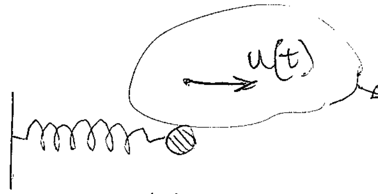
$\boxed{09.17.}$ ((Bolyai fogy. fent van fűzetben))

Ajánlott! Differenciálegyenletek felállítása és megoldása c. könyv
(Fodor György: Lineáris rendszerek analízise)

rezgés ✗ szinusz



$t \longmapsto \boxed{u(t)}$

egyetlen változó — kitérés

1 dimenziós mozgás, nem figyeljük a gravitációt

pl. molekulák:

modellezhető

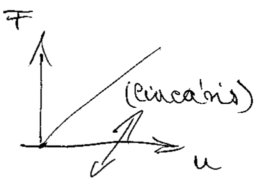
$$f'(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$

időfüggvényeknél a jelölés: $\dot{u}(t)$ → sebesség

második derivált: $\boxed{\ddot{u}(t)}$ → gyorsulás

Legegyszerűbb eset: k, m → $u(t)$ (harmonikus oszcillátor)

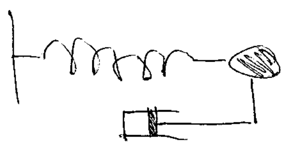
- a rugó tömegét elhanyagoljuk
- a súrlódást — " —
- test tömege: $m > 0$
- rugóállandó: $k > 0$
- a rugó által kifejtett erő: $F = -k \cdot u$



$$\boxed{m \cdot \ddot{u}(t) = -k \cdot u(t)}$$ → homogén elsőrendű lineáris diffegyenlet

(így szokás írni: $m\ddot{u} + ku = 0$)

Vezessünk be súrlódást:



dugattyús fék

$F = F_r + F_s = -k \cdot u - c \cdot \dot{u}$

tfh. a súrlódás arányos a sebességgel (arányossági tényező: c)

$k > 0$
$c > 0$
$m > 0$

valóságban a súrlódás (pl. szabadon eső vízcseppnél) a sebesség négyzetével arányos, de mivel így nem lenne lineáris a differenciálegyenlet, nem ...

$\boxed{m\cdot\ddot{u}(t) = -k\cdot u(t) - c\cdot\dot{u}(t)}$ ← másodrendű lin. diffegyenlet

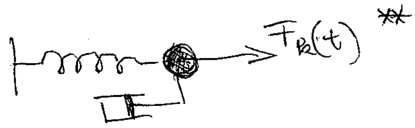
Úgy szokás írni, hogy: $\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0}$ homogén

(ennek a megoldása az $u=0$, de (*))

A diffegyenletnek végtelen sok megoldása van, ezért az egzakt mo.-hoz kellenek a kezdeti feltételek.

(nem időbeli kezdőfeltétel = peremfeltétel ?)

Vezessünk egy külső erőt:



$\boxed{F = F_r + F_s + F_k = -ku - c\dot{u} + F_k(t)}$

$m\ddot{u}(t) = -ku(t) - c\cdot\dot{u}(t) + F_k(t)$ → lineáris másodrendű inhomogén diffegy.

$\boxed{m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + k\cdot u(t) = F_k(t)}$

(*) ennek nem megoldása a nulla

** ha én húzigálom a golyót, rám is hat erő (Newton III.), de ezt elhanyagolhatjuk (pici a golyó)

homogén: az első 2 rendszer magára van hagyva, zárt rendsz.

$\boxed{\text{inhomogén}}$: nyitott rendszer

Felírhatnánk $\dot{u}$-t így is: $\boxed{Du}$ „deriválás operátor"

$\mathcal{F}$ – fvek halmaza

$u(t) \in \mathcal{F}$

$\boxed{D: \mathcal{F} \to \mathcal{F}}$ ⇐ operátor

Második derivált: $D(Du) = D^2u$

Így a 3. egyenlet:

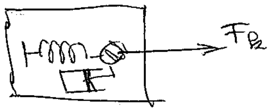
$m\cdot D^2u + c\cdot Du + ku = F_k$

polinom $(mD^2 + cD + k)u = F_k$

$L(D) := mD^2 + cD + k$, így:

$L(D)u = F_k(t)$ → ezt a félév végén megoldjuk

Tegyük be a rendszert egy fekete dobozba:



inhomogén:

$F_k(t) \longrightarrow \boxed{L} \longrightarrow u(t)$

(részecskékkel pl. így vizsgáljuk)

homogén: $\boxed{L} \longrightarrow u(t)$ $\qquad L(D)u = 0$

tfh. kaptunk 2 megoldást:

$u_1(t) \qquad Lu_1 = 0 \qquad m\ddot{u}_1 + ku_1 = 0$

$u_2(t) \qquad Lu_2 = 0 \qquad m\ddot{u}_2 + k\ddot{u}_1 = 0$

(1.) $u_3 = u_1 + u_2$

$$m\ddot{u}_3 + ku_3 = m(u_1+u_2)^{\cdot\cdot} + k(u_1+u_2) =$$

$$= m(\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2) + k(u_1+u_2) =$$

$$= (m\ddot{u}_1 + ku_1) + (m\ddot{u}_2 + ku_2) = 0 + 0 = 0$$

(tehát $u_3 = u_1 + u_2$ is megoldás)

(2.) $u_4 = 2 \cdot u_1$ is megold. (biz. hf.)*

(3.) $u_5 = \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

is megoldás (homogén egyenletnél!) (kiszámolni: HF)**

(matematikailag, hiszen itt nem szorozhatunk akármekkora számmal, hiszen elszakad a rugó pl.)

lineáris kombináció

* $m\ddot{u}_4 + ku_4 = m(2u_1)^{\cdot\cdot} + k(2u_1) = m(2\ddot{u}_1) + k(2u_1) = 2(m\ddot{u}_1 + ku_1) = 2 \cdot 0$

** (1.) + (2.) ...

N-ed fokú homogén diffegyenletnél elég N mo-t találni, és ezek lin. kombinációjaként előáll az összes többi.

09.24.

$$m\ddot{u}(t) = -ku(t) - c\dot{u}(t) + F_k(t)$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_k(t) \qquad (\leftarrow \text{lineáris kombináció})$$

([Elméleti fizikában a frekvenciát ω-val jelöljük (kis omega))

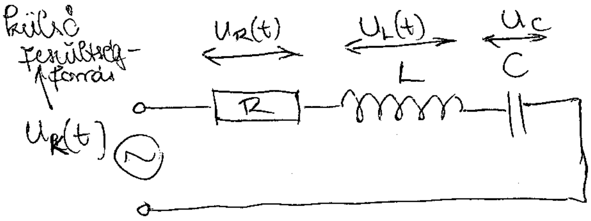
$$\ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = \frac{1}{m}\cdot F_k(t)$$

$$2\beta = \frac{c}{m} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad f(t) = \frac{1}{m}F_k(t)$$

$$\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = f(t)$$

Kezd. ~~feltt~~: $t = 0$, $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = v_0$

↳ ez így egy jól definiált egyenlet, pontosan egy megoldása van



(ez is idealizált, az összes ellenállás (pl. a vezeték) egyetlen R ellenállásba van számítva)

$$I(t) = ?$$

$$U_R + U_L + U_C = U_K(t)$$

[$Q = C\cdot U$]

$$U_R = R\cdot I \quad \text{((ez is csak közelítés))}$$

$$U_L = L\cdot\dot{I}$$

$$\dot{Q} = I \qquad Q(t) = \int I(t)\,dt$$

$$U_C = \frac{1}{C}\int I(t)\,dt$$

$$R I(t) + L\dot{I}(t) + \frac{1}{C}\int I(t)\,dt = U_K(t) \quad \Big/ \frac{d}{dt} \quad \Rightarrow$$

↳ integro-differenciálegyenlet

$R\dot{i}(t) + L\ddot{i}(t) + \frac{1}{C}\, i(t) = \dot{U}_k(t)$ (ez már diffegyenlet)

$L\ddot{i}(t) + R\dot{i}(t) + \frac{1}{C}\, i(t) = \dot{U}_k(t)$ (ez az áramkör megfeleltethető a rezgő golyónak)

(a mechanikai rezgőrendszerek modellezhetők az elektronikus —||— -kel)

$$\ddot{i} + \frac{R}{L}\dot{i} + \frac{1}{LC}\, i = \frac{1}{L}\dot{U}_k(t)$$

$\frac{R}{L} = 2\beta$ $\qquad \frac{1}{LC} = \omega_0^2$ $\qquad \frac{1}{L}U_k(t) = f(t)$

→ közönséges, másodrendű, lineáris, egyenlő? együtthatós

→ ha nincs külső feszültség → homogén → van triviális mo.

$\dot{u}(t) = \frac{du}{dt} = Du$ $\qquad$ operátor: $D: F \to F$ (néha $\hat{D}$-vel jelöljük)

$\ddot{u}(t) = D(Du) = D^2 u$

(M) az az operátor, ami önmagát rendeli valamihez: identitásoperátor (I)

$D^2 u + 2\beta D u + \omega_0^2 u = f(t)$

$D^0 = I$; $D^0 u = u$

$$(\underbrace{D^2 + 2\beta D + \omega_0^2}_{L(D)})\, u(t) = f(t)$$

$L(D)\, u(t) = f(t)$ $\qquad f(t) \to \boxed{L} \to u(t)$

Homogén egyenletek

$L(D)\, u(t) = 0$

pl: $\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$

$L(D)\, u_1(t) = 0$

$L(D)\, u_2(t) = 0$ (megoldások)

$u_3(t) = u_1(t) + u_2(t)$

$\dot{u}_3 = \dot{u}_1 + \dot{u}_2$; $\ddot{u}_3 = \ddot{u}_1 + u_2$

$$L(D)u_3 = \ddot{u}_3 + 2\beta\dot{u}_3 + \omega_0^2 u_3 =$$

$$= (\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2) + 2\beta(\dot{u}_1 + \dot{u}_2) + \omega_0^2(u_1 + u_2) =$$

$$= (\underbrace{\ddot{u}_1 + 2\beta\dot{u}_1 + \omega_0^2 u_1}_{0}) + (\underbrace{\ddot{u}_2 + 2\beta\dot{u}_2 + \omega_0^2 u_2}_{0}) = 0$$

$D(u_1 + u_2) = Du_1 + Du_2 \rightarrow$ additív

$D(\alpha u) = \alpha(Du) \rightarrow$ homogén

$\}$ = lineáris operátor

$D(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha(Du_1) + \beta(Du_2)$

$L(D)(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha L(D)u_1 + \beta L(D)u_2$

tfh. $L(D)u_1 = 0$ és $L(D)u_2 = 0$

akkor a lineáris kombinációk is megoldások

megoldások halmaza: $M \subset F$

A homogén egyenlet megoldásai vektorteret (lineáris teret) alkotnak (M vektortér).

Másodrendű hom. diffegyenletnél a megoldások tere 2 dimenziós

N-edrendű diffegy. $\rightarrow$ M N-dimenziós.

Hogyan oldjuk meg a diffegyenleteket? Megsejtjük. Mit sejtünk meg? (általában)

$f(t) = e^{ct}$ $(-t!)$

$$\hat{D}f = \dot{f} = \frac{d}{dt}e^{ct} = e^{ct}\cdot(ct)^{\cdot} = e^{ct}\cdot c$$

$\hat{D}f = cf \rightarrow$ (btw. ez egy sajátérték probléma, c = s.é.)

$$\hat{D}^2 f = \ddot{f} = (\dot{f})^{\cdot} = (cf)^{\cdot} = c\cdot\dot{f} = c\cdot c\cdot f = c^2 f$$

$$\hat{D}^n f = c^n \cdot f$$

Vegyük a lin komb.-ját:

$$(\underbrace{a_n D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0}_{\text{polinom},\ L(D)})f \qquad \rightarrow$$

$$= a_n c^n f + a_{n-1} c^{n-1} f + \ldots + a_1 c f + a_0 f =$$

$$= \underbrace{(a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0)}_{L(c)} f$$

$$L(c) \cdot f$$

$$L(D) f = L(c) f$$

$L(D) u(t) = 0$ → megsejtjük, hogy e^{ct} megoldás
→ próbafüggvény = Ansatz = trial function

karakterisztikus egyenlet

Tfh. $u(t) = e^{ct}$

(egyenlőnek kell lennie)

$$L(D) u(t) = L(D) \cdot e^{ct} = L(c) e^{ct} \overset{!}{=} 0$$

$L(c) = 0$ (→ ez egy algebrai egyenlet (n-edfokú))
(→ n megoldása van $\mathbb{C}$-n)

$c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$

$u_1(t) = e^{c_1 t}$; $u_2(t) = e^{c_2 t}$; … ; $u_n(t) = e^{c_n t}$

No de ennek az n db megoldásnak a lineáris kombinációi is mo.-ok.

$u(t) = C_1 e^{c_1 t} + C_2 e^{c_2 t} + \ldots + C_n e^{c_n t}$; $C_k \in \mathbb{C}$

↳ általános megoldás, ahol a C-ket a kezd. feltételek határozzák meg

$\boxed{10.01.}$

$u(t)$ $\quad D = \frac{d}{dt}$ $\quad \dot{u}(t) = Du$

$u_1(t_*)$; $u_2(t)$

$$D(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha (D u_1) + \beta (D u_2)$$

$$L(D) = D^n + \alpha D^{n-1} + \beta D^{n-2} + \ldots + \mu D + \nu$$ karakterisztikus polinom ?

$$L(D) u(t) = 0$$

$R\dot{i}(t) + L\ddot{i}(t) + \frac{1}{C} i(t) = \dot{U}_k(t)$ (ez már diffegyenlet)

$L\ddot{i}(t) + R\dot{i}(t) + \frac{1}{C} i(t) = \dot{U}_k(t)$ (ez az áramkör megfeleltethető a rezgő golyónak)
(a mechanikai rezgőrendszerek modellezhetők az elektronikus —||— -kel)

$$\ddot{i} + \frac{R}{L}\dot{i} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L}\dot{U}_k(t)$$

$\frac{R}{L} = 2\beta \qquad \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \qquad \frac{1}{L} U_k(t) = f(t)$

közönséges, másodrendű, lineáris, egyenlő? együtthatós
ha nincs külső feszültség → homogén → van triviális mo.

$\dot{u}(t) = \frac{du}{dt} = Du$ operátor: $D : F \to F$ (néha $\hat{D}$-vel jelöljük)

$\ddot{u}(t) = D(Du) = D^2 u$

(M) az az operátor, ami önmagát rendeli valamihez: identitás operátor (I)

$D^2 u + 2\beta D u + \omega_0^2 u = f(t)$

$D^0 = I$; $D^0 u = u$

$$\underbrace{(D^2 + 2\beta D + \omega_0^2)}_{L(D)} u(t) = f(t)$$

$L(D)u(t) = f(t)$

$$f(t) \longrightarrow \boxed{L} \longrightarrow u(t)$$

Homogén egyenletek

$L(D)u(t) = 0$

pl: $\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$

$L(D)u_1(t) = 0$
$L(D)u_2(t) = 0$ (megoldások)

$u_3(t) = u_1(t) + u_2(t)$

$\dot{u}_3 = \dot{u}_1 + \dot{u}_2$; $\ddot{u}_3 = \ddot{u}_1 + u_2$

$$= a_n c^n f + a_{n-1} c^{n-1} f + \ldots + a_1 c f + a_0 f =$$

$$= \underbrace{(a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0)}_{L(c)\cdot f} f$$

$$L(D) f = L(c) f$$

$L(D)u(t) = 0$ → megsejtjük, hogy e^{ct} megoldás
→ próbafüggvény = Ansatz = trial function

karakterisztikus egyenlet

Tfh. $u(t) = e^{ct}$

$$L(D)\,u(t) = L(D)\cdot e^{ct} = L(c)e^{ct} \overset{!}{=} 0$$ (egyenlőnek kell lennie)

$L(c) = 0$ (→ ez egy algebrai egyenlet (n-edfokú))
(→ n megoldása van $\mathbb{C}$-n)

$c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$

$u_1(t) = e^{c_1 t}$; $u_2(t) = e^{c_2 t}$; … ; $u_n(t) = e^{c_n t}$

No de ennek az n db megoldásnak a lineáris kombinációi is mo.-ok.

$$u(t) = C_1 e^{c_1 t} + C_2 e^{c_2 t} + \ldots + C_n e^{c_n t} \quad ; \quad C_k \in \mathbb{C}$$

↳ általános megoldás, ahol a C-ket a kezd. feltételek határozzák meg

$\boxed{10.01.}$

$u(t)$ $\quad D = \frac{d}{dt}$ $\quad \dot{u}(t) = Du$

$u_1(t_*)$; $u_2(t)$

$$D(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha(Du_1) + \beta(Du_2)$$

$$L(D) = D^n + \alpha D^{n-1} + \beta D^{n-2} + \ldots + \mu D + \nu$$ karakterisztikus polinom ?

$$L(D)\,u(t) = 0$$

$u(t) = e^{\lambda t}$

$Du = \dot{u} = (e^{\lambda t})^{\cdot} = \lambda \cdot e^{\lambda t} = \lambda u$ (az $e^{\lambda t}$ sajátfüggvénye a diff.operátornak)

$D^2 u = \lambda^2 u$

$D^n u = \lambda^n u$

$L(D)u = L(\lambda)u$

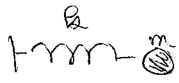
$L(\lambda) = 0$ → ez egy algebrai egyenlet (n-edfokú ⇒ n db megoldása van a komplex síkon)

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$

(a lin. kombinációk is mo.-ok)(így a teljes mo.)

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k t}$$

Példa:

csillapítatlan oszcillátor  $k > 0$, $m > 0$

$m\ddot{u} = -ku$

$m\ddot{u} + ku = 0$

$\ddot{u} + \frac{k}{m}u = 0$ $\qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$

$(\underbrace{D^2 + \omega_0^2})u = 0$

$L(D) \rightarrow L(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2$

$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ → karakterisztikus egyenlet

$\lambda_1 = i\omega_0$; $\lambda_2 = -i\omega_0$

mo.: $u(t) = A \cdot e^{i\omega_0 t} + B \cdot e^{-i\omega_0 t}$ $\qquad A, B \in \mathbb{C}$

↳ általános megoldás

+ kezdeti feltételek $\left.\begin{array}{l} u(0) := u_0 \\ \dot{u}(0) := v_0 \end{array}\right\}$ ⇒ (speciális mo./partikuláris mo.)

$$u(t) = A\cdot e^{i\omega_0 t} + B\cdot e^{-i\omega_0 t}$$

$$\dot{u}(t) = A\cdot i\omega_0 \cdot e^{i\omega_0 t} + B(-i\omega_0)\cdot e^{-i\omega_0 t}$$

$t=0:$ $\quad u(0) = A + B \stackrel{!}{=} u_0$

$\qquad \dot{u}(0) = i\omega_0 (A - B) \stackrel{!}{=} v_0$

$+$ kf.: $u(0) = u_0$

$\qquad \dot{u}(0) = v_0$

M $\stackrel{!}{=}$ azt jelenti, h. "legyen egyenlő" / "egyenlőnek kell lennie"

$$A + B = u_0$$
$$A - B = \frac{v_0}{i\omega_0}$$

$$A = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{v_0}{i\omega_0}\right)$$
$$B = \frac{1}{2}\left(u_0 - \frac{v_0}{i\omega_0}\right) = A^*$$

($B =$ A komplex konjugáltja)

Speciális / partikuláris megoldás:

$$u(t) = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{v_0}{i\omega_0}\right)e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2}\left(u_0 - \frac{v_0}{i\omega_0}\right)e^{-i\omega_0 t} =$$

$$= u_0 \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} + \frac{v_0}{\omega_0}\cdot\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i}$$

$$u(t) = u_0 \cdot \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

M (a mo. újabb alakja)

$$u(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}$$

$B = A^*$

$A := \frac{a + ib}{2} \qquad a, b \in \mathbb{R}$

$B := \frac{a - ib}{2}$

$$u(t) = \left(\frac{a+ib}{2}\right)e^{i\omega_0 t} + \frac{a-ib}{2}e^{-i\omega_0 t}$$

$$= a\,\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} + bi\,\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2} =$$

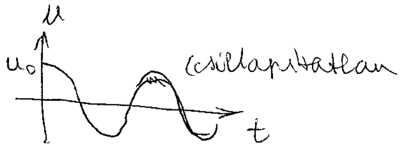
$$= \underbrace{a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t, \quad a, b \in \mathbb{R}}_{\text{ez szintén általános megoldás}}$$

$$\Rightarrow \quad \dot u(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t) + b\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

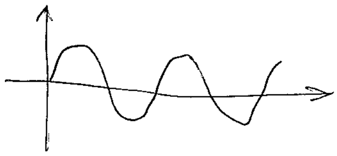
$$u(0) = a \overset{!}{=} u_0$$

$$\dot u(0) = b\omega_0 \overset{!}{=} v_0$$

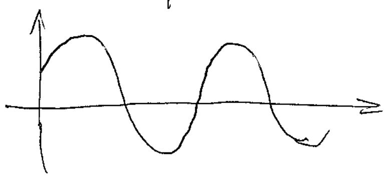
Spec. eset: $\left.\begin{matrix} u_0 \neq 0 \\ v_0 = 0 \end{matrix}\right\} u(t) = u_0 \cos(\omega_0 t)$



Spec. 2.: $\left.\begin{matrix} u_0 = 0 \\ v_0 \neq 0 \end{matrix}\right\} u(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$



Spec. 3.: $\left.\begin{matrix} u_0 \neq 0 \\ v_0 \neq 0 \end{matrix}\right\} u(t) = \dots$



(M) (a m.o. újabb alakja)

$$u(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin(\omega_0 t) = \sqrt{a^2+b^2}\Bigg(\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\varphi}\cos\omega_0 t + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\varphi}\sin\omega_0 t\Bigg) =$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} = \frac{v_0}{\omega_0 u_0}$$

$$= C\cdot\big(\cos(\omega_0 t)\cos\varphi + \sin(\omega_0 t)\sin\varphi\big) =$$

$$= C\cdot\cos(\omega_0 t - \varphi) = C\cdot\cos\Big(\omega_0\big(t - \underbrace{\tfrac{\varphi}{\omega_0}}_{t_0}\big)\Big) = C\cdot\cos\big(\omega_0(t - t_0)\big)$$

$$C = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{u_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

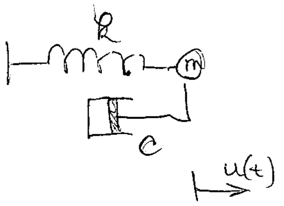
(M) (még egy valami)

$$u(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}$$

$$= A\cdot(\cos\omega_0 t + i\sin\omega_0 t) + B(\cos\omega_0 t - i\cdot\sin\omega_0 t) =$$

$$= \underbrace{(A+B)}_{a}\cos\omega_0 t + i\underbrace{(A-B)}_{b}\sin\omega_0 t$$

Példa: csillapított rezgés



$m>0$
$k>0$
$c>0$

$m\ddot{u} = -ku - c\dot{u}$

$m\ddot{u} + ku + c\dot{u} = 0$

$\ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = 0$

$\frac{c}{m} = 2\beta \qquad [\beta] = \frac{1}{s}$

$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \qquad [\omega_0] = \frac{1}{s}$

$\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$

K.F.: $u(0) = u_0$
$\dot{u}(0) = v_0$

$D^2 u + 2\beta D u + \omega_0^2 u = 0$

$$\underbrace{(D^2 + 2\beta D + \omega_0^2)}_{L(D)} u = 0$$

$L(D) = D^2 + 2\beta D + \omega_0^2$

$L(\lambda) = \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 \qquad L(D) = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{(2\beta)^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Három különböző eset lehetséges:

(a) $\beta > \omega_0 \rightarrow$ túlcsillapított

(b) $\beta = \omega_0 \rightarrow$ kritikusan csillapított

(c) $\beta < \omega_0 \rightarrow$ alulcsillapított

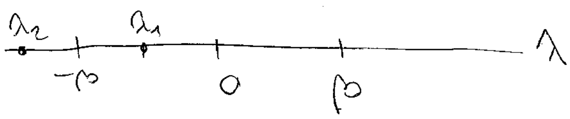
(a) $\beta > \omega_0$

$\beta^2 - \omega_0^2 > 0$

$\alpha^2 = \beta^2 - \omega_0^2$

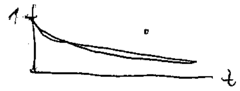
$\alpha < \beta$

$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \alpha \in \mathbb{R}$



$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= -\lambda_1 = \beta - \alpha > 0 \\ \gamma_2 &= -\lambda_2 = \beta + \alpha > 0 \end{aligned}\right\} \gamma_2 > \gamma_1$$

$$e^{\lambda_1 t} = e^{-\gamma_1 t}$$



$$e^{\lambda_2 t} = e^{-\gamma_2 t}$$

$$u(t) = A e^{-\gamma_1 t} + B e^{-\gamma_2 t}$$

$$A, B \in \mathbb{R}$$

$$u(t) = A e^{-\gamma_1 t} + B e^{-\gamma_2 t}$$

$$\dot{u}(t) = A(-\gamma_1) e^{-\gamma_1 t} + B(-\gamma_2) e^{-\gamma_2 t}$$

$$u(0) = A + B \overset{!}{=} u_0$$

$$\dot{u}(0) = -\gamma_1 A - \gamma_2 B \overset{!}{=} v_0$$

$$\gamma_2 A + \gamma_2 B = \gamma_2 u_0$$

$$-\gamma_1 A - \gamma_2 B = v_0$$

$$(\gamma_2 - \gamma_1) A = \gamma_2 u_0 + v_0 \rightarrow A = \frac{\gamma_2 u_0 + v_0}{\gamma_2 - \gamma_1} = \frac{(\beta+\alpha) u_0 + v_0}{2\alpha}$$

$$\gamma_1 A + \gamma_1 B = \gamma_1 u_0$$

$$-\gamma_1 A - \gamma_2 B = v_0$$

$$(\gamma_1 - \gamma_2) B = \gamma_1 u_0 + v_0 \rightarrow B = \frac{\gamma_1 u_0 + v_0}{\gamma_1 - \gamma_2} = \frac{(\beta-\alpha) u_0 + v_0}{-2\alpha}$$

$$u(t) = \frac{(\beta+\alpha) u_0 + v_0}{2\alpha} e^{-\gamma_1 t} + \frac{(\beta-\alpha) u_0 + v_0}{-2\alpha} e^{-\gamma_2 t} =$$

$$= u_0 \left(\frac{\beta+\alpha}{2\alpha} e^{-\gamma_1 t} + \frac{\beta-\alpha}{-2\alpha} e^{-\gamma_2 t} \right) + \frac{v_0}{2\alpha} \left(e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t} \right) =$$

$$= \frac{u_0}{2\alpha} \left[(\beta+\alpha) e^{-(\beta-\alpha)t} - (\beta-\alpha) e^{-(\beta+\alpha)t} \right] + \frac{v_0}{2\alpha} \left[e^{-(\beta-\alpha)t} - e^{-(\beta+\alpha)t} \right] =$$

$$= \frac{u_0}{2\alpha} \left[(\beta+\alpha) e^{-\beta t} e^{\alpha t} + (\alpha-\beta) e^{-\beta t} e^{-\alpha t} \right] + \frac{v_0}{2\alpha} \left[e^{-\beta t} e^{\alpha t} - e^{-\beta t} e^{-\alpha t} \right] =$$

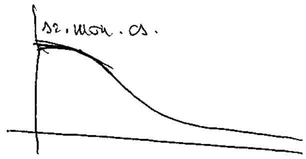
$$= e^{-\beta t} \left[\frac{u_0}{2\alpha} \left((\beta+\alpha) e^{\alpha t} + (\alpha-\beta) e^{-\alpha t} \right) + \frac{v_0}{\alpha} \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2} \right] =$$

$$= e^{-\beta t}\left[\frac{u_0}{\alpha}\left(\beta\,\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}+\alpha\,\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}\right)+\frac{v_0}{\alpha}\,\mathrm{sh}(\alpha t)\right] =$$

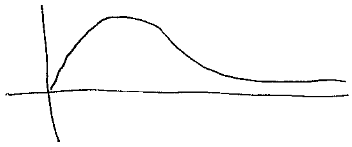
$$= e^{-\beta t}\left(\frac{u_0}{\alpha}\left(\beta\cdot \mathrm{sh}(\alpha t)+\alpha\cdot \mathrm{ch}(\alpha t)\right)+\frac{v_0}{\alpha}\,\mathrm{sh}(\alpha t)\right) =$$

$$= e^{-\beta t}\left(u_0\,\mathrm{ch}(\alpha t)+\frac{u_0\beta+v_0}{\alpha}\,\mathrm{sh}(\alpha t)\right)$$

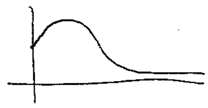
Spec. 1: $\left.\begin{matrix} u_0 \neq 0 \\ v_0 = 0 \end{matrix}\right\} u(t) = e^{-\beta t} u_0\left(\mathrm{ch}\,\alpha t + \frac{\beta}{\alpha}\,\mathrm{sh}\,\alpha t\right)$

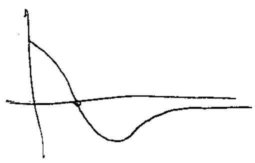


Spec. 2: $\left.\begin{matrix} u_0 = 0 \\ v_0 \neq 0 \end{matrix}\right\} u(t) = e^{-\beta t}\,\frac{v_0}{\alpha}\,\mathrm{sh}\,\alpha t$



Spec. 3: $\left.\begin{matrix} u_0 \neq 0 \\ v_0 \neq 0 \end{matrix}\right\}$





(C) $\beta < \omega_0$

$\beta^2 - \omega_0^2 < 0$

$\beta^2 - \omega_0 := -\Omega^2$

$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2-\omega_0^2} = -\beta \pm \sqrt{-\Omega^2} = -\beta \pm i\Omega$

(M) Ha egy valós jelenség leírásának megoldásai komplexek, akkor ezek a mo-ok egymás komplex konjugáltjai. Így gyököt alakunk: $\ldots(z-z_1)(z-z_1^*)\ldots = (z^2 - \underbrace{z_1 z_1^*}_{\text{valós}})$

$u_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{(-\beta+i\Omega)t}$

$u_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{(-\beta-i\Omega)t}$

$u(t) = Au_1 + Bu_2 = Ae^{-\beta t}\cdot e^{i\Omega t} + Be^{-\beta t}\cdot e^{-i\Omega t}$

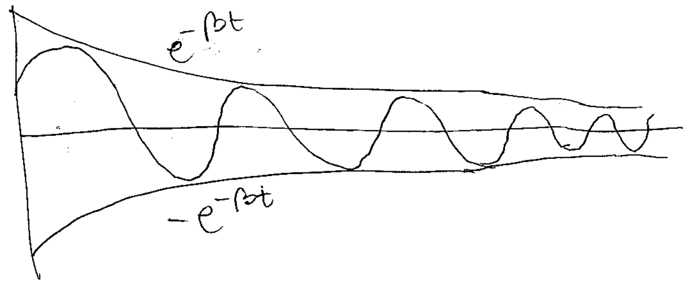
$= \rightarrow$

$$= e^{-\beta t}\left(A e^{i\Omega t} + B e^{-i\Omega t}\right) = e^{-\beta t}\left(a\cos(\Omega t) + b\cdot\sin(\Omega t)\right) =$$

$A, B \in \mathbb{C}$ $\qquad$ $a, b \in \mathbb{R}$

$$= e^{-\beta t}\cdot C\cdot\cos(\Omega t - \varphi) = \qquad C, \varphi \in \mathbb{R}$$

$$= e^{-\beta t} C\cdot\cos(\Omega(t - t_0))$$

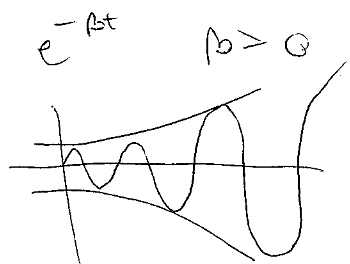


$\Omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 < \omega_0^2$

$\Omega < \omega_0$

$2\beta = \frac{c}{m}$

$\beta = \frac{c}{2m}$



(külső energia kell hozzá)

M) $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$

$t := -t$ (fordítsuk meg az időt)

$m\ddot{u} + ku = 0$

$\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)u$ → szimmetrikus t-re
az időbeli tükrözésre invariáns

$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$

↑ az itt páratlanadik időderivált,
NEM invariáns a t-tükrözésre → irreverzibilis

$\boxed{10.08.}$

(lm)

① csillapítatlan: $\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0$

② csillapított: $\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$ $\Bigg\}$ + KF: $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = v_0$

TFH: $u(t) = e^{\lambda t}$

① $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$

$\lambda_1 = i\omega_0$

$\lambda_2 = -i\omega_0$

$$u(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$$

② $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$, $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

① $u(t) = u_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$ $\quad T = 2\pi/\omega_0$

② a) $\beta > \omega_0$

$\beta^2 - \omega_0^2 = \alpha^2$

$r_{1,2} = \beta \pm \alpha$

$u(t) = A \cdot e^{-r_1 t} + B \cdot e^{-r_2 t}$

b) $\beta < \omega_0$

$\beta^2 - \omega_0^2 = -\Omega^2$

$u(t) = e^{-\beta t}(a \cdot \cos\Omega t + b \cdot \sin\Omega t)$ (*)

[itt hagytuk abba a múlt héten]

(*) $u(t) = e^{-\beta t}\left(a \cdot \cos(\Omega t) + b \cdot \sin(\Omega t)\right)$

$$\dot{u}(t) = -\beta \cdot e^{-\beta t}\left(a \cdot \cos(\Omega t) + b \cdot \sin(\Omega t)\right) + e^{-\beta t}\left(-a\Omega \sin(\Omega t) + b\Omega\cos(\Omega t)\right)$$

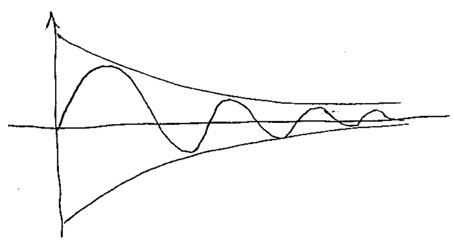
$u(0) = a \overset{!}{=} u_0$

$\dot{u}(0) = -\beta a + \Omega b \overset{!}{=} v_0$

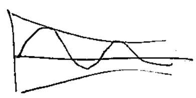
$a = u_0$

$b = \frac{v_0 + \beta u_0}{\Omega}$

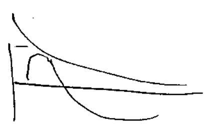
$$u(t) = e^{-\beta t}\left(u_0 \cos(\Omega t) + \frac{v_0 + \beta u_0}{\Omega} \cdot \sin(\Omega t)\right)$$



Spec. $u_0 = 0$: $u(t) = e^{-\beta t}\,\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega}$



$v_0 = 0$: $u(t) = e^{-\beta t} u_0\left(\cos(\Omega t) + \frac{\beta}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)$



c) $\beta = \omega_0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$

Közelíthetjük úgy, hogy: a) $\alpha \to 0$

b) $\Omega \to 0$

$$\lim_{\Omega\to 0} \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} = \lim_{\Omega\to 0} \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t}\cdot t = t$$

$$u(t) = e^{-\beta t}\left(u_0 + (v_0 + \beta u_0)t\right)$$

$$u(t) = A\cdot e^{-\beta t} + B\left(t\cdot e^{-\beta t}\right)$$

(M) $(\lambda-5)^3(\lambda-2)$ $\quad [\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=5;\ \lambda_4=2]$

$e^{5t};\ t\cdot e^{5t};\ t^2\cdot e^{5t};\ e^{2t}$

(P)

$\ddddot{u} = \alpha^4 u$ $\quad$ (→ negyedfokú, 4 KF kell)

$(D^4-\alpha^4)u=0$ $\quad$ KF: $u(0)=u_0$ $\quad \ddot{u}(0)=0$

$\dot{u}(0)=0$ $\quad \dddot{u}(0)=0$

Tfh: $u(t)=e^{\lambda t}$

~~$(D^4-\alpha^4)u=0$~~

$Du=\lambda u$

$D^4u=\lambda^4 u$

$(\lambda^4-\alpha^4)u=0$

$\lambda^4-\alpha^4=0$

$\lambda^4=\alpha^4$

$\lambda^2=\pm\alpha^2$

$\lambda^2=\alpha^2 \qquad \lambda^2=-\alpha^2$

$\lambda_1=\alpha;\ \lambda_2=-\alpha;\ \lambda_3=i\alpha;\ \lambda_4=-i\alpha$

$$u(t) = A\cdot e^{\alpha t} + B\cdot e^{-\alpha t} + Ce^{i\alpha t} + D\cdot e^{-i\alpha t} \qquad A,B,C,D\in\mathbb{C}$$

$$\dot{u}(t) = \alpha A e^{\alpha t} - \alpha B e^{-\alpha t} + i\alpha C\cdot e^{i\alpha t} - i\alpha D\cdot e^{-i\alpha t}$$

$$\ddot{u}(t) = \alpha^2 A e^{\alpha t} + \alpha^2 B\cdot e^{-\alpha t} - \alpha^2 C e^{i\alpha t} - \alpha^2 D\cdot e^{-i\alpha t}$$

$$\dddot{u}(t) = \alpha^3 A e^{\alpha t} - \alpha^3 B e^{-\alpha t} - i\alpha^3 C\cdot e^{i\alpha t} + i\alpha^3 D\cdot e^{-i\alpha t}$$

$u(0) = A+B+C+D \overset{!}{=} u_0$

$\dot{u}(0) = \alpha A - \alpha B + i\alpha C - i\alpha D \overset{!}{=} 0$

$\ddot{u}(0) = \alpha^2 A + \alpha^2 B - \alpha^2 C - \alpha^2 D \overset{!}{=} 0$

$\dddot{u}(0) = \alpha^3 - \alpha^3 - i\alpha^3 + i\alpha^3 \overset{!}{=} 0$ $\quad \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & -\alpha & i\alpha & -i\alpha \\ \alpha^2 & \alpha^2 & -\alpha^2 & -\alpha^2 \\ \alpha^3 & -\alpha^3 & -i\alpha^3 & i\alpha^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

Vandermonde (vagy Van der Monde) mátrix: ahol az egyes oszlopokban az egymás alatt levő tagok egymás hatványai

(M) Az 2. egyenletet osztottuk α-val, a 3.-at α^2-tel, a 4.-et α^3-bel

(1.) $A+B+C+D=u_0$

(2.) $A-B+iC-iD=0$

(3.) $A+B-C-D=0$

(4.) $A-B-iC+iD=0$

(1.)+(3.) $A+B=\frac{u_0}{2} \Rightarrow A=\frac{u_0}{4}\ ;\ B=\frac{u_0}{4}$

(1.)−(3.) $C+D=\frac{u_0}{2} \Rightarrow C=\frac{u_0}{4}\ ;\ D=\frac{u_0}{4}$

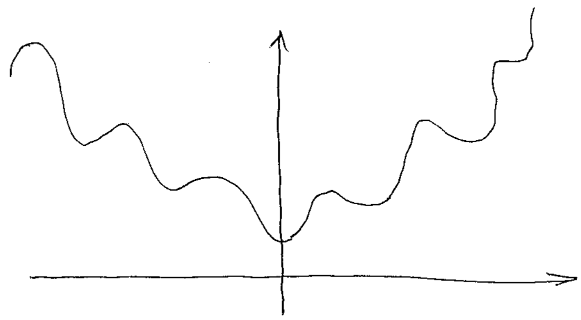
(2.)+(4.) $A-B=0 \Rightarrow B=A$

(2.)−(4.) $C-D=0 \Rightarrow C=D$

$$u(t)=\frac{u_0}{4}\left[e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}+e^{i\alpha t}+e^{-i\alpha t}\right]$$

$$u(t)=\frac{u_0}{2}\left[\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}+\frac{e^{i\alpha t}+e^{-i\alpha t}}{2}\right]$$

$$u(t)=\frac{u_0}{2}\left(\operatorname{ch}(\alpha t)+\cos(\alpha t)\right)$$



Nézzünk egy másik megoldási módszert!

$\ddot{u}+\omega_0^2 u=0$

eddig: Tfh. $e^{\lambda t}=u$

$\Rightarrow u(t)=A\cdot e^{i\omega_0 t}+B\cdot e^{-i\omega_0 t}=a\cos\omega_0 t+b\cdot\sin\omega_0 t$

most: Tfh. $u(t)=e^{i\omega t}$

$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$

Tfh. $u(t) = e^{i\omega t}$

$\dot{u} = i\omega \cdot e^{i\omega t}$

$\ddot{u} = (i\omega)^2 \cdot e^{i\omega t} = -\omega^2 e^{i\omega t}$

$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$

$-\omega^2 e^{i\omega t} + \omega_0^2 e^{i\omega t} = 0$

$\boxed{\omega^2 - \omega_0^2 = 0}$

$\omega_1 = \omega_0$; $\omega_2 = -\omega_0$ $\Rightarrow$ $u(t) = A \cdot e^{i\omega t} + B \cdot e^{-i\omega t}$ ✓

Alalahosan.

$L(D)\, u(t) = 0$ Tfh. $u(t) = e^{i\omega t}$

$Du = i\omega u$

$D^2 u = (i\omega)^2 u$

$\vdots$

$D^n u = (i\omega)^n u$

$L(D) u = L(i\omega) u$

$L(D) u = 0$

$L(i\omega) = 0$

P) $\ddot{u} + 2\beta \dot{u} + \omega_0^2 u = 0$

$L(D) = D^2 + 2\beta D + \omega_0^2$

$L(i\omega) = (i\omega)^2 + 2\beta i\omega + \omega_0^2 = -\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2$

$\omega^2 - 2i\beta\omega - \omega_0^2 = 0$

$\omega_{1,2} = i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

a) $\beta > \omega_0$: $\beta^2 - \omega_0^2 = \alpha$: $i\beta \pm \sqrt{-\alpha^2} = i(\beta \pm \alpha)$

$e^{i\omega t} = e^{ii(\beta \pm \alpha)t} = e^{(-\beta \pm \alpha)t}$

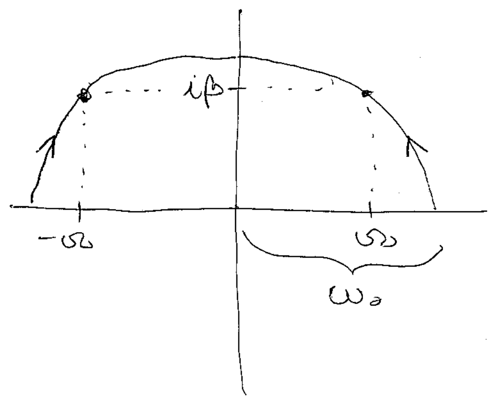
b) $\beta < \omega_0$: $\omega_0^2 - \beta^2 = \Omega^2$

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$$

$$\omega_{1,2} = i\beta \pm \Omega$$

$$e^{i\omega t} = e^{i(i\beta \pm \Omega)t} = e^{-\beta t} e^{\pm i\Omega t}$$

Komplex ω sík:

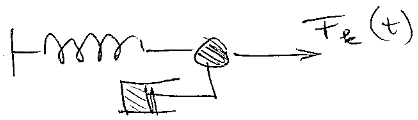


$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

$$\beta^2 + \Omega^2 = \omega_0^2$$

Ha növeljük a súrlódást, akkor egy ω_0 sugarú körön elkezdenek mozogni.

Inhomogén diffegyenletek



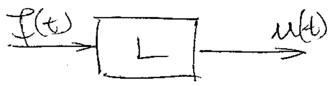
$$m\ddot{u} = -ku - c\dot{u} + F_k(t)$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_k(t)$$

$$2\beta = \frac{c}{m} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad f(t) = \frac{1}{m} F_k(t)$$

$$\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = f(t)$$

$$L(D)u(t) = f(t)$$



$Lu = f$

$Lu_1 = f$ és $Lu_2 = f$ megoldások

$L(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha f + \beta f \neq f$ $\Rightarrow$ NEM ALKOTNAK lineáris teret

$Lu_1 - Lu_2 = 0$

$L(u_1 - u_2) = 0$

homogén: $u_H(t) \rightarrow Lu_H(t) = 0$

inhomogén: $u_I(t) \rightarrow Lu_I(t) = f$

$u(t) = u_1(t) + u_H(t)$

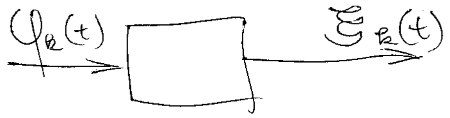
$Lu = L(u_1 + u_H) = Lu_1 + Lu_H = f + 0 = f$

Tanulság: vesszük az inhomogén egyenlet egy speciális megoldását, a homogén e. általános mo-át, és összeadjuk őket, és megkapjuk a ... ?

Tegyük fel, hogy f felírható a következőképpen:

$\varphi_k(t)$

$\forall f: \quad f(t) = \sum_k c_k \varphi_k(t)$



Recept: (lineáris inhomogén diffegy.-ek megoldási sémája :))

0.) keressük a $\varphi_k(t)$-ket

1.) $f(t) = \sum_k c_k \varphi_k(t) \xrightarrow[\text{megkapjuk:}]{\text{átnutként}} c_k$

2.)$_k$ $L(D)\,\Xi_k(t) = \varphi_k(t) \Longrightarrow \Xi_k(t)$

3.) $u(t) = \sum_k c_k \Xi_k(t)$ ⟸ (Fourier vagy Green) módszer

(B) $L(D)u(t) = L(D)\left(\sum_k c_k \Xi_k(t)\right) = \sum_k L(D)\left(c_k \Xi_k(t)\right) =$

$= \sum_k c_k \left(L(D)\Xi_k(t)\right) \stackrel{2.)}{=} \sum_k c_k \varphi_k(t) \stackrel{1.)}{=} f(t)$

$Lu = f$

Ajánlott: Farkas Miklós – Speciális függvények

Pál György – Ortogonális függvénysorok

$\boxed{10.15.}$

(ism.) $L(D)u(t) = f(t)$ (Lineáris inhomogén egyenletek mo.-i sémája:)

0.) $\varphi_k(t)$ – k keresése

1.) $f(t) = \sum_k c_k \varphi_k(t) \Rightarrow c_k$ ((végtelen sok c_k együttható))

2.)$_k$ $L(D)\xi_k(t) = \varphi_k(t) \Rightarrow \xi_k(t)$

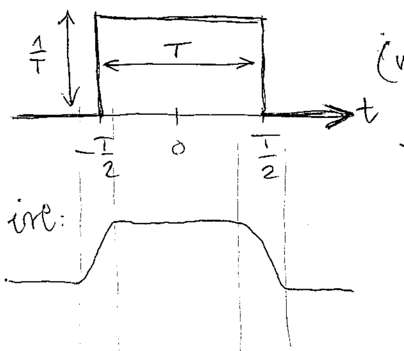
3.) $u(t) = \sum_k c_k \xi_k(t)$

$$L(D)u(t) = L(D)\left(\sum_k c_k \xi_k(t)\right) = \sum_n L(D)\left(c_k \xi_k(t)\right) = \sum_k c_k L(D)\xi_k(t) =$$

$$= \sum_k c_k \varphi_k(t) = f(t)$$

Green módszer

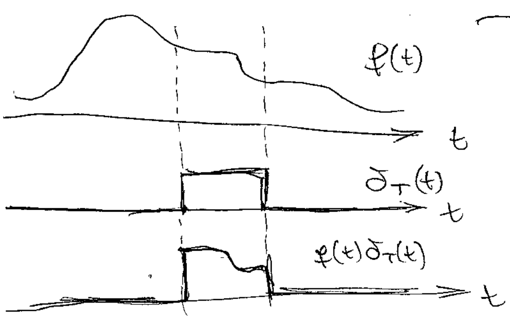
Dirac-delta:



(nem függvény!)

$\int \delta_T = 1$

$$\delta_T = \begin{cases} 0 & t < -\frac{T}{2} \\ \frac{1}{T} & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & t > \frac{T}{2} \end{cases}$$

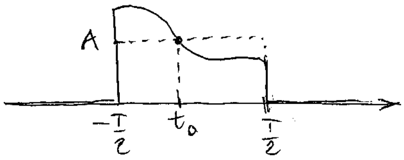


szorozzuk össze ezt a kettőt

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\,\delta_T(t) =$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\frac{1}{T} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)^{*}$$

* ez az $f(t)$ átlaga a $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ szakaszon



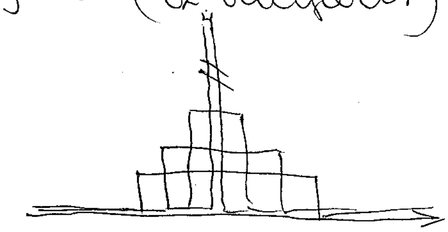
$$A = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t) = f(t_0) \qquad -\frac{T}{2} < t_0 < \frac{T}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, \delta_T(t) = f(t_0)$$

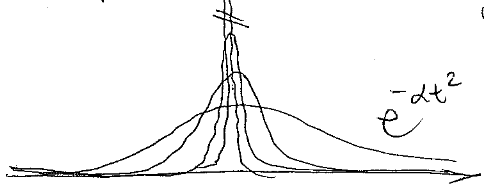
$$\lim_{T\to 0}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, \delta_T(t)\right) = f(0)$$

Dirac felcserélte a lim-et és az $\int$-t (ez illegális).

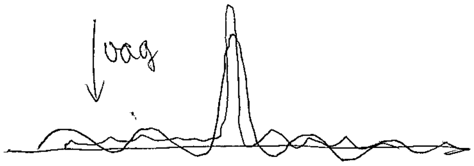
$$\text{"}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, \underbrace{\left(\lim_{T\to 0} \delta_T(t)\right)}_{\delta(t)} = f(0)\text{"}$$



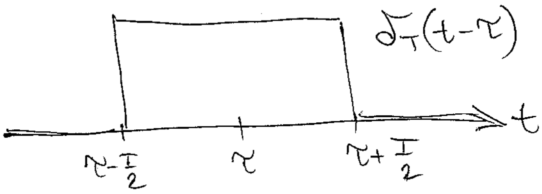
ezt lehet görbékkel is csinálni:



vagy



$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, \delta(t) = f(0)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, \delta(t-\tau) = f(\tau)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, f(\tau)\, \delta(t-\tau)}$$

(ism.)

(M) $f(t) = \sum_k c_k \varphi_k(t)$

1.) $\updownarrow$

$k \leftrightarrow \tau$

$\sum_k \leftrightarrow \int d\tau$

$c_k \leftrightarrow f(\tau)$

$\varphi_k(t) \leftrightarrow \delta(t-\tau)$

2.)

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_k(t) \longrightarrow \ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = f(t)$$

(M) A Green-fv a Dirac-deltára adott válasz.

$[\xi \leftrightarrow G]$ (gerjesztésre adott válasz)

$$\ddot{G}(t) + 2\beta\dot{G}(t) + \omega_0^2 G(t) = \delta(t)$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt\, \ddot{G}(t) + 2\beta\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \dot{G}(t)\, dt + \omega_0^2 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt\, G(t) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt\, \delta(t) = 1$$

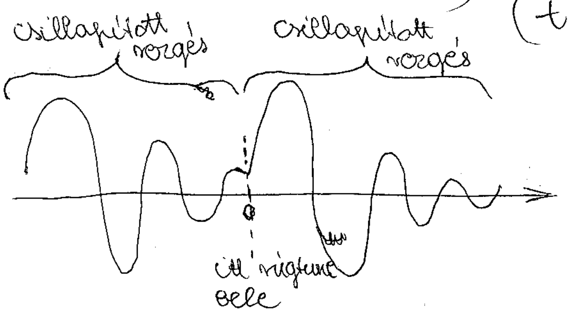
(M) $\int f'(x)\, dx = f(x)$; $\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)$

$$\dot{G}(\varepsilon) - \dot{G}(-\varepsilon) + 2\beta\big(\underbrace{G(\varepsilon) - G(-\varepsilon)}_{\to 0}\big) + \omega_0^2 \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} G(t)\, dt}_{\to 0} = 1$$

(M) ha $\varepsilon \to 0$, akkor a fv görbe alatti területe is $\to 0$

(M) ennél az oszcillátornál $\dot{G}(\varepsilon) - \dot{G}(-\varepsilon) = 1$, ami azt jelenti, hogy „belerúgunk" a rendszerbe ("egységnyi rúgás") (a fv törik) (t = 0-nál).

$$\dot{G}(+0) - \dot{G}(-0) = 1$$



0.) $\varphi_k(t) - \delta(t - \tau)$

1.) $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, f(t)\, \delta(t - \tau)$

2.) $L(D)\, G(t) = \delta(t)$

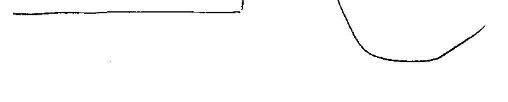
$L(D)\, G(t - \tau) = \delta(t - \tau)$

3\. $u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, f(\tau)\, \delta(t - \tau)$

$$\int_{-\infty}^{t} d\tau\, f(\tau)\, G(t - \tau)$$

(Azért csak t-ig összegzünk, mert különben a jövő eseményeit is összegeznénk és sértené a kauzalitást.)

Kauzális Green-függvény:



Kauzális Green-függvény:

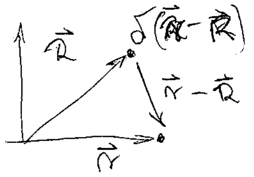
$$G(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\beta t}\dfrac{\sin \Omega t}{\Omega} & t \geq 0 \end{cases}$$

(A végtelen sok fv. közül EZT kell választani, hogy ne sérüljön a kauzalitás)

$$D = \frac{d}{dx}$$

$$L(D)\phi(x) = \rho(x) \rightarrow L(D)\phi(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

elektromos potenciál, amely függ a helytől

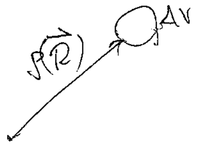


→ ponttöltés

$\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{R}|}$ potenciál ($\vec{R}$ által keltett töltés $\vec{r}$ helyen)

$$G(\vec{r},\vec{R}) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{R}|}$$

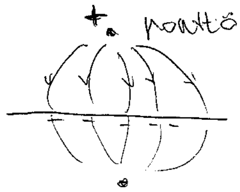
ΔV térfogatban potenciálja $\vec{r}$ helyen:



$$\sum_R \frac{\rho(\vec{R})\,\Delta V}{|\vec{r}-\vec{R}|} = \underbrace{\phi(\vec{r})}_{\text{potenciál } \vec{r} \text{ helyen}}$$

$$\phi(\vec{r}) = \int dV_{\vec{R}}\, \frac{\rho(\vec{R})}{|\vec{r}-\vec{R}|}$$

Tükörtöltés:



fémlap: a ponttöltés „összegyűjti" (összehívja) az ő töltéseit egy helyre

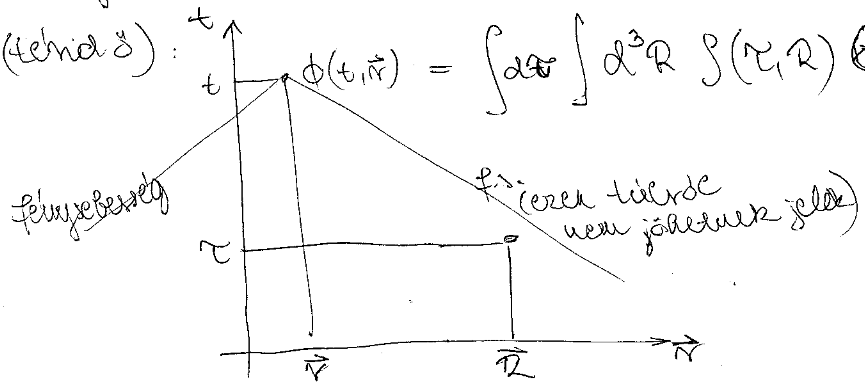
tükörtöltés: EZT ↺ a hatást helyettesíthetjük egy másik ponttöltéssel

Mozgó töltés:

(tehát ő):

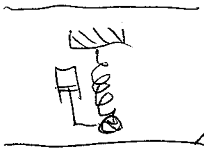
$$\phi(t,\vec{r}) = \int d\tau \int d^3R\, \rho(\tau,R)\, G(t,\tau,\vec{r},\vec{R})$$

→ propagátor, jelterjedési függvény



Konkrét számítás:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & 0<t<T \\ 0 & t>0 \end{cases} \Rightarrow \text{Pl.:}$$

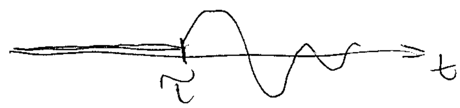


kondenzátor (két majd bekapcsoljuk)

$$G(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ e^{-\beta t}\dfrac{\sin \Omega t}{\Omega} & t>0 \end{cases}$$

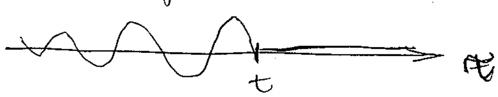
$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, f(\tau)\, G(t-\tau)$$

$$G(t-\tau) = \begin{cases} 0 & t-\tau<0 \rightarrow t<\tau \\ e^{-\beta t}\dfrac{\sin \Omega t}{\Omega} & t>\tau \end{cases}$$



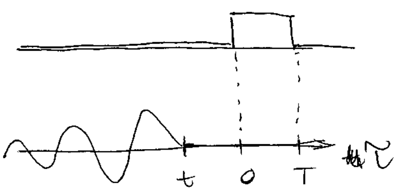
$$G(t,\tau) = \begin{cases} e^{-\beta(t-\tau)}\dfrac{\sin \Omega (t-\tau)}{\Omega} & \tau<t \\ 0 & \tau>t \end{cases}$$

(τ fv-ében lerajzolva:)



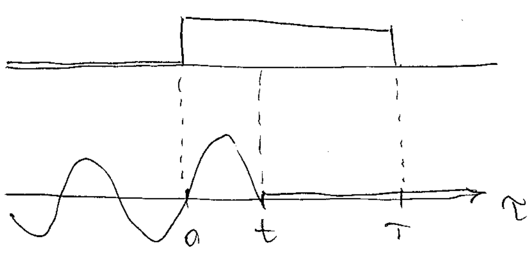
a) $t<0$

f:



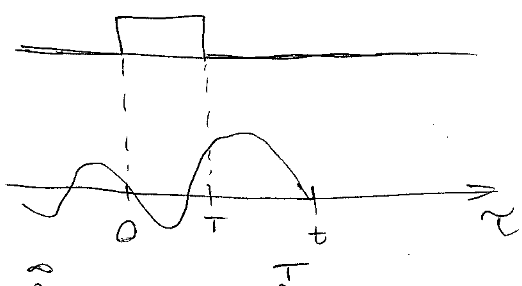
szorzatuk ∀ 0 ⇒ nem mozdul addig a golyó, amíg nem mozdítjuk meg

b) $0<t<T$



$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \rightarrow \int_{0}^{t} d\tau$$

c) $t>T$



$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \rightarrow \int_{0}^{T} d\tau$$

f) $0 < t < T$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, f(\tau)\, G(t-\tau) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} d\tau\, \underset{1}{f(\tau)}\, G(t-\tau) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} d\tau\, G(t-\tau)$$

$$y = t-\tau \qquad \tau = 0 \rightarrow y = t \qquad \frac{d\tau}{dy} = -1$$

$$\tau = t-y \qquad \tau = t \rightarrow y = 0 \qquad d\tau = -dy$$

$$= \int_{y=t}^{y=0} (-dy)\, G(y) = \int_{y=0}^{t} dy\, G(y) = \int_0^t dy\, e^{-\beta y} \frac{\sin \Omega y}{\Omega} =$$

$$= \frac{1}{\Omega} \int_0^t dy\, e^{-\beta y} \frac{e^{i\Omega y} - e^{-i\Omega y}}{2i} = \frac{1}{2i\Omega} \int_0^t dy \left(e^{(-\beta + i\Omega)y} - e^{(-\beta - i\Omega)y} \right) =$$

$$= \frac{1}{2i\Omega} \left[\frac{e^{(-\beta+i\Omega)y}}{-\beta+i\Omega} - \frac{e^{(-\beta-i\Omega)y}}{-\beta-i\Omega} \right]_{y=0}^{y=t} =$$

$$= \frac{1}{2i\Omega} \left[\frac{e^{-\beta t + i\Omega t}}{-\beta+i\Omega} - \frac{e^{-\beta t - i\Omega t}}{-\beta-i\Omega} - \frac{1}{-\beta+i\Omega} + \frac{1}{-\beta-i\Omega} \right] =$$

$$= \frac{1}{2i\Omega} \left[e^{-\beta t} \left(\frac{e^{i\Omega t}}{-\beta+i\Omega} - \frac{e^{-i\Omega t}}{-\beta-i\Omega} \right) - \left(\frac{1}{-\beta+i\Omega} - \frac{1}{-\beta-i\Omega} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2i\Omega} \left[e^{-\beta t} \frac{(-\beta-i\Omega)e^{i\Omega t} - (-\beta+i\Omega)e^{-i\Omega t}}{(-\beta+i\Omega)(-\beta-i\Omega)} - \frac{(-\beta-i\Omega)-(-\beta+i\Omega)}{(-\beta+i\Omega)(-\beta-i\Omega)} \right]$$

$$= \frac{1}{2i\Omega} \left[e^{-\beta t} \frac{-\beta(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}) - i\Omega(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t})}{(-\beta)^2 - (i\Omega)^2} - \frac{-2i\Omega}{(-\beta)^2 - (i\Omega)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2i\Omega} \left[e^{-\beta t} \frac{-\beta 2i \sin \Omega t - i\Omega 2\cos \Omega t}{\beta^2 + \Omega^2} + \frac{2i\Omega}{\beta^2 + \Omega^2} \right] =$$

(M) $\Omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

$$= \frac{1}{2i\Omega\,\omega_0^2}\left[-e^{-\beta t}\,2i\left(\Omega\cos\Omega t + \beta\sin\Omega t\right) + 2i\Omega\right] =$$

$$= \frac{1}{\omega_0^2}\left[1 - e^{-\beta t}\left(\cos\Omega t + \frac{\beta}{\Omega}\sin\Omega t\right)\right]$$

$\boxed{11.05.}$

$f(t) \longrightarrow \boxed{L} \longrightarrow u(t)$ $\qquad\qquad L(D)\,u(t) = f(t)$

0.) $\varphi_k(t)$

1.) $f(t) = \sum_k c_k \varphi_k(t) \quad \Rightarrow c_k$

2.) $\varphi_k(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow \xi_k(t)$

$L(D)\,\xi_k(t) = \varphi_k(t) \quad \Rightarrow \quad \xi_k(t)$

3.) $u(t) = \sum_k c_k \xi_k(t)$

$k \to \tau \; ; \quad \varphi_k(t) \to \delta(t-\tau)$

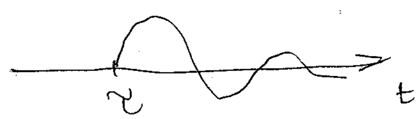
$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, f(\tau)\,\delta(t-\tau)$

$L(D)\,G(t-\tau) = \delta(t-\tau)$

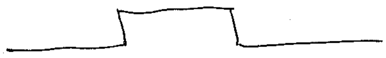
$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, f(\tau)\,G(t-\tau)$

Spec. $L(D) = D^2 + 2\beta D + \omega_0^2 \qquad \Omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

$$G(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\beta t}\cdot\dfrac{\sin\Omega t}{\Omega} & t \geq 0 \end{cases}$$



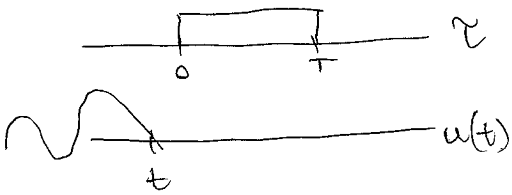
Leggen $f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & 0<t<T \\ 0 & t>T \end{cases}$



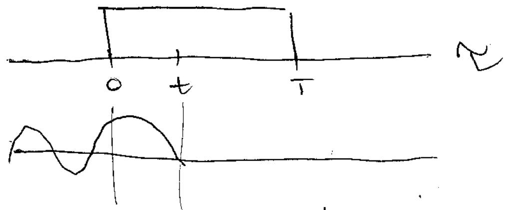
$$u(t) = \int d\tau \, f(\tau) G(t-\tau)$$

$$G(t-\tau) = \begin{cases} 0 & t<\tau \\ e^{-\beta(t-\tau)} \cdot \dfrac{\sin\Omega(t-\tau)}{\Omega} & t \geq \tau \end{cases}$$

a) $t<0$

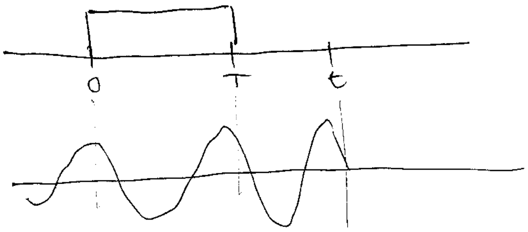


b) $0<t<T$



$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \longrightarrow \int_{0}^{t} d\tau$$

c) $t>T$



$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \longrightarrow \int_{0}^{T} d\tau$$

b) $0<t<T$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, f(\tau) G(t-\tau) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} d\tau \, \overset{1}{f(\tau)} \, G(t-\tau) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} d\tau \, G(t-\tau) =$$

$y = t-\tau$; $dy = -d\tau$; $t=0 \rightarrow y=t$; $\tau = t \rightarrow y=0$

$$= \int_{y=t}^{y=0} -dy \, G(y) = \int_{y=0}^{y=t} dy \, G(y) = \int dy \, e^{-\beta y} \frac{\sin\Omega y}{\Omega} = \rightsquigarrow$$

$$Z_p = \frac{1}{\omega_0^2}\left[1 - e^{-\beta t}\left(\cos\Omega t + \frac{\beta}{\Omega}\sin\Omega t\right)\right]$$

c) $t > T$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, f(\tau) G(t-\tau) = \int_{\tau=0}^{\tau=T} d\tau\, \overset{1}{f(\tau)} G(t-\tau) =$$

$$y = t-\tau\,;\quad dy = -d\tau\,;\quad \tau = 0 \rightarrow y = t\,;\quad \tau = T \rightarrow y = t-T$$

$$= \int_{y=t}^{y=t-T} -dy\, G(y) = \int_{y=t-T}^{y=t} dy\, G(y) = \int_{y=t-T}^{y=t} e^{-\beta y}\,\frac{\sin\Omega y}{\Omega} = \int_{y=t-T}^{y=t} e^{-\beta y}\,\frac{e^{i\Omega y} - e^{-i\Omega y}}{2i\Omega} =$$

$$= \frac{1}{2i\Omega}\int_{y=t-T}^{y=t} dy\left(e^{(-\beta + i\Omega)y} - e^{(-\beta - i\Omega)y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i\Omega}\left(\frac{e^{(-\beta+i\Omega)y}}{-\beta+i\Omega} - \frac{e^{(-\beta-i\Omega)y}}{-\beta-i\Omega}\right)\Bigg|_{y=t-T}^{y=t} =$$

$$= \frac{1}{2i\Omega}\left(\frac{e^{-\beta t}e^{i\Omega t} - e^{-\beta(t-T)}e^{i\Omega(t-T)}}{-\beta+i\Omega} - \frac{e^{-\beta t}e^{-i\Omega t} - e^{-\beta(t-T)}e^{-i\Omega(t-T)}}{-\beta-i\Omega}\right) =$$

$$= \frac{e^{-\beta t}}{2i\Omega}\left(\frac{e^{i\Omega t} - e^{\beta T}e^{i\Omega(t-T)}}{-\beta+i\Omega} - \frac{e^{-i\Omega t} - e^{\beta T}\cdot e^{-i\Omega(t-T)}}{-\beta-i\Omega}\right) =$$

$$= e^{-\beta t}\left(A\cos\Omega t + B\cdot\sin\Omega t\right)$$

$$m\ddot{u} = -ku - c\dot{u} + F(t)$$

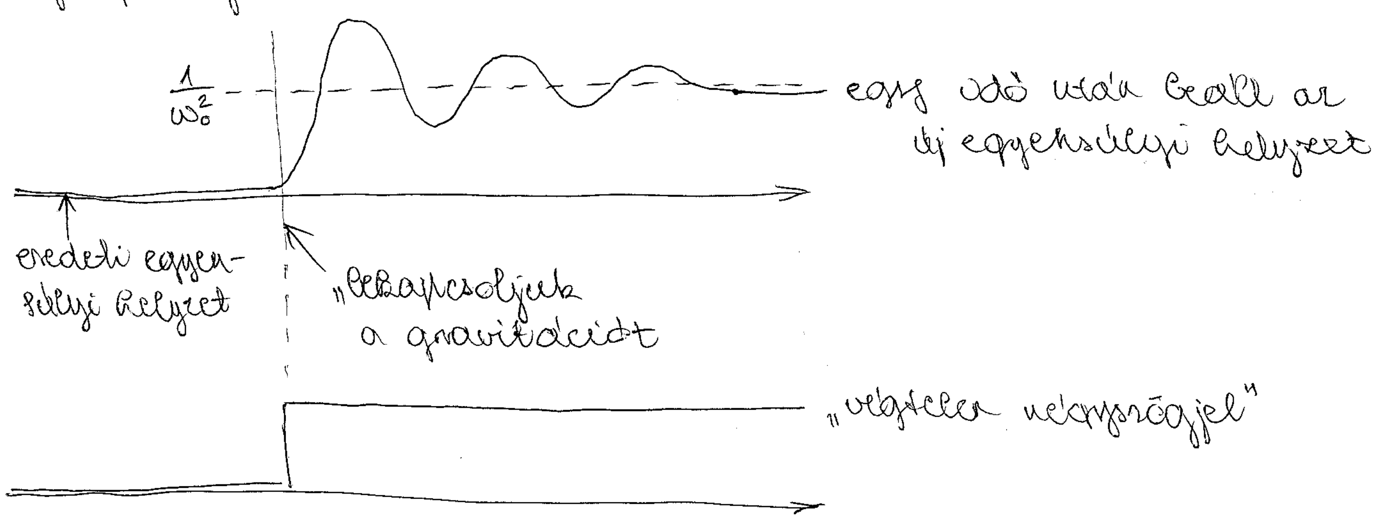
$u = \text{const}$ $\quad \dot{u} = 0 \;;\; \ddot{u} = 0$ $\qquad f = \frac{1}{m} F = 1$

$$-ku + F = 0$$

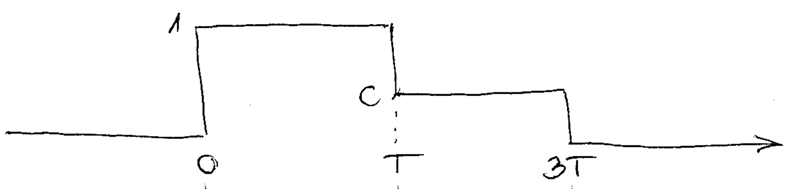
$$-ku + m = 0$$

$$u = \frac{m}{k} = \frac{1}{\omega_0^2} \qquad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

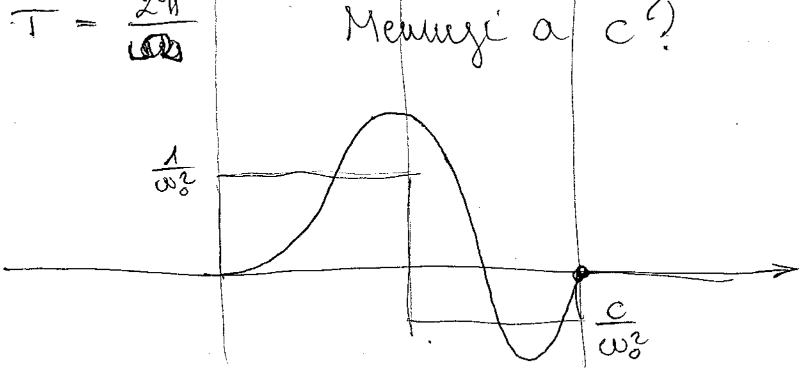
Pl. rugó gravitációs erőtérben $\rightarrow$ az egyensúlyi helyzet eltolódik $\left(\frac{1}{\omega_0^2}\right)$, hiszen a g. folyamatosan húzza, a rugó pedig „ellentart”.



Tavalyi vizsgafeladat:



$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $\qquad$ Mennyi a c?



Hf: számoljuk ki!

Fourier módszer

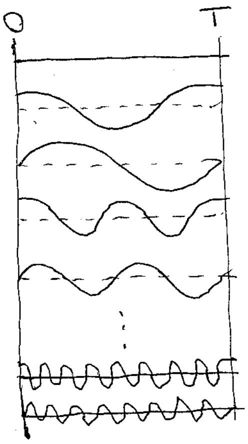
1. periodikus függvényekkel

$\forall t : f(t+T) = f(t)$ (M) a konstansfv. is periodikus

Pl.:
- $f(t) = C$
- $f(t) = \cos \omega_1 t$ $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ (mostantól ezt értjük ω_1 alatt)
- $f(t) = \sin \omega_1 t$
- $f(t) = \cos 2\omega_1 t$
- $f(t) = \sin 2\omega_1 t$

$\vdots$

- $f(t) = \cos n\omega_1 t$
- $f(t) = \sin n\omega_1 t$



Ezek a fvek bázist alkotnak a (T szerint periodikus) fvek körében. Az adott tartományon korlátos fvekre igaz. Véges sok szakadással rendelkező fvekre is igaz:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega_1 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_n (\sin(k\omega_1 t))$$

(T) Ezek a sorok konvergensek.

Integráljuk a periodicitási tartományon:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt\, f(t) = a_0 \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} dt}_{T} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega_1 t)\, dt}_{\left[\frac{\sin(k\omega_1 t)}{k\omega_1}\right]_{-T/2}^{T/2}} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega_1 t)\, dt =$$

$$\sin k\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2} - \sin\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{T}{2}\right) = \sin(k\pi) - \sin(-k\pi) = 0 - 0$$

$$\Rightarrow \quad = a_0 T + 0 + 0 \qquad \Big/ \cdot \cos(n\omega_1 t)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_1 t)\,dt = a_0 \underbrace{\int \cos(n\omega_1 t)\,dt}_{0} + \sum_k a_k \int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega_1 t)\cos(n\omega_1 t)\,dt +$$

$$+ \sum_k b_k \int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega_1 t)\cos(n\omega_1 t)\,dt \quad = \cancel{**} \Rightarrow$$

(M) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega_1 t)\cos(n\omega_1 t)\,dt = \int \frac{\cos(k+n)\omega_1 t + \cos(k-n)\omega_1 t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{T}{2}\,\delta_{kn} \quad \text{(Kronecker-delta)}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega_1 t)\cos(n\omega_1 t) = \int \frac{\sin(k+n)\omega_1 t + \sin(k-n)\omega_1 t}{2}\,dt =$$

$$= 0$$

$$⊛ = a_0 \cdot 0 + \sum_k a_k \frac{T}{2}\delta_{kn} + \sum_k b_k 0 = \frac{T}{2}\sum_k a_k \delta_{kn} = \frac{T}{2} a_n$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_1 t)\,dt$$

$/ \cdot \sin(n\omega_1 t)$:

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\sin(n\omega_1 t) = a_0 \underbrace{\int \sin(n\omega_1 t)\,dt}_{0} + \sum_k a_k \int \underbrace{\cos(k\omega_1 t)\sin(n\omega_1 t)\,dt}_{0}$$

$$+ \sum_k b_k \int \sin(k\omega_1 t)\sin(n\omega_1 t)\,dt = \sum_k b_k \frac{T}{2}\delta_{kn} = \frac{T}{2} b_n$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_1 t)\,dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int dt\, f(t) \quad ; \quad a_k = \frac{2}{T}\int dt\, f(t)\cos(k\omega_1 t) \quad ; \quad b_k = \frac{2}{T}\int dt\, f(t)\sin(k\omega_1 t)$$

$$\vec{e}^{(k)}\vec{e}^{(l)} = \delta_{kl} \qquad \vec{v} = \sum_k c_k \vec{e}^{(k)} \quad / \vec{e}^{(n)}$$

$$\vec{v}\vec{e}^{(n)} = \sum c_k \left(\vec{e}^{(k)}\vec{e}^{(n)}\right) = \sum_k c_k \delta_{kn} = c_n$$

$$c_k = \vec{v}\vec{e}^{(k)}$$

Fvek skaláris szorzata: $f(t); g(t)$

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) g(t)\,dt = (f ; g) \rightarrow$$ Egy fv. önmagával vett szorzatának ... $\rightarrow$

... integrálja lehet 0 akkor is, ha a fv nem = 0.
Pl: egy olyan fv, ami egy pontban $\neq 0$, a többiben $= 0$.
Emiatt lett bevezetve a Lebesgue-féle nullmérték / majdnem mindenütt /. Így már értelmezhető a fvek skalárszorzata. (A fenti példa fv. majdnem mindenütt 0.)

Felírás:

$$c_0 = 1$$
$$c_n = \cos(n\omega_1 t)$$
$$s_n = \sin(n\omega_1 t)$$

$$f = a_0 c_0(t) + \sum_n a_n c_n(t) + \sum_n b_n s_n(t)$$

$$(f; c_0) = a_0 (c_0; c_0) \quad \text{(skalárszorzat)}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}(f, c_0)$$

$$(f, c_n) = a_0 (c_0, c_n) + \sum a_k (c_k, c_n) + \sum b_k (s_k c_n) = \frac{T}{2} a_n$$

$\boxed{11.12.}$

T periódusidő

$$f(t+T) = f(t)$$
$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_1 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_1 t)$$

$$\vec{v} = \sum_k v_k \vec{e}^{(k)}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt \; 1 \cdot f(t)$$

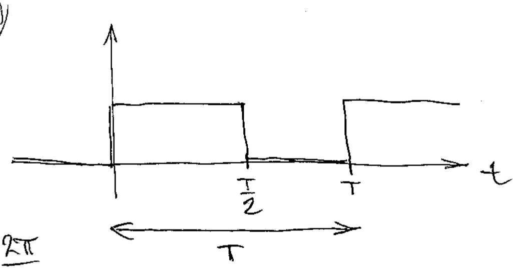
$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt \; f(t)\cos(k\omega_1 t) \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt \; f(t)\sin(k\omega_1 t)$$

Skalárszorzat: $(f, g) = \int dt \; f(t) g(t)$

(M) Valódi periodikus fv a valóságban nem létezik, hiszen az a $(-\infty)$-ben kezdődik és $(+\infty)$-ig tart.

(M) Valóságban: véges intervallumon értelmezett fvek.

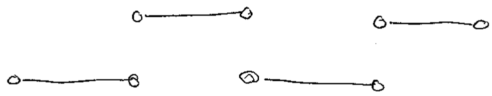
(P)



$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

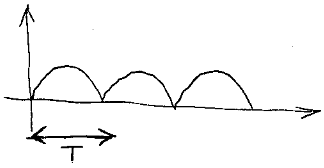
„igazából" $\longrightarrow$

vagy



(de az integrálásnál ez nem számít)

(M) $|\sin(\Omega t)|$ periódusideje:



$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi/\Omega} = 2\Omega$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} 1\, dt = \frac{1}{T}\cdot\frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\cos(k\omega_1 t) = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} dt\, \cos(k\omega_1 t) = \frac{2}{T}\left[\frac{\sin(k\omega_1 t)}{k\omega_1}\right]_{t=0}^{t=\frac{T}{2}} =$$

$$= \frac{2}{T}\,\frac{1}{k\omega_1}\sin\left(k\omega_1 \frac{T}{2}\right) = \frac{2}{T}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{T}{2\pi}\cdot\sin\left(k\,\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{k\pi}\cdot\sin(k\pi) =$$

$$= 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\sin(k\omega_1 t) = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} dt\, \sin(k\omega_1 t) = (**) \rightarrow$$

Másik módszer b_k kiszámolására: $\rightarrow$

$\Rightarrow$ $y := \omega_1 t$ $\qquad t=0 \longrightarrow y=0$

$t = \dfrac{y}{\omega_1}$ $\qquad t=\dfrac{T}{2} \longrightarrow y = \dfrac{\omega_1 T}{2} = \pi$

$dt = \dfrac{dy}{\omega_1}$

$$(**) = \frac{2}{T}\int_{y=0}^{\pi} \frac{dy}{\omega_1} \sin(ky) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dy \sin(ky) = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(ky)}{k}\right]_{y=0}^{\pi} =$$

$[\cos k\pi = (-1)^k]$

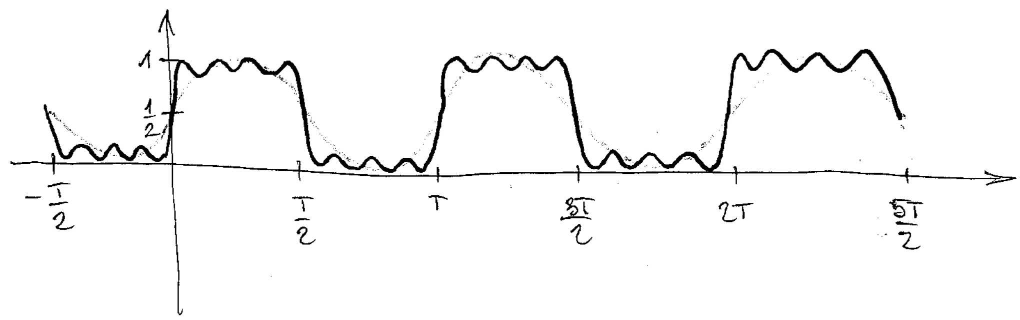
$$= \frac{1}{k\pi}\left(-\cos k\pi + \cos 0\right) = \frac{1}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right) = \frac{2}{k\pi}\left(\frac{1-(-1)^k}{2}\right)$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_1 t) + \dots\right)$$

$\Downarrow$

(Ez a négyszögjel Fourier-sora.)

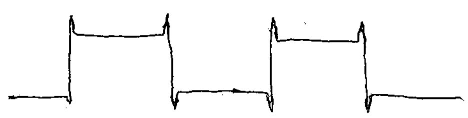
Lerajzolva:



Tehát érdemes a fot úgy definiálni, hogy:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T/2 \\ 1/2 & t = T/2 \\ 0 & T/2 < t < T \\ 1/2 & t = T \end{cases}$$

(M) írd: a szakadásnál kicsit túllő:



$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{e^{ik\omega_1 t} + e^{-ik\omega_1 t}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \frac{e^{ik\omega_1 t} - e^{-ik\omega_1 t}}{2i} =$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega_1 t} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega_1 t} =$$

$$= a_0 e^{i0\omega_1 t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} \cdot e^{ik\omega_1 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} e^{ik\omega_1 t} =$$

$$\left[C_0 := a_0 \;;\; C_k := \frac{a_k - ib_k}{2} \text{ ha } k > 0 \;;\; C_k := \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} \text{ ha } k<0\right]$$

$$\left[C_{-k} = C_k^* \quad (\text{kompl. konj.})\right]$$

$$= C_0 e^{i0\omega_1 t} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{ik\omega_1 t} + \sum_{k=-\infty}^{-1} C_k e^{ik\omega_1 t}$$

A Fourier-sor komplex alakja:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_1 t}$$

$$C_0 = a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\cdot 1 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\, e^{-i0\omega_1 t}$$

$k>0$: $$C_k = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\cos(k\omega_1 t) - i\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\sin(k\omega_1 t)\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\left(\cos(k\omega_1 t) - i\sin(k\omega_1 t)\right) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\, e^{-ik\omega_1 t}$$

$k<0$: $$C_k = \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\cos(-k\omega_1 t) + i\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\sin(-k\omega_1 t)\right) =$$

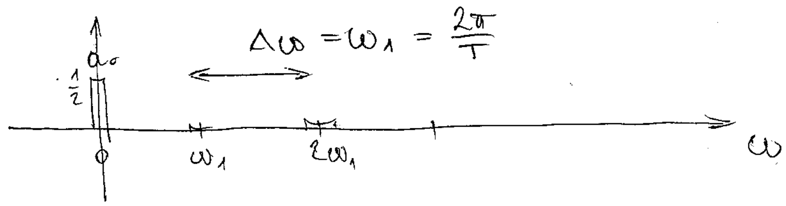
$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\left(\cos(-k\omega_1 t) + i\sin(-k\omega_1 t)\right) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\left(\cos(k\omega_1 t) - i\sin(k\omega_1 t)\right) =$$

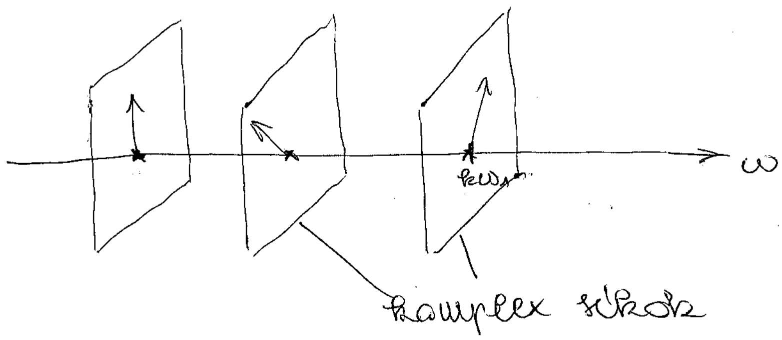
$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\, e^{-ik\omega_1 t}$$

Tehát minden k-ra: $c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\, e^{-ik\omega_1 t}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$, $k \in \{-\infty, \dots, \infty\}$

Nemperiodikus függvények: $T \to \infty$

- probléma: ha $T \to \infty$, akkor $c_k = \frac{1}{T}\int \cdots = 0$
- rajzoljuk le az $\{a_k, b_k\}$ együtthatókat!:





$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\quad (T \to \infty) \Rightarrow$ az összes ω frekvencia előfordul ha $T \to \infty$, mert $\Delta\omega \to 0$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_1 t} = \sum_k \frac{c_k}{\Delta\omega} \cdot e^{ik\omega_1 t} \cdot \Delta\omega$$

$$\frac{c_k}{\Delta\omega} = \frac{T}{2\pi} c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\, e^{-ik\omega_1 t}$$

$$T \to \infty \iff \omega_1 \to 0$$

$$\frac{C_k}{\Delta\omega} \to F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, e^{-i\omega t}$$

(M) a "$k\omega_1$" diszkrét változó helyett : "ω" folytonos változó

$$k\omega_1 \to \omega$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \quad \left(= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\cdot e^{i\omega t}\, d\omega \right)$$

Fourier-integrale

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \quad \left(= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \right)$$

(M) Ha nagyon más jelöléssel írjuk ugyanezt: $e^{-i\omega t} = R_{\omega t}$, $e^{i\omega t} = S_{t\omega}$

$$\left.\begin{aligned} f_t &= \sum_{\omega} S_{t\omega} F_{\omega} \\ F_{\omega} &= \sum_{t} R_{\omega t} f_t \end{aligned}\right\} \text{ uniter bázistranszformáció}$$

$$\frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} = R_{\omega t} \qquad \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} = S_{\omega t}$$

(M) Kétváltozós fv. $\equiv$ folytonos mátrix

Transzformáció az időtartomány és a frekvenciatartomány között.

Gyakorlati probléma: $\int_{-\infty}^{\infty}$

Fourier-transzformáció általánosítása $\equiv$ Laplace transzformáció ahol $\omega \in \mathbb{C}$

Gauss-görbe: a F-transzformáltja hasonló alakú, mint a fv:

$$e^{-\alpha t^2} \xrightarrow{F-t} e^{-\beta\omega^2}$$  (haranggörbe)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ e^{-\beta t}\dfrac{\sin\Omega t}{\Omega} & t>0 \end{cases}$$

(csillapított ~~harmonikus~~ oszcillátor Green-fv-e)

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dt\, e^{-\beta t}\frac{\sin\Omega t}{\Omega}\, e^{-i\omega t} = \frac{1}{2\pi\Omega}\int dt\, e^{-\beta t}\,\frac{e^{i\Omega t}-e^{-i\Omega t}}{2i}\, e^{-i\omega t} =$$

$$= \frac{1}{4i\Omega\pi}\cdot\int_0^\infty dt\left(e^{(-\beta+i\Omega-i\omega)t} - e^{(-\beta-i\Omega-i\omega)t}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi i\Omega}\left[\frac{e^{(-\beta+i\Omega-i\omega)t}}{-\beta+i\Omega-i\omega} - \frac{e^{(-\beta-i\Omega-i\omega)t}}{-\beta-i\Omega-i\omega}\right]_{t=0}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{4\pi i\omega}\cdot\left(\frac{-1}{-\beta+i\Omega-i\omega} - \frac{-1}{-\beta-i\Omega-i\omega}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi i\Omega}\left(\frac{1}{\beta+i(\omega-\Omega)} - \frac{1}{\beta+i(\omega+\Omega)}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi i\Omega}\left(\frac{1}{(\beta+i\omega)-(i\Omega)} - \frac{1}{(\beta+i\omega)+(i\Omega)}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi i\Omega}\cdot\frac{2i\Omega}{(\beta+i\omega)^2-(i\Omega)^2} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\beta^2+2i\beta\omega-\omega^2+\Omega^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\omega_0^2+2i\beta\omega-\omega^2} \qquad \left[\Omega^2 = \omega_0^2-\beta^2\right]$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\,\frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2+2i\beta\omega-\omega^2} = \text{(komplex fvtan kell a kiszámításhoz, de)} = \begin{cases} 0 \\ e^{-\beta t}\dfrac{\sin\Omega t}{\Omega}\end{cases}$$

$\boxed{11.19.}$

$$f(t) = \int_{\omega=-\infty}^{\infty} d\omega \, F(\omega) \, e^{i\omega t} \qquad F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, f(t) \, e^{-i\omega t}$$

megfeleltetés: $v_k = \sum_\ell S_{k\ell} v'_\ell$ ahol: $k \leftrightarrow t$ $\quad v_k \leftrightarrow f(t)$

$$v'_\ell = \sum_k R_{\ell k} v_k$$

$\sum_\ell \leftrightarrow \int d\omega \quad v'_\ell \leftrightarrow F(\omega)$

$S_{k\ell} = e^{it\omega} \quad \sum_k \leftrightarrow \int dt$

$\ell \leftrightarrow \omega \quad R_{\ell\ell} \leftrightarrow \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi}$

$$v_k = \sum_\ell S_{k\ell} v'_\ell = \sum_\ell S_{k\ell} \left(\sum_m R_{\ell m} v_m \right) =$$

$$= \sum_m \left(\sum_\ell S_{k\ell} R_{\ell m} \right) v_m = \sum_m (\underline{\underline{S}}\underline{\underline{R}})_{km} v_m =$$

$$\Rightarrow \quad v_k = \sum_m \delta_{km} v_m \qquad \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}}$$ (**) → ennek megfeleltethető

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, f(\tau) \, e^{-i\omega \tau}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, e^{i\omega t} F(\omega) = \int d\omega \, e^{i\omega t} \left(\int d\tau \, \frac{e^{-i\omega\tau}}{2\pi} f(\tau) \right) =$$

$$= \int d\omega \int d\tau \, \frac{e^{it\omega} e^{-i\omega\tau}}{2\pi} f(\tau) = \int d\tau \Bigg(\underbrace{\int d\omega \, \frac{e^{it\omega} e^{-i\omega\tau}}{2\pi}}_{\text{Dirac-delta}} \Bigg) f(\tau) =$$

$$= \int d\tau \, \delta(t-\tau) \, f(\tau) = f(t)$$

(**) ez:

$$\int d\omega \, \frac{1}{2\pi} e^{i\omega(t-\tau)} = \delta(t-\tau)$$

$$\int d\omega \, \frac{1}{2\pi} e^{i\omega t} = \delta(t)$$

$$f(t) = \int d\omega \; F(\omega)\, e^{i\omega t}$$

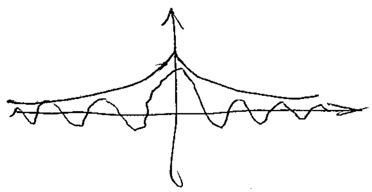
$$\delta(t) = \int d\omega \; \frac{1}{2\pi}\, e^{i\omega t}$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left(\cos\omega t + i\sin\omega t\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \sin(\omega t) = 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \cos(\omega t) = 2\pi\,\delta(t)$$

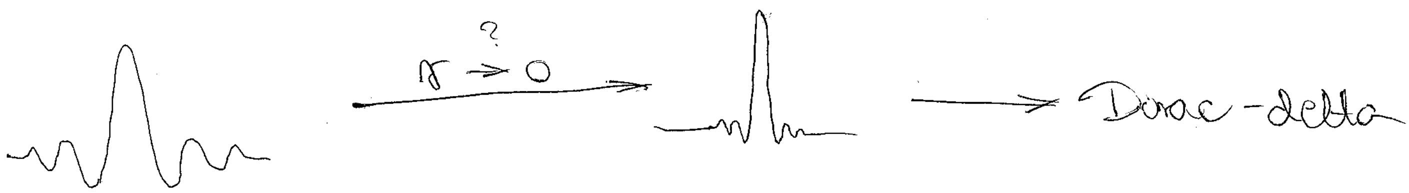
(M) $\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\, d\omega = \lim_{A\to\infty} \lim_{B\to\infty} \int_{-A}^{B} f(\omega)\, d\omega$ → improprius integrál, ezek az integrálok nem léteznek (attól függ, h a „végtelenben" ~~hogy vesszük~~ a szinuszt mikor hagyjuk abba)

Mo: fv. tompítása exp. lecsengéssel,



Tompító fv: $e^{-\gamma(\omega)}$

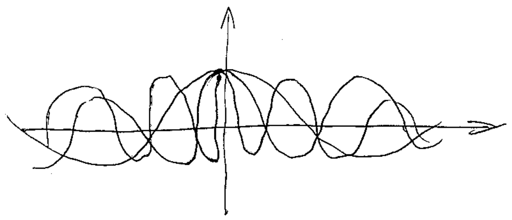
Eredmény:



(M) Végtelen diffrakciós ráccsal Dirac-d. hozható létre

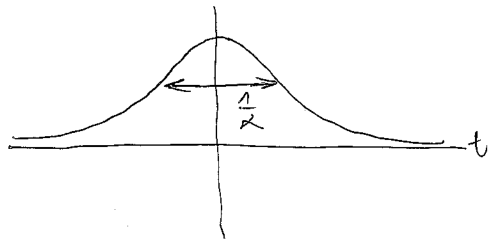
(M) $\int_{0}^{\infty} d\omega \; \cos(\omega t) = \pi \cdot \delta(t)$

Különböző frekv. koszinuszok összeadása. (∞ sok)



A nullában erősítik egymást, mindenütt máshol kioltják.

Gauss-görbe: $f(t) = e^{-\alpha t^2}$



görbe alatti terület:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Gauss-típusú integrálok.

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int dt\, e^{-i\omega t}\, e^{-\alpha t^2} = \frac{1}{2\pi}\int e^{-\alpha t^2 - i\omega t} dt =$$

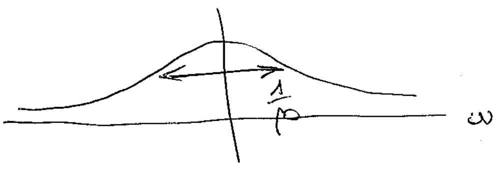
(ua.: teljes négyzetté alakítással)

$$= \frac{1}{2\pi}\int e^{-\alpha\left(t^2 + \frac{i\omega t}{\alpha}\right)} dt = \frac{1}{2\pi}\int dt\, e^{-\alpha\left[\left(t+\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2\right]} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int dt\, e^{-\alpha\left(t+\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4\alpha}} = \frac{1}{2\pi}\int dt\, e^{-\alpha\left(t+\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \int dt\, e^{-\alpha(t-t_0)^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} =$$

$$= C \cdot e^{-\beta\omega^2}$$



$\beta = \frac{1}{4\alpha}$

$\alpha\beta = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{\alpha} \sim \Delta t$

$\frac{1}{\beta} \sim \Delta\omega$

(M) A fv el van tolva, de ettől még az integrál ua. ((B) komplex sík tétel)

$\Delta t\,\Delta\omega \sim \frac{1}{4}$ $\longrightarrow$ Heisenberg-féle határozatlansági elv

(Pontosan: $\Delta t\,\Delta\omega \geq \frac{1}{4}$ (ha nem Gauss-görbét használunk))

((Gauss-görbe és a Fourier-transzformáltjának szélességének szorzata)).

Általános séma:

$\underline{L(D)\,u(t) = f(t)}$ $\quad f \longrightarrow \boxed{L} \longrightarrow u$

0.) $\varphi_k(t)$

1.) $f(t) = \sum_k c_k\,\varphi_k(t) \Rightarrow c_k$

2.) $L(D)\,\xi_k(t) = \varphi_k(t) \Rightarrow \xi_k(t)$

3.) $u(t) = \sum_k c_k\,\xi_k(t)$

Green-függvénnyel:

0.) $\delta(t-\tau)$

1.) $f(t) = \int d\tau\, f(\tau)\,\delta(t-\tau)$

2.) $L(D)\,G(t-\tau) = \delta(t-\tau)$

3.) $u(t) = \int d\tau\, f(\tau)\,G(t-\tau)$

Fourier-módszer:

0.) $e^{i\omega t}$

1.) $f(t) = \int d\omega\, F(\omega)\,e^{i\omega t}$ $\longrightarrow$ eddig jutottunk

$e^{i\omega t} \longrightarrow \boxed{} \xrightarrow{?} C\,e^{i\omega t}$ $\quad C \in \mathbb{C}$

a bemenő is komplex

M tranziens = átmeneti állapot

Rezgések: „valós rezgések" $\longrightarrow \mathrm{Re}(C \cdot e^{i\omega t})$ $\Rightarrow$

$$\mathrm{Re}(C\cdot e^{i\omega t}) = \mathrm{Re}(A\cdot e^{-i\varphi}\cdot e^{i\omega t}) = \mathrm{Re}(A e^{i(\omega t-\varphi)}) = A\cdot\cos(\omega t-\varphi)$$

(M) φ: mennyit késik a jel

$A(\omega)$ = amplitúdó karakterisztika

$\varphi(\omega)$ = fázis karakterisztika

$$L(D)(C\cdot e^{i\omega t}) = e^{i\omega t}$$

$$C\, L(D)\, e^{i\omega t}$$

$C(\omega)$ átviteli fv

$$C\, L(i\omega)\cdot e^{i\omega t} = e^{i\omega t}$$

$$C = \frac{1}{L(i\omega)} = C(\omega) = A(\omega)\, e^{-i\varphi(\omega)}$$

Homogén esetben: $L(D)\, u(t) = 0$

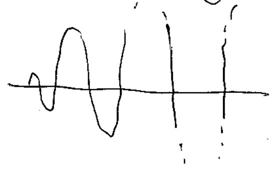
tfh. $u = e^{i\omega t}$

$$L(D)\, e^{i\omega t} = L(i\omega) e^{i\omega t} = 0$$

$$L(i\omega) = 0$$

(M) Eml: Cramer-szabály: $L(i\omega)$ a determinánsnak felel meg, hom. esetben az a jó, ha nulla, inhom. esetben pedig osztunk vele.

(M) Rezonanciakatasztrófa matematikailag: itt nullával kellene osztani. $\rightarrow$ nincs $e^{i\omega t}$ alakú mo.



Fourier fdgt:

2.) $L(D)(C(\omega)e^{i\omega t}) = e^{i\omega t} \Rightarrow C(\omega) = \frac{1}{L(i\omega)}$

3.) $u(t) = \int d\omega\, F(\omega)\, C(\omega)\, e^{i\omega t}$

(M) Green 3.) $\equiv$ Fourier 3.) $\rightarrow$ lássuk be!

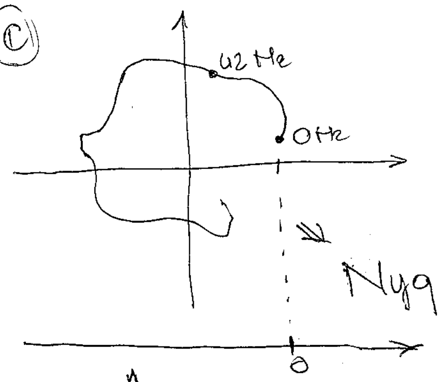
Z→ $u(t) = \int d\omega\, F(\omega)\, C(\omega)\, e^{i\omega t} = \int d\omega \left(\int d\tau \frac{1}{2\pi} f(\tau)\, e^{-i\omega\tau} \right) C(\omega)\, e^{i\omega t} =$

$= \int d\tau \left[\int d\omega \frac{1}{2\pi} C(\omega)\, e^{i\omega(t-\tau)} \right] f(\tau) = \int d\tau\, G(t-\tau)\, f(\tau)$

(M) A két módszer (G, F) egymás F-transzf.-ja.

$C(\omega) = \frac{1}{L(i\omega)} = \otimes$ → komplex értékű fv.

(C)

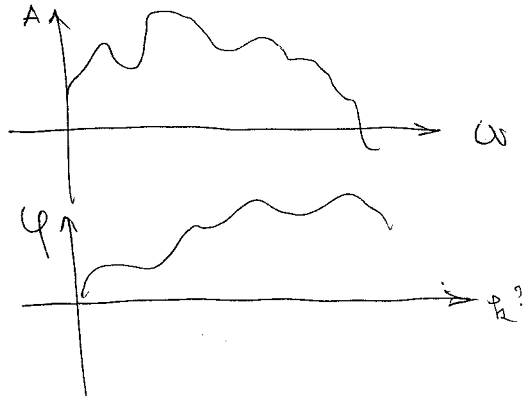


→ görbe

⇘ Nyquist-diagram

⇕

$\circledast = A(\omega)\, e^{-i\varphi(\omega)}$ →



$L(D) = D^2 + 2\beta D + \omega_0^2$

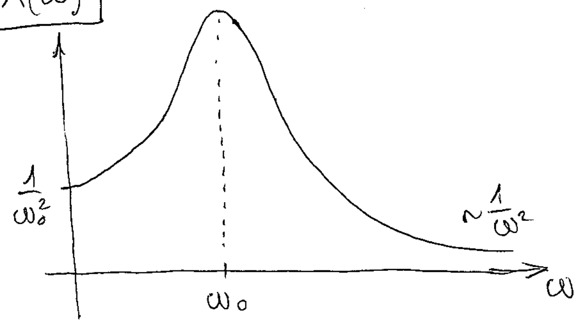
$L(i\omega) = (i\omega)^2 + 2\beta i\omega + \omega_0^2 = (\omega_0^2 - \omega^2) + i(2\beta\omega)$

$C(\omega) = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i2\beta\omega} = \frac{1}{a + i\beta} = \frac{a - i\beta}{a^2 + \beta^2} = A e^{-i\varphi} = A(\cos\varphi - i\sin\varphi)$

$A(\omega) = |C(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$ (ampl. kar. képlete)

$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\beta}{a} = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ (fáziskar. képlete)

$\boxed{A(\omega)}$



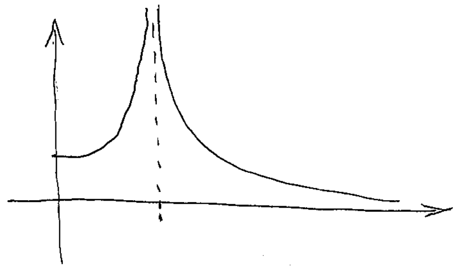
→ Breit-Wigner görbe (rezonanciagörbe)

(M.) Minél nagyobb β, annál laposabb!

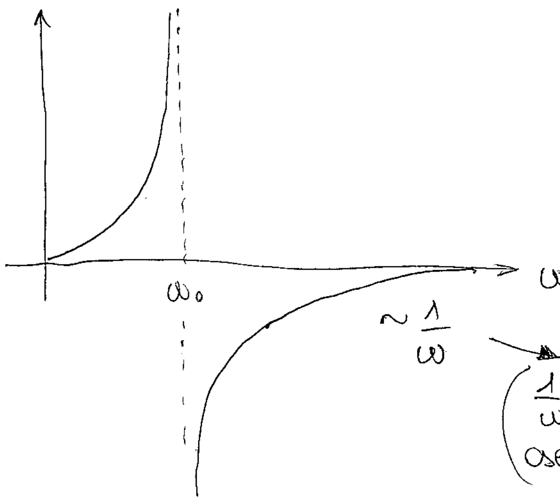
Spec. $\beta = 0$ → $A(\omega) = \frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$

↓

"végtelen magas csúcs"

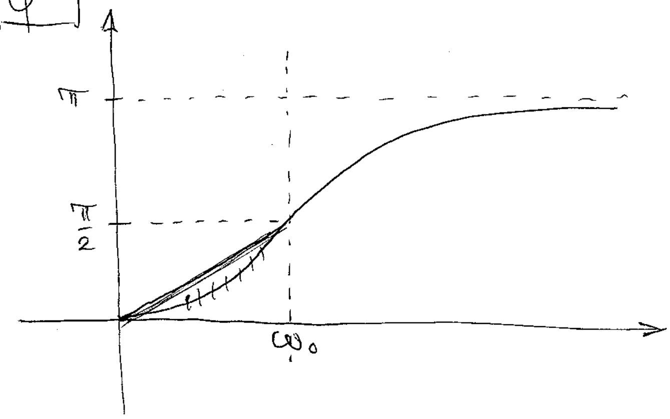


$\boxed{tg\varphi}$

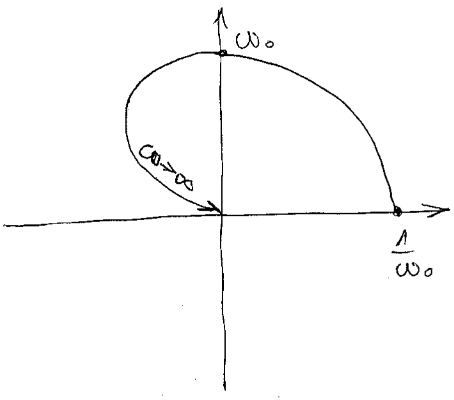


→ ($\frac{1}{\omega}$-val cseng le)

$\boxed{\varphi}$



$\boxed{\text{Nyquist-diagram}}$



11. 26.

$$L(D)\,u(t) = f(t) \longrightarrow$$

0.) $\varphi_k(t)$

1.) $f(t) = \sum_k c_k \varphi_k(t) \Rightarrow c_k$

2.) $L(D)\,\xi_k(t) = \varphi_k(t) \Rightarrow \xi_k(t)$

3.) $u(t) = \sum_k c_k\, \xi_k(t)$

Green-módszer:	Fourier-módszer:
0.) $\delta(t-\tau)$	0.) $e^{i\omega t}$
1.) $f(t) = \int d\tau\, f(\tau)\,\delta(t-\tau)$	1.) $f(t) = \int d\omega\, F(\omega)\, e^{i\omega t}$
2.) $L(D)\,G(t,\tau) = \delta(t-\tau)$	2.) $L(D)\left(C(\omega) e^{i\omega t}\right)$
3.) $u(t) = \int d\tau\, f(\tau)\, G(t-\tau)$	3.) $u(t) = \int d\omega\, F(\omega)\, C(\omega)\, e^{i\omega t}$

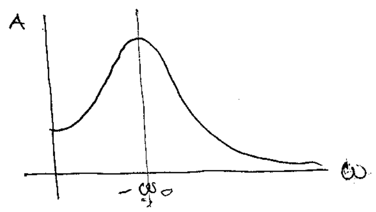
$\longrightarrow F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int dt\, f(t)\, e^{-i\omega t}$

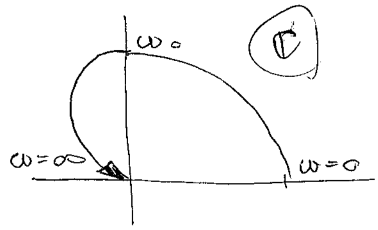
$$G(t) = \int d\omega\, \frac{1}{2\pi}\, C(\omega)\, e^{i\omega t}$$

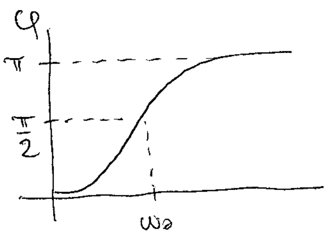
Spec. $L(D) = D^2 + 2\beta D + \omega_0^2$

$L(i\omega) = -\omega^2 + 2\beta i\omega + \omega_0^2$

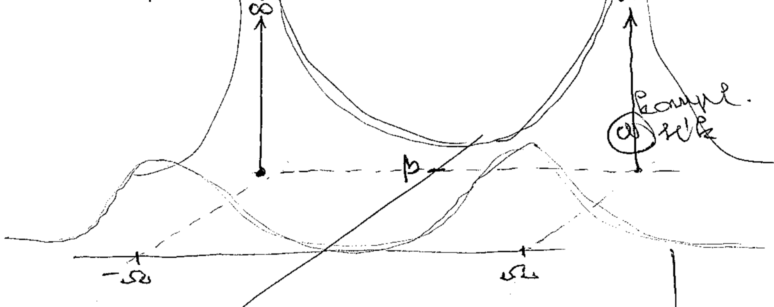
$$C(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\beta\omega} = A(\omega)\, e^{-i\varphi(\omega)}$$







Komplex frekvenciasík:

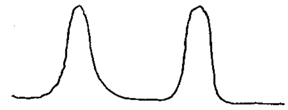


rezonanciagörbe (fr. metszete)

$\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega = 0$

$\omega_{1,2} = i\beta \pm \Omega$

$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

2→ M: ha a β kicsi (közel van a valós ω tengelyhez): 

ha a β nagy: 

ha β = 0:  (rezonanciakatasztrófa)

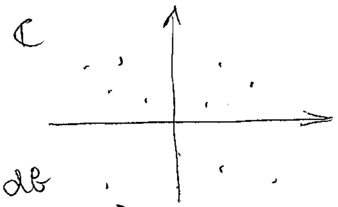
Bonyolultabb rendszerek:

tfh. egyszeresek

n-edfokú egyenlet: $L(i\omega) = \omega^n + \dots = (\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)\cdots(\omega-\omega_n)$

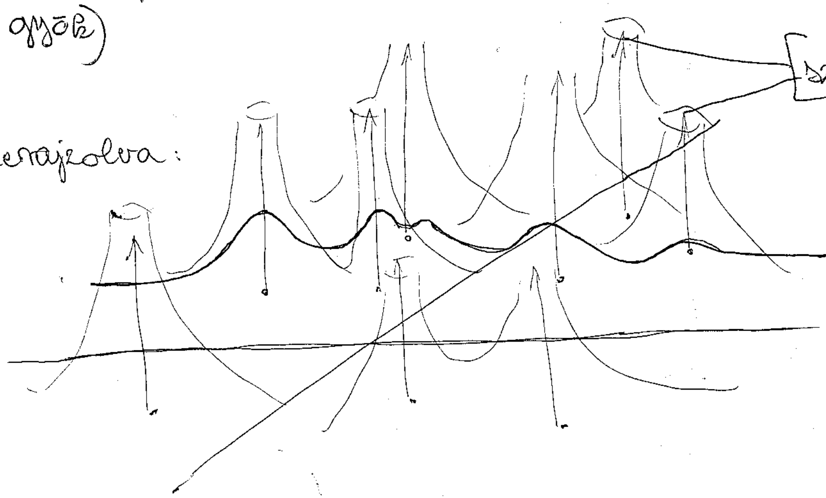
$$C(\omega) = \frac{1}{(\omega-\omega_1)\cdots(\omega-\omega_n)} = \text{(parciális törtekre bontás)} =$$

$$= \frac{\alpha_1}{\omega-\omega_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{\omega-\omega_n}$$



(n db komp. gyök)

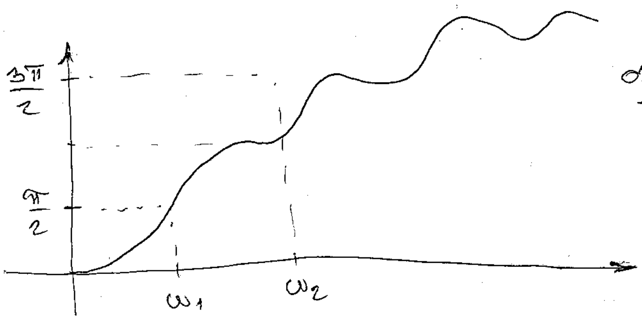
Lerajzolva:

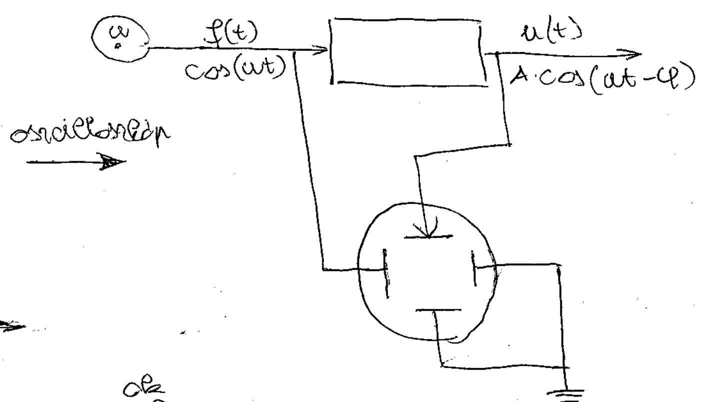


[szinguláris helyek ≡ ≡ pólusok]

rezonanciagörbe (rekonstruálható belőle)

Fáziskarakterisztika:





Frekvencia változtatása ⇒ Rezonanciapontokban: vízszintes tengelyű ellipszist mutat (meghatározhatók az r. pontok)

(eljárás neve: áramkör analízise)

⇓

(rendszert leíró diffegyenlet)

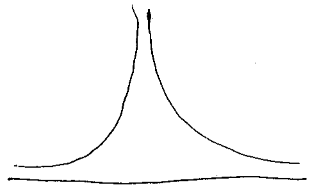
⇓

matematikai eljárás neve: polológia (pólusok ...)

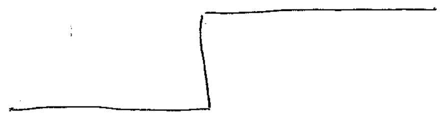
~~[illegible]~~

(M) $\beta = 0$

$C(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$



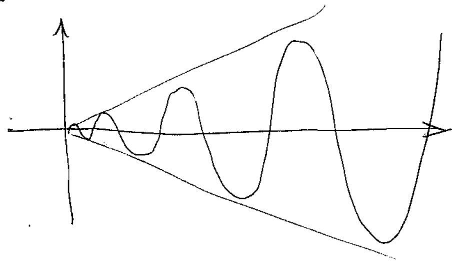
Fázisgörbe:



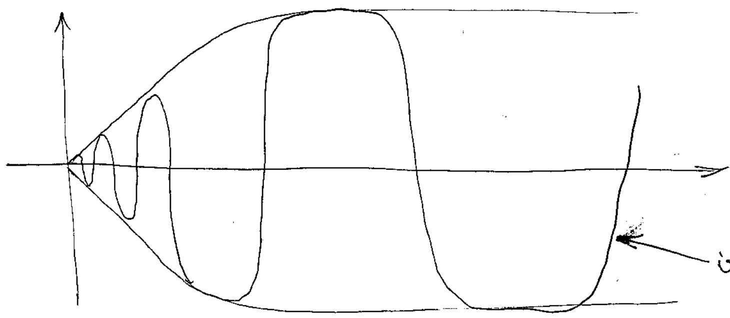
$\ddot{u} + \cancel{2\beta\dot{u}} + \omega_0^2 u = e^{i\omega_0 t}$

$u = t \cdot \cos\omega t$

} egyenlet formális megoldása:



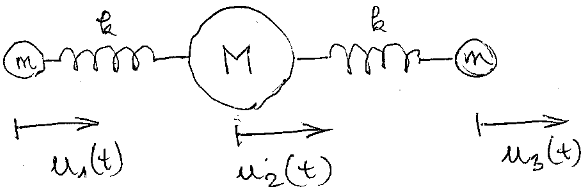
ill.: nem-lineáris egyenlet
„leszakad a híd"



itt már nem szinuszos

[eddig: 1 df golyó (csillapított) mozgása]

[mostantól: több golyó csillapítatlan mozgása]



(M) gravitáció most nincs

Keressük: mindhárom golyó elmozd. fvét az idő fvében (mindnek a saját egyensúlyi helyzetéből való kitérését)

1.) $m\ddot{u}_1(t) = k(u_2 - u_1)$

2.) $M\ddot{u}_2(t) = k(u_1 - u_2) + k(u_3 - u_2)$

3.) $m\ddot{u}_3(t) = k(u_2 - u_3)$

→ difiegyenletrendszer

→ 2

→ közönséges
lineáris
állandó együtthatós
homogén

} diffegyenletrendszer

(6 db. KF.)

$$m\ddot{u}_1 + 0\cdot\ddot{u}_2 + 0\cdot\ddot{u}_3 = -ku_1 + ku_2 + 0\cdot u_3$$

$$0\cdot\ddot{u}_1 + M\cdot\ddot{u}_2 + 0\cdot\ddot{u}_3 = ku_1 - 2ku_2 + ku_3$$

$$0\cdot\ddot{u}_1 + 0\cdot\ddot{u}_2 + m\cdot\ddot{u}_3 = 0u_1 + ku_2 - ku_3$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & k & 0 \\ k & -2k & k \\ 0 & k & -k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{u}} = -\underline{\underline{K}}\,\underline{u}$$

K.a.m. $\underline{a}\cdot f(t)$ alakban (vektor · időfüggő fv) ~~at~~

KF: $\underline{u}(t=0) = \underline{u}_0$

$\underline{\dot{u}}(t=0) = \underline{v}_0$

Tfh: $\underline{u}(t) = \underline{a}\cdot e^{i\omega t}$ (megsejtettük, h ilyen alakban kell keresni)

$$\underline{\ddot{u}}(t) = -\omega^2\,\underline{a}\,e^{i\omega t}$$

$$\underline{\underline{M}}(-\omega^2)\,\underline{a}\cdot e^{i\omega t} = -\underline{\underline{K}}\,\underline{a}\cdot e^{i\omega t}$$

$\underline{\underline{M}}^{-1}/\ \omega^2\underline{\underline{M}}\,\underline{a} = \underline{\underline{K}}\,\underline{a}$

$$\omega^2\underline{a} = \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}}\,\underline{a} \qquad \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}} := \underline{\underline{A}}$$

$\boxed{\underline{\underline{A}}\,\underline{a} = \omega^2\underline{a}}$ → $\underline{\underline{A}}$ sajátértékproblémája → 3 sé.

M) ált. mo: lin. kombinációja a sé.-kek behelyettesítésével kapott mo.-nak

$\underline{\underline{A}}$ ált. nem szimmetrikus,
a sé.ei megis valósak → mert

$$\omega^2 \underline{\underline{M}}\,\underline{a} = \underline{\underline{K}}\,\underline{a}$$

$$\sqrt{\underline{\underline{M}}}^{-1} / \;\omega^2 \sqrt{\underline{\underline{M}}}\sqrt{\underline{\underline{M}}}\,\underline{a} = \underline{\underline{K}}\,\underline{a}\,\sqrt{\underline{\underline{M}}}^{-1}\sqrt{\underline{\underline{M}}}$$

$$\omega^2 \sqrt{\underline{\underline{M}}}\,\underline{a} = \underbrace{\left(\sqrt{\underline{\underline{M}}}^{-1} \underline{\underline{K}} \sqrt{\underline{\underline{M}}}^{-1}\right)}_{\underline{\underline{B}}} \underbrace{\sqrt{\underline{\underline{M}}}\,\underline{a}}_{\underline{c}}$$

$$\tilde{\underline{\underline{B}}} = \underline{\underline{B}}$$

$\underline{\underline{B}}$ már szimmetrikus, így valósak a sé.ek

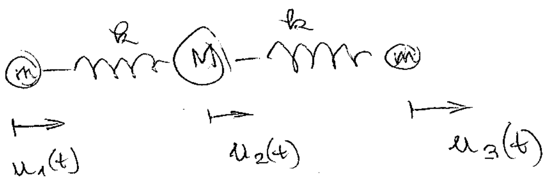
$$\omega^2 \underline{c} = \underline{\underline{B}}\,\underline{c}$$

Ezt megcsináltuk, így tudjuk, h. a sé.ek valósak!

(M) ω^2 negatív → instabil egyensúlyi helyzet

ω^2 pozitív → stabil

$\boxed{12.10.}$



→ csak vízszintesen mozoghat

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 = k(u_2 - u_1) \\ M\ddot{u}_2 = k(u_1 - u_2) + k(u_3 - u_2) \\ m\ddot{u}_3 = k(u_2 - u_3) \end{cases}$$

→ KF. pl.: $t = 0$

$\underline{u}(0) = \underline{u}_0$

$\dot{\underline{u}}(0) = \underline{v}_0$

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{u}} = \underline{\underline{K}}\,\underline{u}$$

Tfh. $\underline{u}(t) = \underline{a} \cdot e^{i\omega t}$

$$\ddot{\underline{u}} = -\omega^2 \cdot \underline{u}$$

$\ddot{\underline{u}} = (\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}})\,\underline{u}$ → ez még ∞ sok megoldás (lin. komb.)

$$\left.\begin{aligned} \ddot{u}_1 &= -\frac{k}{m}u_1 + \frac{k}{m}u_2 \\ \ddot{u}_2 &= -\frac{k}{M}u_1 - \frac{2k}{M}u_2 + \frac{k}{M}u_3 \\ \ddot{u}_3 &= \frac{k}{m}u_2 - \frac{k}{m}u_3 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}^{\cdot\cdot} = \begin{bmatrix} -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & 0 \\ \frac{k}{M} & -\frac{2k}{M} & \frac{k}{M} \\ 0 & \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = -\frac{k}{m} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{m}{M} & \frac{2m}{M} & -\frac{m}{M} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \end{bmatrix}$$

$c := \frac{m}{M}$ → dimenziótlan szám (egyetlen ilyen a mátrixon belül!) $(c > 0)$

$$\ddot{\underline{u}} = -\omega_0^2 \underline{\underline{B}}\, \underline{u} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}(t) = \underline{a} \cdot e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\underline{u}} = -\omega^2 \underline{a} \cdot e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 \underline{a} e^{i\omega t} = -\omega_0^2 \underline{\underline{B}}\, \underline{a} \cdot e^{i\omega t}$$

$\underline{\underline{B}}\, \underline{a} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \underline{a}$ → sajátértékprobléma

$$\underline{\underline{B}} \to \lambda \qquad \omega = \omega_0 \sqrt{\lambda}$$

$$Sp(\underline{\underline{B}}) = 2 + 2c$$

$$\Sigma d(\underline{\underline{B}}) = c + 1 + c = 2c + 1$$

$\det(\underline{\underline{B}}) = 0$ (mert a belső erők összege nulla → zárt r.)

$$\lambda^3 - (2 + 2c)\lambda^2 + (2c+1)\lambda - 0 = 0$$

↓

(az egyik (sé.) frekvencia nulla lesz → „odébbtesz-szük a teljes rendszert" → szimmetria!)

↳ (nem nyúlik meg egyik rugó sem!)

($\lambda = 0$-hoz tartozó sajátalter. Pl. térbeli molekuláknál 6 szabadsági fok → 6 elforgatás/eltolás) → zérus módusok

$$\lambda\left(\lambda^2 - (2 + 2c)\lambda + (2c+1)\right) = 0 \qquad \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{2+2c \pm \sqrt{(2+2c)^2 - 4(2c+1)}}{2} = \frac{2+2c \pm \sqrt{4+8c+4c^2-8c-4}}{2} =$$

$$= \frac{2+2c \pm 2c}{2} = 1 + c \pm c \quad \begin{array}{l} \nearrow 1 \\ \searrow 1+2c \end{array}$$

$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = 1; \quad \lambda_3 = 1+2c$

$\underline{\lambda_1 = 0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{a}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ → eltolódás (a tkp. elmozdul)

$\underline{\lambda_2 = 1}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -c & 2c-1 & -c \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{a}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$ → a középső golyó nem moccan, a két kicsi rezeg „tükrözötte"
($\underline{a}$ = polarizációs vektor)

$\underline{\lambda_3 = 2c+1}$

(itt is)

$$\begin{bmatrix} -2c & -1 & 0 \\ -c & -1 & -c \\ 0 & -1 & -2c \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{a}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2c \\ 1 \end{bmatrix}$$ → a tkp. egy helyben marad

$\underline{\ddot{u}}(t) = -\omega_0^2 \underline{\underline{B}}\, \underline{u}$ Tfh. $\underline{u} = \underline{a} e^{i\omega t}$

$\underline{\underline{B}}\, \underline{a} = \lambda \underline{a}$ $\lambda = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$

$\hookrightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n$ és $\underline{a}^{(1)}, \dots, \underline{a}^{(n)}$

általános megoldás:

$$\underline{u}(t) = \sum_{\ell=1}^{n} \underline{a}^{(\ell)} \left(A_\ell \cos(\omega_\ell t) + B_\ell \sin(\omega_\ell t) \right)$$

(A_ℓ; B_ℓ állandóak)

M itt nem többszörösei egymásnak a frekvenciák

$$\underline{\dot{u}}(t) = \sum_{\ell} \underline{a}^{(\ell)} \left(-A_\ell \omega_\ell \sin(\omega_\ell t) + B_\ell \omega_\ell \cos(\omega_\ell t) \right)$$

$t = 0$: $\quad \underline{u}(0) = \sum_{\ell} A_\ell \underline{a}^{(\ell)} \stackrel{!}{=} \underline{u}_0$

$$\underline{\dot{u}}(0) = \sum_{\ell} B_\ell \omega_\ell \underline{a}^{(\ell)} \stackrel{!}{=} \underline{v}_0$$

(mo.: reciprok bázis $\leftrightarrow$ baloldali sajátvektorok)

(baloldali):

$\lambda_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -c & 0 \\ -1 & 2c & -1 \\ 0 & -c & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{b}^{(1)} = \frac{1}{2c+1} \begin{bmatrix} c \\ 1 \\ c \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & -c & 0 \\ -1 & 2c-1 & -c \\ 0 & -c & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{b}^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = 2c+1$

$$\begin{bmatrix} -2c & -c & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -c & -2c \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{b}^{(3)} = \frac{1}{2+4c} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b}^{(m)} \cdot / \quad \sum_{\ell} A_\ell \underbrace{\left(\underline{b}^{(m)} \underline{a}^{(\ell)} \right)}_{\delta_{m\ell}} = A_m = \underline{b}^{(m)} \underline{u}_0$$

$$B_m \omega_m = \underline{b}^{(m)} \underline{v}_0$$

$$u(t) = \sum_{\ell=1}^{n} \underline{a}^{(\ell)} \left(\left(\underline{b}^{(\ell)} \underline{u}_0 \right) \cos(\omega_\ell t) + \left(\underline{b}^{(\ell)} \underline{v}_0 \right) \frac{\sin(\omega_\ell t)}{\omega_\ell} \right)$$

(ez a végső megoldás)

ha $\omega \to 0$: egyenes vonalú egyenletes mozgás

átírva az előző:

$$\underline{u}(t) = \sum_\ell \left(\underline{a}^{(\ell)} \circ \underline{b}^{(\ell)}\right) \underline{u}_0 \cos\omega_\ell t + \sum_\ell \left(\underline{a}^{(\ell)} \circ \underline{b}^{(\ell)}\right) \underline{v}_0 \frac{\sin\omega_\ell t}{\omega_\ell} =$$

$$= \left[\sum_\ell \left(\underline{a}^{(\ell)} \circ \underline{b}^{(\ell)}\right) \underbrace{\cos\omega_\ell t}_{\cos(\omega_0\sqrt{\lambda_\ell}\, t)}\right] \underline{u}_0 + \left[\sum_\ell \left(\underline{a}^{(\ell)} \circ \underline{b}^{(\ell)}\right) \frac{\sin\omega_\ell t}{\omega_\ell}\right] \underline{v}_0 =$$

(projektorfelbontás)**

$$= \left[\cos\left(\omega_0 \sqrt{\underline{\underline{B}}}\, t\right)\right] \underline{u}_0 + \left[\frac{\sin\left(\omega_0\sqrt{\underline{\underline{B}}}\, t\right)}{\omega_0\sqrt{\underline{\underline{B}}}}\right] \underline{v}_0$$

olyan mint:

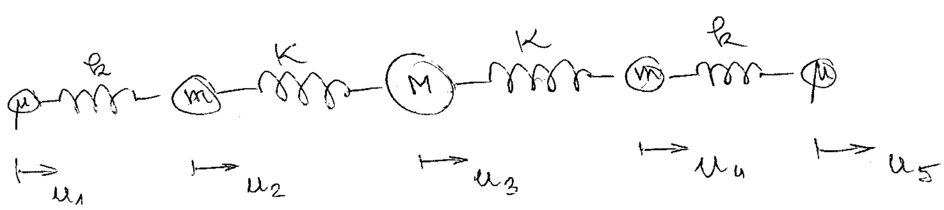
$$\Updownarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{u} &= -\omega_0 u \\ u(0) &= u_0 \\ \dot{u}(0) &= v_0 \end{aligned}\right\} \text{mo: } \quad u(t) = u_0 \cos\omega_0 t + v_0 \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}$$

** a bázisrezgésekre kell levetíteni az kérdőállapotot

<u>Hf:</u> $u(0) = \underline{0}$

$v(0) = (1, 0, 0)$



→ a kérdőállapot szimmetrikus (C_2)

Pl: van egy teljesen aszimmetrikus állapot: tükrözzük!

u_1 u_2 u_3 u_4 u_5

$u'_1 = -u_5$ $\quad u'_2 = -u_4$ $\quad u'_3 = -u_3$ $\quad u'_4 = -u_2$ $\quad u'_5 = -u_1$

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \\ u'_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & -1 \\ & & & -1 & \\ & & -1 & & \\ & -1 & & & \\ -1 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{u}$$

$$\underline{\underline{T}}^2 = \underline{\underline{1}}$$

$\downarrow$

((ha jól felírjuk a fizikai rendszert, az meghatározza a szimmetriát/ábrázolást) $\to$ (természetes ábrázolás))

(a tükrözött mozgás ua.azokat az egyenleteket elégíti ki, mint az eredeti)

$$\ddot{\underline{u}}(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{u}(t) \qquad (\underline{\underline{T}}\,\underline{u})^{\cdot\cdot} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{T}}\,\underline{u})$$

$$\underline{u}'(t) = \underline{\underline{T}}\,\underline{u}(t) \qquad \underline{\underline{T}}\,\ddot{\underline{u}}$$

$$\ddot{\underline{u}}'(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{u}'(t) \qquad \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{u}(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}\,\underline{u}(t) \quad \forall \underline{u}$$

$$\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}$$

((A kommutál T-vel; vagy: A és T kommutátora nulla))

$$\boxed{[\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{T}}] = 0}$$

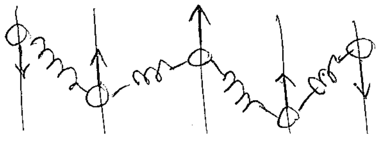
$\underline{\underline{A}}$ = dinamikát ábrázoló mátrix

$\underline{\underline{T}}$ = csoportot ábrázoló mátrix (?)

- ha két mátrix kommutál, akkor az egyik sajátvektorai benne vannak a másik sajátalterében
- ha a sv.-ok egyszeresek $\to$ uazok a sajátvektorok

(Megoldjuk a T saj.ját.) $\to$ (A-et könnyebb meghatározni)

M) ha a rendszer ilyen:



$$\longrightarrow \quad \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}$$