lambda}$$

Ez ugyanaz, mint a λ -exp várható értéke. Tehát az általános M/G/1 rendszer esetén is átlagosan ugyanolyan időközönként távoznak az igények, mint az M/M/1 rendszer esetén, és ez megegyezik a beérkezések közötti átlagos időtartammal.

Foglaltsági periódus:

Jelölés: Y (teljes foglaltsági periódus)

Tegyük fel, hogy a rendszer a kezdeti pillanatban üres. A foglaltsági periódus akkor kezdődik, amikor az első igény bejön. Akkor ér véget, amikor mindenkit, aki más, korábban érkezett kiszolgálási ideje alatt



21. ábra. Folyamat mikroszintje

érkezett, kiszolgáltak. A foglaltsági periódus alatt a kiszolgálás folyamatos. Tehát a foglaltsági periódus hossza valahány kiszolgálási időtartam összege. Takács Lajos ötlete alapján ugyanezeket a kiszolgálási időket vehetjük más sorrendben is, ha a kiszolgálás folyamatos, akkor az összeg ugyanaz marad. (Az összeadás kommutatív.)

Tekintsük azt a protokollt, melyben aki utoljára érkezett, az kerül sorra először. Sorrakerülés esetén a teljes kiszolgálás megvalósul.

Az első igény kiszolgálási ideje alatt κ_1 igény érkezik be. Az új protokoll szerint, amikor az első igény kiszolgálása befejeződik, akkor az utolsónak érkezettet, tehát a κ_1 -dik igényt veszik sorra. A szemléletesség kedvéért képzeljük el, hogy a többi $\kappa_1 - 1$ igényt elviszik egy másik váróterembe. Tehát egyetlen igény marad csak az eredeti rendszerben. Ennek éppen megkezdődik a kiszolgálása. Mikor fog a $(\kappa_1 - 1)$. igény sorrakerülni? Ha mindenkit, aki később érkezett, azt kiszolgálták. Azaz, ha az eredeti váróteremben már nem lesz senki. Másképpen fogalmazva, kiürül az eredeti rendszer. De ez éppen egy foglaltsági periódust jelent. Úgy hívjuk, hogy a (κ_1) . igény által "generált" foglaltsági periódus. Jelölje ezt $Y^{(\kappa_1)}$

Ha most behívják a $(\kappa_1 - 1)$. igényt, akkor már csak $\kappa_1 - 2$ igény van a speciális váróban. Mikor hívják be onnan a következőt? Ha megint nincs már kit kiszolgálni az eredeti rendszerben. Ez egy újabb foglaltsági periódus. Melyet a $(\kappa_1 - 1)$. igény generált. Jelölje ezt $Y^{(\kappa_1 - 1)}$. Stb.

Így tehát:

$$Y = X_1 + \sum_{j=1}^{\kappa_1} Y^{(j)}$$

$-X_1$ az első igény kiszolgálási ideje: az ezalatt beérkezett igények száma: κ_1
 $-Y^{(\kappa_1)}$: az utolsó igény által generált foglaltsági periódus, stb.

$Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots$: független azonos eloszlású valószínűségi változók, eloszlásuk megegyezik az Y eloszlásával.

X_1, κ_1 független az $Y^{(j)}$ -októl, de egymástól nem függetlenek!

Nono, valami nem stimmel: $X_1 \geq 0, Y^{(1)} \geq 0 \Rightarrow Y \geq X_1, Y \geq X_1 + Y^{(1)}$? Ekkor nem lehetne Y és $Y^{(1)}$ azonos eloszlású. Azonban az utóbbi egyenlőtlenség nem feltétlen igaz, mert κ_1 lehet nulla értékű is. Ekkor nincsen "extra" beágyazott foglaltsági periódus, azaz nem jön létre az $Y^{(1)}$ valószínűségi változó.

Vezessük be az Y eloszlásfüggvényére az F_Y jelölést!

$$\begin{aligned}
Y^*(s) &= \int_0^\infty e^{-sy} dF_Y(y) = \langle e^{-sY} \rangle = \langle e^{-s(X_1 + \sum_{j=1}^{\kappa_1} Y^{(j)})} \rangle = \\
&= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty \langle e^{-s(t + \sum_{j=1}^k Y^{(j)})} | \kappa_1 = k, X_1 = t \rangle \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB(t) = \\
&= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty e^{-st} \langle e^{-s(\sum_{j=1}^k Y^{(j)})} \rangle \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB(t) = \\
&= \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty e^{-st} Y^*(s)^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dB(t) = \\
&= \int_0^\infty e^{-st} e^{-\lambda t} e^{Y^*(s)\lambda t} dB(t) = \int_0^\infty e^{-(s+\lambda-Y^*(s)\lambda)t} dB(t)
\end{aligned}$$

ahol először is feltételes várható értéket képeztünk X_1 és κ_1 értéke szerint, kihasználva, hogy rögzített $X_1 = t$ kiszolgálási idő alatt κ_1 éppen λt -paraméterű Poisson-eloszlású. Röviden tehát:

$$Y^*(s) = B^*(s + \lambda - \lambda Y^*(s))$$

Használható ez valamire? Speciális eset: M/M/1 rendszer

Feltesszük, hogy X μ -paraméterű exponenciális eloszlású

$$B^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} \mu e^{-\mu t} dt = \mu \int_0^\infty e^{-(s+\mu)t} dt = \mu \left[-\frac{e^{-(s+\mu)t}}{s+\mu} \right]_0^\infty = \frac{\mu}{s+\mu}$$

ekkor:

$$\begin{aligned}
Y^*(s) &= \frac{\mu}{s + \lambda - \lambda Y^*(s) + \mu} \\
-\lambda Y^*(s)^2 + (s + \lambda + \mu)Y^*(s) - \mu &= 0 \quad / \cdot -1 \\
\lambda Y^*(s)^2 - (s + \lambda + \mu)Y^*(s) + \mu &= 0
\end{aligned}$$

$$Y^*(s)_{1,2} = \frac{(s + \lambda + \mu) \pm \sqrt{(s + \lambda + \mu)^2 - 4\lambda\mu}}{2\lambda}$$

A pluszos egyenlet fogja megadni az $Y^*(s)$ -t. Azonban expliciten invertálni a Laplace-transzformáltat már korábban sem tudtuk. Ugyanez az egyenlet adódott az M/M/1 rendszer tranziens viselkedésének elemzése során.

A teljes eloszlás csak numerikusan közelíthető. (lásd pár órával korábbról)

Akkor mire lehet használni a fenti formulát, ha a legegyszerűbb esetben sem vezet el az eloszláshoz?
Momentumok meghatározása:

$$\frac{d}{ds} \langle e^{-sY} \rangle = \langle -Y e^{-sY} \rangle$$

Ezért

$$\frac{d}{ds} \langle e^{-sY} \rangle \big|_{s=0} = \langle Y \rangle \quad (\text{deriválással megkapható a várható érték})$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \langle e^{-sY} \rangle = \langle Y^2 e^{-sY} \rangle$$

$$\frac{d^2}{ds^2} \langle e^{-sY} \rangle \big|_{s=0} = \langle Y^2 \rangle \quad (\text{második momentum})$$

Alkalmazzuk ezt a korábban megkapott formula esetében:

$$\frac{d}{ds} Y^*(s) = (Y^*(s))' = \frac{d}{ds} B^*(s + \lambda - \lambda Y^*(s)) = (B^*)'(s + \lambda - \lambda Y^*(s))(1 - \lambda Y^*(s)')$$

$$\langle Y \rangle = -(Y^{*'}(0)) = -B^{*'}(\lambda - \lambda \cdot 1)(1 - \lambda Y^{*'}(0)) = \langle X \rangle (1 + \lambda \langle Y \rangle)$$

$$\langle Y \rangle = \frac{b}{1 - \lambda b} = \frac{b}{1 - \rho}$$

Speciális eset $M/M/1$ -re:

$$b = \frac{1}{\mu} \rightarrow \langle Y \rangle = \frac{1/\mu}{1 - \lambda/\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

Emlékeztetnénk arra, hogy ezt korábban még nem határoztuk meg.
 Tekintsük most a második momentumot:

$$Y^{*''}(s) = B^{*''}(s + \lambda - \lambda Y^*(s))(1 - \lambda Y^{*'}(s))^2 + B^{*'}(1 + \lambda - \lambda Y^*(s))(-\lambda Y^{*''}(s))$$

Véve az $s = 0$ felvett helyettesítési értéket – és kihasználva ismét, hogy $Y^*(0) = 1$:

$$\langle Y^2 \rangle = \langle X^2 \rangle (1 + \lambda \langle Y \rangle)^2 + \langle X \rangle \lambda \langle Y^2 \rangle$$

$$\langle Y^2 \rangle = \frac{\langle X^2 \rangle (1 + \frac{\lambda b}{1 - \lambda b})^2}{1 - \lambda b} = \frac{\langle X^2 \rangle}{(1 - \rho)^3}$$

$$D^2(Y) = \langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2 = \frac{\langle X^2 \rangle}{(1 - \rho)^3} - \left(\frac{\langle X \rangle}{1 - \rho} \right)^2 = \frac{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 (1 - \rho)}{(1 - \rho)^3} = \frac{D^2(X) + \rho \langle X \rangle^2}{(1 - \rho)^3}$$

Érdeemes ismét hangsúlyozni, hogy a foglaltsági periódus első momentuma a kiszolgálási idő első momentumától függ, a második momentum az első két momentumtól, és nem pedig a teljes eloszlásától.

$M/M/1$ esetén:

$$\frac{\frac{1}{\mu^2} + \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{\mu^2}}{(1 - \frac{\lambda}{\mu})^3} = \frac{\mu + \lambda}{(\lambda - \mu)^3}$$

Itt felhasználtuk, hogy ha X μ -paraméterű exponenciális eloszlású, akkor négyzetének várható értéke a következőképpen adódik:

$$\int_0^{\infty} x^2 \mu e^{-\mu x} dx = [-x^2 e^{-\mu x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x e^{-\mu x} dx = 0 + \frac{2}{\mu} \int_0^{\infty} x \mu e^{-\mu x} dx = \frac{2}{\mu^2}$$

$$D^2(x) = \frac{2}{\mu^2} - \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 = \frac{1}{\mu^2}$$

12. 12. előadás - 2013. 05.07.

G/M/1 rendszereket vizsgálunk.

- **M**: kiszolgálási idő, μ -paraméterű exponenciális eloszlás
- **G**: beérkezési időközök, független azonos eloszlású valószínűségi változók $(\zeta_1, \zeta_2, \dots)$
- **1**: kiszolgálóegységek száma

A beérkezések időpontjai:

$$\tau_n = \sum_{j=1}^n \zeta_j \quad \zeta_j \geq 0$$

Ezek az úgynevezett Palm-folyamatok, vagy másnéven felújítási folyamatok.

$N(t)$, azaz a t pillanatban lévő igények száma nem Markov folyamat! Kibővítve elérhető lenne a Markovtulajdonság. Ehhez azt is hozzá kellene még venni, hogy mennyi idő van hátra a következő beérkezésig.

Azonban nézzük meg a rendszert a beérkezések időpontjában! (Ekkor a hátralévő beérkezési idő nulla.)

- Q_n : A rendszerben levő igények száma az n -edik igény beérkezésekor.
- $Q_{n+1} = Q_n + 1 - \nu_{n+1}$, ahol ν_{n+1} azt jelenti, hogy hány igényt szolgáltak ki a két igény közt.
- $Q_{n+1} \leq Q_n + 1$

(Ha az n . beérkezés során Q_n igény volt a rendszerben, akkor a beérkezővel együtt $Q_n + 1$ lesz, és ezt csökkenti az a mennyiség, hogy a következő beérkezésig hányan távoznak el a rendszerből.)

Alkalmazzuk ismét a teljes valószínűség tételét:

$$P(Q_{n+1} = j) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Q_{n+1} = j | Q_n = k) \cdot P(Q_n = k) = \sum_{k=j-1}^{\infty} P(Q_{n+1} = j | Q_n = k) \cdot P(Q_n = k)$$

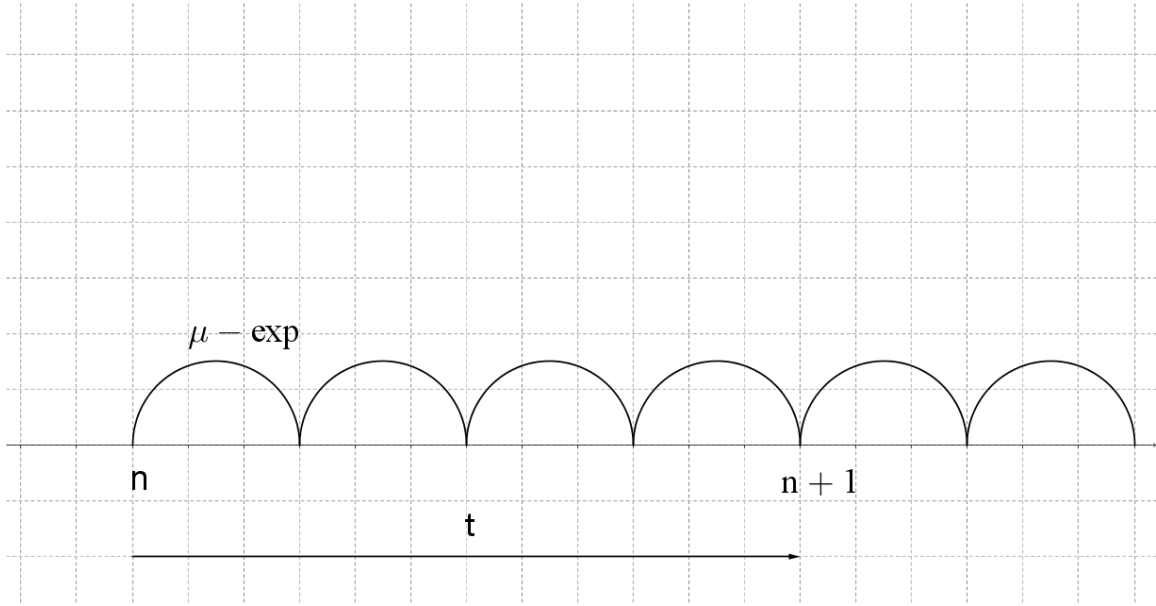
hiszen

$$P(Q_{n+1} = j | Q_n = k) = 0, \text{ ha } k < j - 1$$

- $\nu_{n+1} = Q_n + 1 - Q_{n+1}$
- Tehát, ha $Q_n = k$, $Q_{n+1} = j$ akkor $\nu_{n+1} = k + 1 - j$
- Így $P(Q_{n+1} = j | Q_n = k) = P(\nu_{n+1} = k + 1 - j | Q_n = k)$

Tehát ν_{n+1} feltételes eloszlására lenne szükség.

A rövidség kedvéért legyen $l = k + 1 - j$



22. ábra. ?

1.eset:

– ($j \geq 1$), ekkor a két beérkezés között nem ürült ki a rendszer, tehát folyamatos kiszolgálás van. Ekkor t idő alatt kiszolgált igények száma μt -paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Ezért folyamatos kiszolgálás mellett annak valószínűsége, hogy éppen l igényt szolgálnak ki – jelölje ezt v_l :

$$v_l = \int_0^{\infty} \frac{(\mu t)^l}{l!} e^{-\mu t} dF_{\zeta_{n+1}}(t)$$

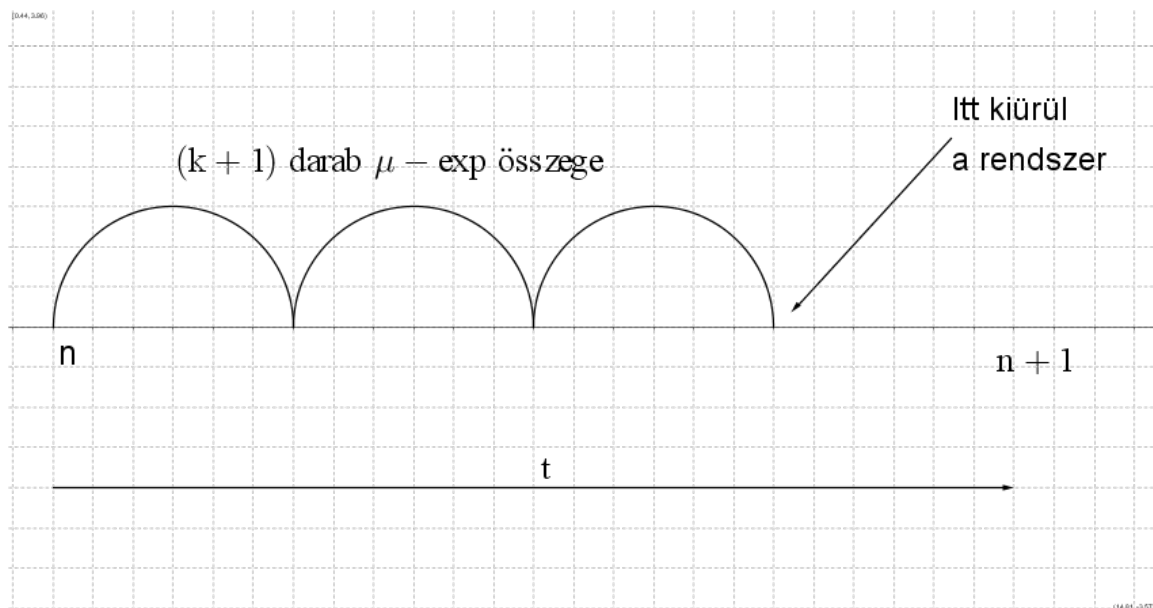
(Mivel a beérkezési időközök azonos eloszlásúak, a fenti integrál értéke nem függ n -től.)

2.eset:

– ($j = 0$), ekkor a két beérkezés között kiürül a rendszer, (az újonnan érkező már üres rendszert talál) .
Legyen

$$\begin{aligned} t_k &= P(\nu_{n+1} = k + 1 | Q_n = k) = \\ &= \int_0^{\infty} P(X_1 + X_2 + \dots + X_{k+1} < t) dF_{\zeta_{n+1}}(t) = \int_0^{\infty} \int_0^t \frac{\mu^{k+1} z^k}{k!} e^{-\mu z} dz dF_{\zeta}(t) \end{aligned}$$

mivel a két beérkezés között eltelt időtartamot ζ_{n+1} jelöli, és $k + 1$ darab egymás utáni kiszolgálási idő összege Gamma-eloszlású valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $\frac{\mu^{k+1} z^k}{k!} e^{-\mu z}$. A $\zeta_{n+1} = t$ feltétel mellett tehát ezt kell integrálni 0 és t között.



23. ábra. ?

Megjegyzés – t_k és $v_0, v_1, \dots$ kapcsolatáról!

$$\begin{aligned} P(X_1 + \dots + X_{k+1} < t) &= 1 - P(X_1 + \dots + X_{k+1} \geq t) = \\ &= 1 - P(X_1 \geq t) - P(X_1 < t \leq X_1 + X_2) - \dots - P(X_1 + \dots + X_k < t \leq X_1 + \dots + X_{k+1}) \end{aligned}$$

Mivel a $P(X_1 + \dots + X_l < t \leq X_1 + X_2 + \dots + X_l + X_{l+1})$ mennyiség éppen annak valószínűségét jelenti, hogy a $[0, t)$ intervallumon pontosan l igény szolgált ki – folyamatos kiszolgálás mellett, hiszen az $(l + 1)$. igény kiszolgálása már túlnyúlik a t időpontra –, ezért

$$P(X_1 + \dots + X_l < t \leq X_1 + X_2 + \dots + X_l + X_{l+1}) = \frac{(\mu t)^l}{l!} e^{-\mu t}; .$$

Integrálva a fenti összefüggés mindkét oldalát ζ közös eloszlásfüggvénye szerint adódik, hogy

$$t_k = 1 - v_0 - v_1 - \dots - v_k$$

Tehát

$$\begin{aligned} P(Q_{n+1} = j) &= \sum_{k=j-1}^{\infty} v_{k+1-j} P(Q_n = k), \text{ ha } j \geq 1 \\ P(Q_{n+1} = 0) &= \sum_{k=0}^{\infty} t_k P(Q_n = k), \text{ ha tehát } j = 0 \end{aligned}$$

Írjuk fel a fenti egyenletrendszert mátrix alakban! Legyen $P_n(k) = P(Q_n = k)$

$$[P_{n+1}(0), P_{n+1}(1), \dots] = [P_n(0), P_n(1), \dots] \begin{bmatrix} t_0 & v_0 & 0 & \cdots & \cdots \\ t_1 & v_1 & v_0 & \cdots & \cdots \\ t_2 & v_2 & v_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

A fenti mátrix az úgynevezett átmeneti-valószínűség mátrix. Elemei a $P(Q_{n+1} = j | Q_n = k)$ mennyiségek. Fontos, hogy $\sum_j P(Q_{n+1} = j | Q_n = k) = 1$! Tehát ebből is adódik, hogy

$$t_0 = 1 - v_0, t_1 = 1 - v_0 - v_1 \text{ és így tovább...}$$

Stacionárius eloszlás esetén $P_{n+1}(k) = P_n(k) \forall k \geq 0$. Vezessünk be egy új jelölést. Legyen $u_k = P_n(k)$ közös (n -től nem függő) érték. Ekkor az egyenletrendszer

$$u_j = \sum_{k=j-1}^{\infty} v_{k+1-j} u_k \quad j \geq 1$$

$$u_0 = \sum_{k=0}^{\infty} t_k u_k$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} u_j = 1$$

Ebben az egyenletrendszerben a $v_0, v_1, \dots$ illetve $t_0, t_1, \dots$ mennyiségek közvetlenül kiszámolhatóak a beérkezési időközök segítségével. Ennek alapján szeretnénk az $u_0, u_1, \dots$ értékeket megkapni. Ezt ötbbsféleképpen is el lehet érni. Jelen szakaszban a Markov-láncok általános elméletének néhány fogalma, állítása segítségével, a következő szakaszban komplex függvénytan eszközök felhasználásával.

Használjuk tehát most a Markov-láncok elméletének néhány alapfogalmát, állítását. Azt a Markov-láncot tekintjük tehát, amelynek átmenetvalószínűségmátrixa a fenti. A mátrix i -dik sor j -dik eleme adja meg, hogy egy lépés során milyen valószínűséggel megy át a rendszer az i állapotból a j állapotba.

mivel $v_l > 0, t_k > 0$, tehát bármely állapotból előbb-utóbb pozitív valószínűséggel át tudunk jutni bármelyik másik állapotba: azaz egyetlen osztály van. Így legfeljebb egy stacionárius megoldás létezik!

A stacionárius eloszlásban szereplő u_k valószínűség megkapható úgyis, hogy megnézzük, hogy átlagosan hány lépésként kerül a k állapotba és vesszük ennek a reciprokát.

Továbbá, az u_j/u_k hányados is értelmezhető az egyes állapotokba való visszatérési gyakoriságokkal. Nevezetesen, ha megnézzük, hogy a k állapotba való első visszatérés előtt átlagosan hányszor látogatja meg a j állapotot, akkor éppen az u_j/u_k értékét kapjuk.

Tegyük fel tehát, hogy a k állapotban van a rendszer. $j = k + 1$ esetére akarjuk az u_{k+1}/u_k hányadost meghatározni.

Azaz feltesszük, hogy most a k állapotban van, és nézzük, hogy a következő olyan időpontig, amikor ismét a k állapotban lesz, átlagosan hányszor volt a $k + 1$ állapotban?

Tekintsünk különböző eseteket:

– Nullasor, ha az első lépés nem felfele történik, mivel felfele csak egyesével mehet ez a Markov-lánc, hiszen $Q_{n+1} \leq Q_n + 1$, tehát ha lefele, vagy vízszintesen kezdett, akkor nem ugorhatja át a k állapotot, hogy előbb elérje a $k + 1$ állapotot, mint k -t. Ennek valószínűsége: $(1 - v_0)$, mivel v_0 annak valószínűsége, hogy egyetlen kiszolgálás sem fejeződik be a két beérkezés között, tehát pontosan eggyel több igényt talál az újonnan érkező.

– Ha $j \geq 1$ j -szer megyünk el a $k + 1$ -be, mielőtt ismét visszatérnénk a k állapotba:

Megmutatjuk, hogy ennek $v_0 \eta^{l-1} (1 - \eta)$ a valószínűsége, ahol

$$\eta = P(k+1\text{-ből visszakérülünk } k+1\text{-be, hogy közben a } k\text{-t nem érintettük}).$$

Valóban, az első lépés felfelé történik – amint láttuk – ennek valószínűsége v_0 . Ekkor egyszer már érintettük a $k + 1$ állapotot. Még $j - 1$ -szer ott kell járnunk, mielőtt k -t ismét érintenénk. Ez η^{j-1} . Ezután viszont már előbb kell a k állapotba jutnunk, mielőtt ismét $k + 1$ -be kerülnénk (hiszen pontosan j -szer járunk $k + 1$ -ben). Ez egy $1 - \eta$ tényezőt ad. Összesítve tehát valóban $v_0 \eta^j (1 - \eta)$.

Átlagosan tehát

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = 0 \cdot (1 - v_0) + \sum_{j=1}^{\infty} j v_0 \eta^{j-1} (1 - \eta) = v_0 \left(\sum_{j=0}^{\infty} j \eta^{j-1} (1 - \eta) \right) = \frac{v_0}{1 - \eta}$$

Ezért

$$u_{k+1} = u_k \frac{v_0}{1 - \eta} = u_{k-1} \left(\frac{v_0}{1 - \eta} \right)^2 = \dots = u_0 \left(\frac{v_0}{1 - \eta} \right)^{k+1}$$

Kell még, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} u_k = 1$. Azaz $u_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{v_0}{1 - \eta} \right)^k = 1$. Ennek akkor van megoldása, ha $\frac{v_0}{1 - \eta} < 1$. Ekkor $u_0 = 1 - \frac{v_0}{1 - \eta}$,

$$u_k = \left(1 - \frac{v_0}{1 - \eta} \right) \left(\frac{v_0}{1 - \eta} \right)^k.$$

Hogyan lehet az $\frac{v_0}{1 - \eta}$ értékét meghatározni?

A megoldandó egyenlet:

$$u_j = \sum_{k=j-1}^{\infty} v_{k+1-j} u_k, \quad j \geq 1.$$

Kifejezve u_j értékét u_0 segítségével:

$$u_0 \left(\frac{v_0}{1 - \eta} \right)^j = \sum_{k=j-1}^{\infty} v_{k+1-j} u_0 \left(\frac{v_0}{1 - \eta} \right)^k$$

$$\frac{v_0}{1 - \eta} = \sum_{k=j-1}^{\infty} v_{k+1-j} \left(\frac{v_0}{1 - \eta} \right)^{k-j+1} = \sum_{l=0}^{\infty} v_l \left(\frac{v_0}{1 - \eta} \right)^l$$

Az utolsó kifejezés a $v_0, v_1, \dots$ sorozat generátorfüggvénye!

Legyen tehát

$$V(z) = \sum_l v_l z^l$$

Az adódó megoldandó egyenlet:

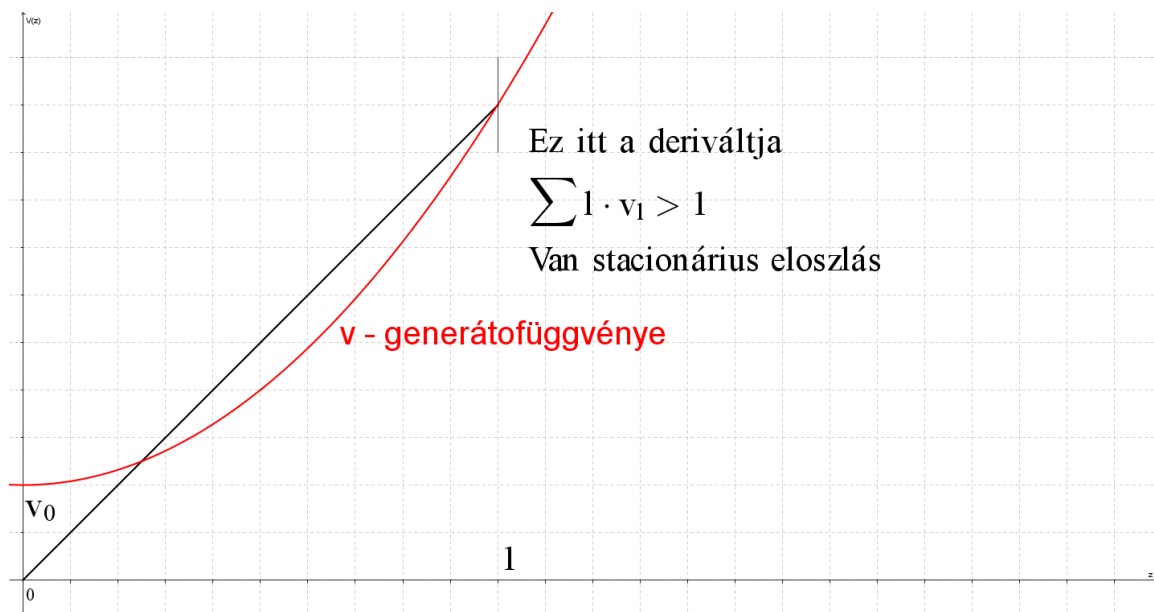
$z = V(z)$, melynek a gyöke érdekel minket.

$V(1) = 1$ nem jó, mert tudjuk, hogy $\frac{v_0}{1 - \eta} < 1$, tehát az egynél kisebb gyök érdekel minket.

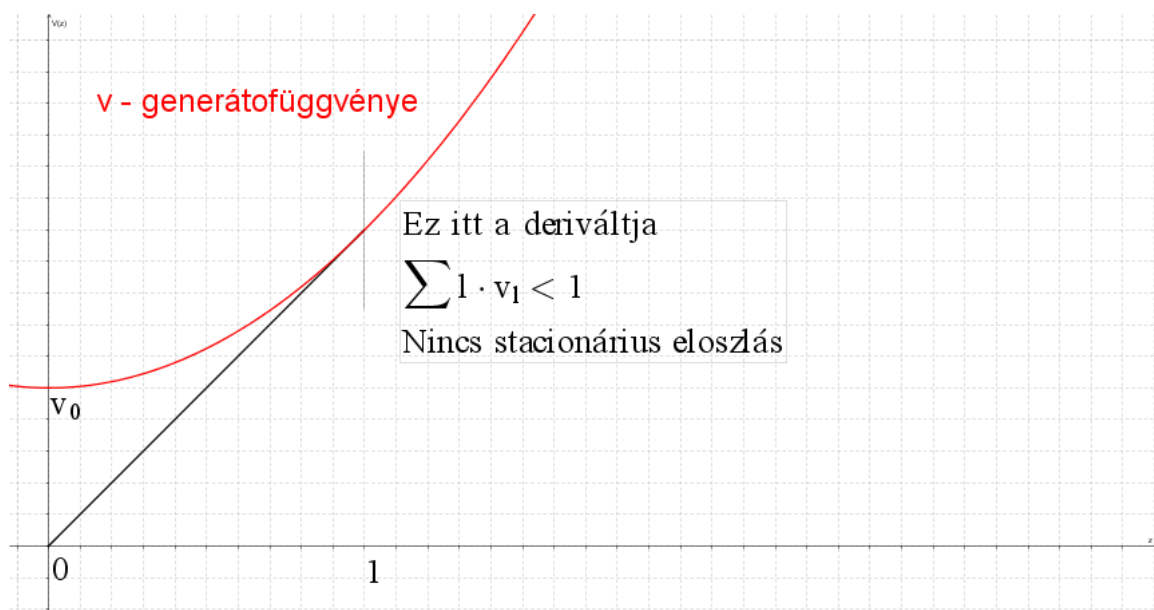
Tudjuk, hogy $v_j > 0$, bármely $j \geq 0$ esetén. A $j = 0$ -ra használva kapjuk, hogy $V(0) \geq 0$, továbbá adódik, hogy V szigorúan monoton növekvő, szigorúan konvex függvény a $0 \leq z \leq 1$ halmazon. Legyen σ a $z = V(z)$ egyenlet gyöke $0 < \sigma < 1$ esetre. (Ha létezik ilyen.)

Ekkor $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \sigma \rightarrow u_k = u_0 \sigma^k$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = 1; \quad \sum_{k=0}^{\infty} u_0 \sigma^k = 1 \rightarrow u_0 = 1 - \sigma$$



24. ábra. ?



25. ábra. ?

$u_k = (1 - \sigma)\sigma^k, k \geq 0$ Ahogy az ábrából látszik, ehhez arra van szükség, hogy a V függvény 1 helyen vett deriváltja nagyobb legyen, mint egy. Másképpen $V'(1) = \sum_{j=0}^{\infty} j v_j > 1$. Mivel v_j annak valószínűségét adja meg, hogy folyamatos kiszolgálás mellett két beérkezés között éppen j igényt szolgálnak ki, ezért a $\sum_{l=0}^{\infty} l v_l$ szorzatösszeg azt jelenti, hogy folyamatos kiszolgálás esetén mennyi lenne két beérkezés között az átlagosan kiszolgált igények száma.

A σ mennyiség segítségével meghatározhatjuk a rendszer többi, alapvető jellemzőjét.

Rendszeridő:

Ha a beérkező igény k igényt talál, akkor $k+1$ darab független μ -exp összege, ami gamma eloszlású valószínűségi változó. ($\Gamma_{k+1}(\mu)$)

Sűrűségfüggvény:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1-\sigma) \sigma^k \frac{\mu^{k+1} z^k}{k!} e^{-\mu z} = e^{-\mu z} (1-\sigma) \mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sigma \mu z)^k}{k!} = (1-\sigma) \mu e^{-\mu(1-\sigma)z}$$

A fenti eloszlás egy $(1-\sigma)\mu$ -paraméterű exponenciális eloszlás.

Átlagos rendszeridő: Ennek várható értéke, azaz

$$\frac{1}{(1-\sigma)\mu}$$

Átlagos várakozási idő:

Ha a beérkező igény k igényt talál, akkor az átlagos várakozási ideje: k/μ

Ezért a feltétel nélküli átlagos várakozási idő:

$$\sum_k (1-\sigma) \sigma^k \frac{k}{\mu} = \frac{1}{(1-\sigma)\mu} - \frac{1}{\mu} = \frac{\sigma}{(1-\sigma)\mu}$$

Zárójelben jegyezzük meg, hogy az M/M/1 rendszer esetére σ értéke éppen $\frac{\lambda}{\mu}$, azaz a szokásos jelöléssel ρ . Mivel ezt részletesen nem számoljuk most ki, ezért választottunk más jelölést.

13. 13. előadás - 2013.05.14.

G/M/1 rendszerek tárgyalása. – Kicsit másképpen.

Láttuk, hogy beérkezésekkor az igények száma: $Q_{n+1} = Q_n + 1 - \nu_{n+1}$. Így tehát $Q_{n+1} \leq Q_n + 1$

Minket ennek a stacionárius megoldása érdekel. Ekkor – ahogy láttuk – az alábbi egyenletek teljesülnek:

$$P(Q_{n+1} = j) = \sum_{k=j-1}^{\infty} P(Q_{n+1} = j | Q_n = k) P(Q_n = k) \quad j \geq 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(Q_{n+1} = 0 | Q_n = k) P(Q_n = k) \quad j = 0$$

$$u_j = \sum_{k=j-1}^{\infty} v_{k+1-j} u_k \quad j \geq 1$$

$$u_0 = \sum_{k=0}^{\infty} t_k u_k \quad t_k = 1 - v_0 - v_1 - \dots - v_k$$

Vegyük észre, hogy az utolsó összefüggésből következik, hogy $u_0 > 0$, hiszen $u_0 = 0$ esetén az $t_k > 0$, $k \geq 0$ és $u_k \geq 0$ miatt $u_k = 0, k \geq 0$ adódna.

Generátorfüggvényes módszert szeretnénk használni, de a $v_{k+1-j} u_k$ szorzatokban az indexek különbsége marad állandó, midőn k változik.

Ezért legyen

$$U(z) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j z^{-j} \quad |z| \geq 1\text{-n konvergens}$$

A fenti kifejezés Laurent-sor és nem hatványsor!

$$V(z) = \sum_{l=0}^{\infty} v_l z^l \quad |z| \leq 1\text{-n konvergens}$$

Ez már valódi hatványsor!

$$\begin{aligned} U(z)V(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j z^{-j} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} v_l z^l = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} z^{-j} \underbrace{\left(\sum_{k=j}^{\infty} u_k v_{k-j} \right)}_{u_{j+1}} + \sum_{j=0}^{\infty} z^j \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_{k+j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} z^{-j} u_{j+1} + \sum_{j=0}^{\infty} z^j \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k v_{k+j} \right) \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a második összegben

$$j = 0 \quad \sum_{k=0}^{\infty} u_k v_k = u_1$$

ezért beolvasztható az első összegbe.

$$U(z)V(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j} u_{j+1} + \sum_{j=1}^{\infty} z^j \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k v_{k+j} \right)$$

Szorozzunk végig z^{-1} -gyel!

$$z^{-1}(U(z)V(z)) = U(z) - u_0 + \sum_{j=1}^{\infty} z^{j-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k v_{k+j} \right)$$

$$U(z) \left(\frac{V(z)}{z} - 1 \right) = -u_0 + \sum_{j=1}^{\infty} z^{j-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k v_{k+j} \right) \quad |z| \leq 1\text{-re konvergens}$$

Ugyanis az egyenlet jobb oldalán lévő végtelen összeg a $z = 1$ helyen éppen:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_k v_{k+j} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \sum_{j=1}^{\infty} v_{k+j} \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} v_j \right) = 1 - v_0 < 1$$

Tehát

$$U(z) \frac{V(z) - z}{z} \quad \text{véges értékű } |z| \leq 1\text{-n}$$

Itt azonban $V(z) - z$ szintén véges értékű. (Pontosabban mint z szerint komplex változós függvény analitikus.) A nevező eltűnik a $z = 0$ helyen. Mivel $V(z) - z$ értéke itt éppen $v_0 \neq 0$, ezért ezt csak az $U(z)$ függvény tudja "kompenzálni". Azaz kell, hogy $U(0) = 0$ teljesüljön. Mivel $u_0 \neq 0$ azaz a jobboldal a $z = 0$ helyen nem nulla, ezért a nulla egyszeres gyöke lehet csak az U függvénynek. z -t kiemelve írhatjuk, hogy $U(z) = z?$

Mi lehet aza a "?" ?

Az U függvény az egységkörön kívül lesz biztosan véges értékű, az egységkörön belül esetleg egyes pontokban "végtelen". (Pontosabban fogalmazva: pólusa van.) De ezt akkor a $V(z) - z$ egységkörön belüli nullhelyei kell, hogy "semlegesítsék".

$V(z) - z$ gyökei az egységkörön, pontosabban $|z| \leq 1$ -ben hol vannak?

Alkalmazzuk ismét a Rouché-tételt!

Tegyük fel, hogy g és f analitikus T belsejében és folytonos T lezártján. Ha

$$|f(z)| < |g(z)| \quad \forall z \in \Gamma \text{ ez } T \text{ pereme.}$$

akkor $f + g$ és g gyökeinek darabszáma T -ben megegyezik.

$$V(z) - z = 0 \quad |V(z)| < |z| \quad |z| = 1 \quad \text{kellene}$$

De sajnos $z = 1$ hely miatt így nem alkalmazható a Rouché-tétel! $V(1) = 1$.

Vegyünk egy kicsit kisebb $r < 1$ sugarú kört!

Kellene, hogy

$$|v(z)| < r \text{ ha } |z| = r$$

Tekintsük az alábbi egyenlőtlenségeket:

$$|V(z)| = \left| \sum_j v_j z^j \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |v_j z^j| = \sum_{j=0}^{\infty} v_j r^j = v(r)$$

A 25. ábrán (előző előadás) már szemléltetett ábra szerint, ha $V'(1) = \sum_l lv_l > 1$, akkor 1-hez közeli, de annál kisebb r esetén a V függvény a 45 fokos egyenes alatt halad, tehát ekkor $V(r) < r$. Így erre alkalmazható Rouché-tétele. Azaz egyetlen gyöke van a $V(z) - z$ függvénynek ezen r sugarú körön belül. Ezt jelölte éppen σ . tehát az U függvénynek egyetlen pólusa van az egységkörön belül. Ez éppen σ .

Ekkor tehát valamely C konstans mellett

$$U(z) = \frac{z}{z - \sigma} \cdot C, \text{ ahol } \sigma = V(\sigma) \text{ gyöke, } 0 < \sigma < 1$$

Mivel

$$U(1) = 1 \quad \text{ezért} \quad \frac{1}{1 - \sigma} \cdot C = 1$$

Összegezve tehát, ha $V'(1) > 1$, akkor:

$$U(z) = (1 - \sigma) \frac{z}{z - \sigma} = (1 - \sigma) \frac{1}{1 - \sigma/z} = (1 - \sigma) \sum_{j=0}^{\infty} \sigma^j z^{-j}$$

Így

$$u_j = (1 - \sigma) \sigma^j$$

Mi történik, ha $v'(1) \leq 1$?

Itt a múlt órán is látott (26.ábra) eset áll fenn!

Ez az eset is az előzőhöz hasonló gondolatmenettel kezelhető, de ennek részleteibe nem megyünk bele.

Megjegyzés. **Két egymásutáni beérkezés között átlagosan kiszolgált igények száma.**

(Folyamatos kiszolgálást feltételezve ezt meghatároztuk, ennek kell egynél nagyobbak lennie. De a valószínűségben előfordulhat, hogy két beérkezés között kiürül a rendszer, tehát nem lesz folyamatos a kiszolgálás. Most ezt vizsgáljuk meg.)

Emlékezzünk vissza, hogy a ν jelölte a két beérkezés között kiszolgált igények számát. A várható értéke meghatározására ismét a teljes valószínűség tételt alkalmazzuk, a Q_n lehetséges értékei szerint feltételes valószínűségeket véve.

$$\begin{aligned} E(\nu_{n+1}) &= \sum_{j=1}^{\infty} j P(\nu_{n+1} = j) = \sum_{j=1}^{\infty} j \sum_{k=j-1}^{\infty} P(\nu_{n+1} = j \mid Q_n = k) P(Q_n = k) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} j \left(t_{j-1} P(Q_n = j-1) + \sum_{k=j}^{\infty} v_j P(Q_n = k) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} j \left((1 - v_0 - v_1 - \dots - v_{j-1}) (1 - \sigma) \sigma^{j-1} + \sum_{k=j}^{\infty} v_j (1 - \sigma) \sigma^k \right) \end{aligned}$$

Azonban

$$\sum_{k=j}^{\infty} (1 - \sigma) \sigma^k = (1 - \sigma) \frac{\sigma^j}{1 - \sigma} = \sigma^j.$$

Továbbá felbontva az első zárójelet és kihasználva, hogy rögzített j esetén a j -nél kisebb indexű v tagok szerepelnek, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} E(\nu_{n+1}) &= \sum_{j=1}^{\infty} j(1 - \sigma) \sigma^{j-1} - v_0 \sum_{j=1}^{\infty} j(1 - \sigma) \sigma^{j-1} - v_1 \sum_{j=2}^{\infty} j(1 - \sigma) \sigma^{j-1} \\ &\quad - v_2 \sum_{j=3}^{\infty} j(1 - \sigma) \sigma^{j-1} - \dots + \sum_{j=1}^{\infty} j v_j \sigma^j \end{aligned}$$

Ugyanakkor

$$\sum_{j=l}^{\infty} j(1-\sigma)\sigma^{j-1} = (1-\sigma) \left(\sum_{j=l}^{\infty} \sigma^j \right)' = (1-\sigma) \left(\frac{\sigma^l}{1-\sigma} \right)' = \frac{l\sigma^{l-1}(1-\sigma) + \sigma^l}{1-\sigma}.$$

Behelyettesítve az előző képletbe kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} E(\nu_{n+1}) &= \frac{1}{1-\sigma} - v_0 \left(1 + \frac{\sigma}{1-\sigma} \right) - v_1 \left(2\sigma + \frac{\sigma^2}{1-\sigma} \right) \\ &\quad - v_2 \left(3\sigma^2 + \frac{\sigma^3}{1-\sigma} \right) - \cdots + \sum_{j=1}^{\infty} jv_j\sigma^j. \end{aligned}$$

A negatív előjelű tagokban v_j első együtthatója $(j+1)\sigma^j$. Ez összevonható az utolsó, pozitív együtthatós összeg tagjaival. Megmarad belőle $v_j\sigma^j$. A második tagokból kiemelhető $\frac{\sigma}{1-\sigma}$. A megmaradó rész így írható:

$$\begin{aligned} E(\nu_{n+1}) &= \frac{1}{1-\sigma} - \sum_{j=0}^{\infty} v_j\sigma^j - \frac{\sigma}{1-\sigma} \sum_{j=0}^{\infty} v_j\sigma^j \\ &= \frac{1}{1-\sigma} - \sigma - \frac{\sigma^2}{1-\sigma} = 1 \end{aligned}$$

kihasználva a $V(\sigma) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j\sigma^j = \sigma$ összefüggést.

Talán kicsit rövidebben lehet eljutni a végeredményhez, ha a teljes várható érték tételét alkalmazzuk.

$$E(\nu_{n+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} E(\nu_{n+1} \mid Q_n = k) P(Q_n = k).$$

Ha az n . beérkezés k igényt talált, akkor a következő beérkezésig kiszolgált igények száma lehet $k+1$, ennek esélye t_k – ekkor nem folyamatos a kiszolgálás, lehet k ennek esélye v_k , lehet $k-1$, ennek esélye v_{k-1} , stb. Ez utóbbi esetekben a kiszolgálás folyamatos.

Azaz

$$\begin{aligned} E(\nu_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{\infty} ((k+1)t_k + kv_k + (k-1)v_{k-1} + \cdots + v_1 + 0v_0) P(Q_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)(1-v_0-v_1-\cdots-v_k) \\ &\quad + kv_k + (k-1)v_{k-1} + \cdots + v_1 + 0v_0] (1-\sigma)\sigma^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(1-\sigma)\sigma^k - \sum_{k=0}^{\infty} [-v_k - 2v_{k-1} - 3v_{k-2} - \cdots - (k+1)v_0] (1-\sigma)\sigma^k \end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy a második szumma mindegyik elemében szerepel v_0 , $k = 1$ -től szerepel v_1 , stb. adódik, hogy

$$\begin{aligned} E(\nu_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(1-\sigma)\sigma^k - \sum_{j=0}^{\infty} v_j \sum_{k=j}^{\infty} (k+1-j)(1-\sigma)\sigma^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(1-\sigma)\sigma^k - \sum_{j=0}^{\infty} v_j \sigma^j \sum_{k=j}^{\infty} (k+1-j)(1-\sigma)\sigma^{k-j} \end{aligned}$$

A k szerint vett összegek értéke – amint fent láttuk – éppen $\frac{1}{1-\sigma}$. A második tag esetében is, hiszen a $h = k - j$ helyettesítéssel látszik, hogy ott is nullától kell végtelenig összegezni.

Ezért

$$E(\nu_{n+1}) = \frac{1}{1-\sigma} - \sum_{k=0}^{\infty} v_k \sigma^k \frac{1}{1-\sigma} = 1$$

mivel $V(\sigma) = \sigma$.

Hivatkozások

[1] <http://hu.wikipedia.org/wiki/Markov-l%C3%A1nc>