REZGÉSEK ÉS HULLÁMOK 1. Vizsgazh 2014. 01. 07.

Név	Neptun-kód	email-cím	min elf. jegy

Munkaidő 4 óra. Használható: Bronstein, saját órai jegyzet, zsebszámológép.

1. Egy alulcsillapított harmonikus oszcillátor mozgásegyenlete: $\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = f(t)$

Legyen $\Omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 > 0$ és $T = 2\pi/\Omega$! Vezessük be a $q = e^{-\beta T/2}$ paramétert!

A vizsgált rendszerre a következő két **gerjesztő függvény** hat:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad t < 0 \\ 1, & \text{ha} \quad 0 < t < T \\ K, & \text{ha} \quad T < t < 3T/2 \\ 0, & \text{ha} \quad 3T/2 < t \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad t < 0 \\ 1, & \text{ha} \quad 0 < t < T/2 \\ -2K, & \text{ha} \quad T/2 < t < 3T/2 \\ 0, & \text{ha} \quad 3T/2 < t \end{cases}$$

Mindkét esetben az $f(t)$ gerjesztõ függvény megérkezése előtt a rendszer tartósan nyugalomban volt az origóban, a függvény lefutása után, $3T/2$ idő elteltével ismét ebbe az állapotba kerül. Mekkora a K szám értéke? Mennyi a komplex ω síkon a rendszer sajátfrekvenciáját ábrázoló, $\Omega + i\beta$ koordinátájú pont irányszöge? Numerikus végeredményt kérek, 4 tizedes pontossággal! Ábrázoljuk az $f(t)$ és az $u(t)$ függvények menetét mindkét esetben! (*Segítség*: először rajzolj! A megoldás során NEM KELL integrálni!)

2. Számítsuk ki a következő, $2T = 4\pi/\Omega$ (!!!!) szerint **periodikus** $f(t)$ függvény (ábrázoljuk!) **Fourier-együtthatóit**!

$$f(t) = \begin{cases} -\sin\Omega t, & ha \quad t \in [0, T/2] \quad vagy \quad t \in [3T/2, 2T] \\ \sin\Omega t, & ha \quad t \in [T/2, 3T/2] \end{cases}$$

3. Számítsuk ki a következő **nem periodikus** $f(t)$ függvény $F(\omega)$ **Fourier-transzformáltját**! Ábrázoljuk az $f(t)$ függvényt, valamint az $F(\omega)$ Fourier-transzformált valós és képzetes részét! Ügyeljünk az $\omega \approx 0$ tartományra!

$$f(t) = \begin{cases} 2e^{2\beta t}, & ha \quad t < 0 \\ -e^{-\beta t}, & ha \quad t \geq 0 \end{cases}$$

4. Keressük meg a következő inhomogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet **kauzális Green-függvényét**: $\dot{u}(t) + a\,u(t) = f(t)$! A képletben a rögzített valós, pozitív paraméter, $u(t)$ a keresett függvény, $f(t)$ a tetszőleges gerjesztő függvény. Próbálkozzunk fizikai megfontolásokkal, és építsünk a Dirac-delta tulajdonságaira! (Vigyázat: a keresett Green-függvény nem feltétlenül folytonos!) A Green-függvény ismeretében oldjuk meg az egyenletet, ha $f(t)$ négyszög-impulzus!

5. Egy **lineáris rendszer** differenciálegyenlete:

$$\frac{d^4u(t)}{dt^4} + 5\,\Omega^2 \frac{d^2u(t)}{dt^2} + 4\,\Omega^4 u(t) = 0$$

A képletben Ω egy frekvencia-dimenziójú paraméter. A $t = 0$ kezdőpillanatban $u(0) = 3$, a függvény első három deriváltjának értéke pedig 0. Adjuk meg az $u(t)$ függvényt! (*Segítség*: vezessük be a $\lambda = \omega^2 / \Omega^2$ paramétert, majd emlékezzünk vissza korábbi zh-élményeinkre!)