

REZGÉSEK ÉS HULLÁMOK 1.

Vizsgázó 2007. 01. 10.

Munkaidő 4 óra. Használható: Bronstein, órai jegyzet.

1. Egy csillapított harmonikus oszcillátor mozgásegyenlete: $\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = f(t)$

$$\text{Legyen } \Omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 > 0; \quad T = 2\pi/\Omega; \quad q = e^{-\beta T/2}; \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < 0 \\ 1 & \text{ha } 0 < t < T \\ -K^2 & \text{ha } T < t < 2T \\ 0 & \text{ha } 2T < t \end{cases}$$

Az $f(t)$ gerjesztő függvény megérkezése előtt a rendszer tartósan nyugalomban volt az origóban, a függvény lefutása után, $2T$ idő elteltével ismét ebbe az állapotba kerül.

Mekkorára kell választani a K állandó értékét, hogy a fent leírt mozgás jöjjön létre? Ábrázoljuk az $f(t)$ és az $u(t)$ függvények menetét! Mennyi az $u(t)$ függvény maximális és minimális értéke hányadosának abszolút értéke? (Tanács: a lehető legkevesebbet – esetleg semennyit se – integráljunk, gátlátalanul használjuk fel az előadáson elhangzottakat és a levezetett eredményeket! Varázsigé: mértani sorozat. Varázsbetű: q .)

2. Számítsuk ki a következő periodikus $f(t)$ függvény Fourier-együtthatóit:

$$f(t) = \begin{cases} \sin 2\Omega t, & \text{ha } 0 < t < T/2 \\ 0, & \text{ha } T/2 < t < T \end{cases} \quad \text{ahol } T = 2\pi/\Omega !$$

3. Számítsuk ki a következő nem periodikus $f(t)$ függvény $F(\omega)$ Fourier-transzformáltját:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ \sin \Omega t, & \text{ha } 0 < t < T \\ 0, & \text{ha } T < t \end{cases} \quad \text{ahol } T = 2\pi/\Omega !$$

4. Csak ötösért! Egy lineáris rendszer differenciálegyenlete:

$$\frac{d^6 u(t)}{dt^6} + 26 \Omega^2 \frac{d^4 u(t)}{dt^4} + 169 \Omega^4 \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 144 \Omega^6 u(t) = 0$$

A képletben Ω egy frekvencia-dimenziójú paraméter. A $t=0$ kezdőpillanatban $u(0)=1$, a függvény első öt deriváltjának értéke pedig 0. Adjuk meg az $u(t)$ függvényt! Lesz-e olyan későbbi időpont, amikor a rendszer állapota megegyezik a kezdeti állapottal? Ha igen, mikor következik ez be legelőször? (Segítség: vezessük be a $\lambda = \omega^2 / \Omega^2$ paramétert, majd emlékezzünk vissza korábbi zh-élményeinkre!)