Hullámok és rezgések

Rezgések (a közönséges lineális differenciálegyenletek megoldása)

Az általános egyenlet

Harmonikus oszcillátor egyenlete általánosan fölírva:

- $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t)$
- $\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = f(t)$

RCL kör egyenlete (integro-differenciálegyenlet):

- $RI + L\dot{I} + \frac{1}{C}\int I dt = U(t)$
- $\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{1}{LC}I = \frac{1}{L}\dot{U}(t)$

A két rendszer egymással modellezhető (mértékegységek is megegyeznek). Az általános egyenlet ($D = \frac{d}{dt}$ operátor):

- $D^2u(t) + 2\beta Du(t) + \omega_0^2 u(t) = f(t)$
- $\left(D^2 + 2\beta D + \omega_0^2\right)u(t) = f(t)$
- $L(D)u(t) = f(t)$

A sajátrezgés ($f(t) = 0$) egyenletének (homogén differenciálegyenlet) megoldásai általánosan a meglévő u_1 és u_2 megoldásokból:

- $L(D)u_1(t) = 0 \wedge L(D)u_2(t) = 0 \Rightarrow L(D)\left(\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)\right) = 0$
- $u = 0$ nyilvánvalóan megoldás

Az inhomogén egyenlet megoldásainak levezetése egy megoldásból és a homogén egyenlet megoldásaiból:

- $L(D)u_1(t) = f \wedge L(D)(u_1 - u_2)(t) = 0 \Rightarrow L(D)u_2(t) = f$
- $U_{ihált} = U_{ihspec} + U_{hált}$
- $U_{hált} \to 0$: csillapított rezgés

A homogén egyenlet megoldása (állandó együtthatós lineális közönséges homogén differenciálegyenlet megoldása)

- $De^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t}$ (sajátfüggvény, sajátérték)
- $Df = \alpha f$
- $u(t) = e^{\lambda t}$ ($D^0 u = \lambda^0 e^{\lambda t}$)
- $D^n u = \lambda^n e^{\lambda t}$
- $D^{-1} = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda t} = \int e^{\lambda t} dt + c$
- $L(D)u(t) = e^{\lambda t}L(\lambda) = 0$
- $L(\lambda) = 0$ (karakterisztikus egyenlet)

- $u(t)=\sum_k A_k e^{\lambda_k t}$ $(\forall k: L(\lambda_k)=0)$
- gyökök egybeesnek:
  - szimmetria: szimmetrikus feltételek segítségével megoldható (csoportelmélet)
  - degeneráció: perturbáció segítségével megoldható (kis eltéréssel a kezdeti feltételekben meg lehet oldani, aztán határérték-számítás)

A megoldás sajátrezgésekre

- $\ddot{u}+2\beta\dot{u}+\omega_0^2 u=0$
- $L(D)=D^2+2\beta D+\omega_0^2$
- $L(\lambda)=\lambda^2+2\beta\lambda+\omega_0^2$
- $\lambda_{1,2}=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$

1. eset: $\beta>\omega_0$

- legyen $\alpha^2=\beta^2-\omega_0^2$, ekkor $0<\alpha<\beta$
- legyen $-\chi_1=\lambda_1=-\beta-\alpha$ és $-\chi_2=\lambda_2=-\beta+\alpha$
- $\chi_1>\chi_2>0$
- $u(t)=A_1e^{-\chi_1 t}+A_2e^{-\chi_2 t}$
- $u(0)=u_0=A_1+A_2$
- $\dot{u}(t)=-\chi_1A_1e^{-\chi_1 t}-\chi_2A_2e^{-\chi_2 t}$
- $\dot{u}(0)=v_0=-\chi_1A_1-\chi_2A_2$
- $A_1=\dfrac{(\alpha-\beta)u_0+v_0}{2\alpha}$
- $A_2=\dfrac{(\alpha+\beta)u_0+v_0}{2\alpha}$
- $$u(t)=\frac{(\alpha-\beta)u_0+v_0}{2\alpha}e^{-(\alpha+\beta)t}+\frac{(\alpha+\beta)u_0+v_0}{2\alpha}e^{(\alpha-\beta)t}=$$
$$=e^{-\beta t}\left(\frac{\beta u_0+v_0-\alpha u_0}{2\alpha}e^{-\alpha t}+\frac{(\beta u_0+v_0)+\alpha u_0}{2\alpha}e^{\alpha t}\right)=$$
$$=e^{-\beta t}\left(\frac{\beta u_0+v_0}{\alpha}\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}+u_0\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}\right)=$$
$$=e^{-\beta t}\left(u_0\operatorname{ch}\alpha t+\frac{\beta u_0+v_0}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha t\right)$$

2. eset: $\omega_0>\beta$

- legyen $\Omega^2=\omega_0^2-\beta^2$
- $\lambda_{1,2}=-\beta\pm i\Omega$
- $u(t)=A_1e^{(-\beta+i\Omega)t}+A_2e^{(-\beta-i\Omega)t}$
- $u(0)=u_0=A_1+A_2$
- $\dot{u}(t)=A_1(-\beta+i\Omega)e^{(-\beta+i\Omega)t}+A_2(-\beta-i\Omega)e^{(-\beta-i\Omega)t}$

- $\dot{u}(0) = v_0 = A_1(-\beta + i\Omega) + A_2(-\beta - i\Omega)$
- $A_1 = \dfrac{u_0(\beta + i\Omega) + v_0}{2i\Omega}$
- $A_2 = \dfrac{u_0(-\beta + i\Omega) - v_0}{2i\Omega}$
- $$u(t) = \frac{u_0(\beta + i\Omega) + v_0}{2i\Omega} e^{(-\beta + i\Omega)t} + \frac{u_0(-\beta + i\Omega) - v_0}{2i\Omega} e^{(-\beta - i\Omega)t} =$$
  $$= e^{-\beta t}\left(\left(\frac{u_0\beta + v_0}{2i\Omega} + \frac{u_0}{2}\right)e^{i\Omega t} + \left(-\frac{u_0\beta + v_0}{2i\Omega} + \frac{u_0}{2}\right)e^{-i\Omega t}\right) =$$
  $$= e^{-\beta t}\left(\frac{u_0\beta + v_0}{\Omega}\frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2i} + u_0\frac{e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2}\right) =$$
  $$= e^{-\beta t}\left(\frac{u_0\beta + v_0}{\Omega}\sin\Omega t + u_0\cos\Omega t\right)$$

3. eset: $\beta = \omega_0$

- csak idealizált esetekben és (úgy néz ki) az univerzum tágulásánál fordul elő
- határérték-számítással lehet megoldani
- felülről vett határérték:
- $\beta = \omega_0 + \varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$ és $\varepsilon \to 0$
- $\alpha = \sqrt{2\omega_0\varepsilon + \varepsilon^2}$
- $\varepsilon \to 0 \Rightarrow \alpha \to 0$
- $$\lim_{\alpha\to 0} e^{-\beta t}\left(u_0 \operatorname{ch}\alpha t + (\beta u_0 + v_0)\frac{\operatorname{sh}\alpha t}{\alpha}\right) =$$
  $$= \lim_{\alpha\to 0} e^{-\beta t}\left(u_0 \operatorname{ch}\alpha t + (\beta u_0 + v_0)\frac{\operatorname{sh}\alpha t}{\alpha t}t\right) =$$
  $$= e^{-\beta t}\left(u_0 + (\beta u_0 + v_0)t\right)$$
- alulról közelítve ugyanez jön ki ($\Omega \to 0 \Rightarrow T \to \infty$)

4. eset: nincs csillapítás ($\beta = 0$)

- $\lambda = \pm i\omega_0$
- $$u(t) = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t} = (A_1 + A_2)\cos\omega_0 t + i(A_1 - A_2)\sin\omega_0 t =$$
  $$= a_1\cos\omega_0 t + a_2\sin\omega_0 t$$
- $u(0) = u_0 = a_1$
- $\dot{u}(t) = -a_1\omega_0\sin\omega_0 t + a_2\omega_0\cos\omega_0 t$
- $\dot{u}(0) = v_0 = b\omega_0$
- $u(t) = u_0\cos\omega_0 t + \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$

Másfajta integrációs konstansokkal megadva:

$$u(t)=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega_0 t+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega_0 t\right)=$$

- $=C(\cos\varphi\cos\omega_0 t+\sin\varphi\sin\omega_0 t)=C\cos(\omega_0 t-\varphi)=$

  $=C\cos(\omega_0(t-t_0))$
- $C=\sqrt{v_0^2+\frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$

Az egyenlet másfajta (fizikus) megoldása:

- $u(t)=e^{i\omega t}$ (hullámtanban $u(t)=e^{-i\omega t}$)
- $D^n u=(i\omega)^n e^{i\omega t}$
- $L(D)u(t)=L(i\omega)e^{i\omega t}$
- $L(i\omega)=0$

1. eset: $\ddot{u}+\omega_0^2 u=0$

- $L(i\omega)=\omega_0^2-\omega^2=0$
- $\omega=\pm\omega_0$
- innen a bizonyítás menete megegyezik az első megoldással

2. eset: $\ddot{u}+2\beta\dot{u}+\omega_0^2 u=0$

- $(i\omega)^2+2\beta i\omega+\omega_0^2=0$
- $\omega^2-2\beta i\omega-\omega_0^2=0$
- $\omega_{1,2}=i\beta\pm\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$
- 2/1. eset: $\beta<\omega_0$
  - $\omega_{1,2}=i\beta\pm\Omega$
  - innen a bizonyítás menete megegyezik az első megoldással

A közönséges lineáris differenciálegyenletek általános megoldása

$$L(D)u(t)=L(D)\left(\sum_k c_k\xi_k(t)\right)=\sum_k L(D)(c_k\xi_k(t))=\sum_k c_k(L(D)\xi_k(t))=\sum_k c_k\varphi_k(t)=f(t)$$

megoldási módszerek:

- Green-függvényes módszer
- Fourier módszer

A Green-függvényes módszer

- legyen $T>0$
- legyen $\delta_T(t)=\begin{cases}0: t<-\frac{T}{2}\\ \frac{1}{T}: -\frac{T}{2}<t<\frac{T}{2}\\ 0: t>\frac{T}{2}\end{cases}$

- Ekkor: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)\,dt = 1$
- Ha $f(t)$ folytonos függvény:
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_T(t)\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\delta_T(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \overline{f} = f(t_0)$
- Mivel $t_0 \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ a rendőr elv alkalmazásával:
- $\lim_{T\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_T(t)\,dt = \lim_{T\to 0} f(t_0) = f(0)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\lim_{T\to 0}\delta_T(t)\right)dt = f(0)$
- Dirac-féle deltafüggvény: $\delta(t) = \lim_{T\to 0}\delta_T(t)$ (ilyen függvény nincs)
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,dt = f(0)$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)\,dt = f(\tau)$, mivel $\delta(t) = \delta(-t)$
- Green függvény: $L(D)G(t) = \delta(t)$
  - megadása általános esetben Fourier módszerrel lehetséges
- a megoldás menete:
  - $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)L(D)G(t-\tau)\,d\tau = L(D)\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)G(t-\tau)\,d\tau =$
    $= L(D)u(t)$
  - $u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)G(t-\tau)\,d\tau$

A csillapított harmonikus oszcillátor Green-függvénye

- $\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = f(t)$
- $\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = \delta(t)$
- $\dot{u}\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + 2\beta u\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} + \omega_0^2\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)\,dt = 1$
- ha $\varepsilon \to 0$: $\dot{u}(\varepsilon) - \dot{u}(-\varepsilon) + 2\beta\left(\left(u(\varepsilon)\right) - u(-\varepsilon)\right) + \omega_0^2\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u(t)\,dt = 1$
- $u(+0) - u(-0) = 0$
- mivel u folytonos és korlátos ($|u(t)| < K$), igaz hogy:
  - $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} -K\,dt = -2K\varepsilon < \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u(t)\,dt < \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} K\,dt = 2K\varepsilon$

- ebből a rendőr elv miatt: $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u(t)\,dt = 0$
- tehát: $\dot{u}(+0)-\dot{u}(-0)=1$ ($u(t)$ megtörik)
- az egyenletnek végtelen sok megoldása van, mert ha $L(D)u(t)=f(t)$ és $L(D)u_0(t)=0$, akkor $L(D)(u+u_0)(t)=f(t)$
- tehát az $L(D)G(t)=\delta(t)$ egyenletnek végtelen sok megoldása van, végtelen sok Green-függvény
- $u(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)G(t-\tau)\,d\tau$
- $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau$
- mivel a jövőbeli hatásokat nem tudjuk megjósolni $\int_{t}^{\infty} f(\tau)G(t-\tau)\,d\tau=0$
- kauzális Green-függvény: $G(t)=\begin{cases} 0: t<0 \\ g(t): t>0 \end{cases}$ ($t=0$-ban a sebesség ugrik)

A csillapított harmonikus oszcillátor Green-függvényes megoldása egy egyszerű esetben

- $f(t)=\begin{cases} 0: t<0 \\ 1: 0<t<T \\ 0: t>T \end{cases}$
- $G(t-\tau)=\begin{cases} 0: t<\tau \\ e^{-\beta(t-\tau)}\dfrac{\sin\Omega(t-\tau)}{\Omega}: t>\tau \end{cases}$
- $G(t,\tau)=\begin{cases} 0: \tau>t \\ e^{\beta(\tau-t)}\left(-\dfrac{\sin\Omega(\tau-t)}{\Omega}\right): \tau<t \end{cases}$

1. eset: $t<0$

- $u(t)=0$

2. eset: $t\in(0,T)$

$$u(t)=\int_0^t f(\tau)G(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t G(t-\tau)\,d\tau=\int_t^0 G(y)(-dy)=\int_0^t G(y)\,dy=$$

$$=\int_0^t e^{-\beta y}\frac{\sin\Omega y}{\Omega}dy=\int_0^t e^{-\beta y}\frac{e^{i\Omega y}-e^{-i\Omega y}}{2i\Omega}dy=\frac{1}{2i\Omega}\int_0^t\left(e^{(-\beta+i\Omega)y}-e^{(-\beta-i\Omega)y}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2i\Omega}\left[\frac{e^{(-\beta+i\Omega)y}}{-\beta+i\Omega}-\frac{e^{(-\beta-i\Omega)y}}{-\beta-i\Omega}\right]_{y=0}^{t}=\frac{1}{2i\Omega}\left[e^{-\beta y}\left(\frac{e^{i\Omega y}}{-\beta+i\Omega}+\frac{e^{-i\Omega y}}{\beta+i\Omega}\right)\right]_{y=0}^{t}=$$

$$=\frac{1}{2i\Omega}\left[e^{-\beta y}\frac{(\beta+i\Omega)e^{i\Omega y}+(-\beta+i\Omega)e^{-i\Omega y}}{(-\beta+i\Omega)(\beta+i\Omega)}\right]_{y=0}^{t}=$$

$$=\frac{1}{2i\Omega}\left[e^{-\beta y}\frac{\beta\left(e^{i\Omega y}-e^{-i\Omega y}\right)+i\Omega\left(e^{i\Omega y}+e^{-i\Omega y}\right)}{-\beta^2-\Omega^2}\right]_{y=0}^{t}=$$

$$=\frac{1}{-2i\Omega\omega_0^2}\left[e^{-\beta y}\left(\beta 2i\sin\Omega y+i\Omega 2\cos\Omega y\right)\right]_{y=0}^{t}=$$

$$=\frac{1}{-\Omega\omega_0^2}\left[e^{-\beta y}\left(\beta\sin\Omega y+\Omega\cos\Omega y\right)\right]_{y=0}^{t}=-\frac{1}{\Omega\omega_0^2}\left(e^{-\beta t}\left(\beta\sin\Omega t+\Omega\cos\Omega t\right)-\Omega\right)=$$

- $$=\frac{1}{\omega_0^2}\left(1-e^{-\beta t}\left(\cos\Omega t\right)+\frac{\beta}{\Omega}\sin\Omega t\right)$$

3. eset: $t>\tau$

$$u(t)=\int_0^T f(\tau)G(t-\tau)\,d\tau=-\frac{1}{\Omega\omega_0^2}\left[e^{-\beta y}\left(\beta\sin\Omega y+\Omega\cos\Omega y\right)\right]_{y=t-T}^{y=t}=$$

$$=-\frac{1}{\Omega\omega_0^2}\left(e^{-\beta t}\left(\beta\sin\Omega t+\Omega\cos\Omega t\right)-e^{-\beta(t-T)}\left(\beta\sin\Omega(t-T)+\Omega\cos\Omega(t-T)\right)\right)=$$

- $$=-\frac{1}{\Omega\omega_0^2}e^{-\beta t}$$

$$\left(\beta\sin\Omega t+\Omega\cos\Omega t-e^{\beta T}\left(\beta\left(\sin\Omega t\cos\Omega T-\cos\Omega t\sin\Omega T\right)+\Omega\left(\cos\Omega t\cos\Omega T-\sin\Omega t\sin\Omega T\right)\right)\right)=$$

$$=e^{-\beta t}(A\cos\Omega t+B\sin\Omega t)$$

A Fourier-analízis

Periodikus függvényekre

- $f(t+nT)=f(t)$ $(n\in\mathbb{N})$
- $f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t\right),\ \omega_1=\frac{2\pi}{T}$
- A módszer akkor működik, ha a $(0,T)$ intervallumon f-nek véges sok szakadása van, korlátos és ahol nincs szakadása ott deriválható.
- szakadásoknál: $f(x)=\frac{f(-x)+f(+x)}{2}$

- $$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = a_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a_n \cos n\omega_1 t dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} b_n \sin n\omega_1 t dt = a_0 T$$
- $$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \overline{f}$$
- $$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\omega_1 t dt =$$
$$= a_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos k\omega_1 t dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_1 t \cos k\omega_1 t dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega_1 t \cos k\omega_1 t dt =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tfrac{1}{2}\left(\cos(k-n)\omega_1 t + \cos(k+n)\omega_1 t\right) dt +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tfrac{1}{2}\left(\sin(n+k)\omega_1 t + \sin(n-k)\omega_1 t\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{kn} \frac{T}{2} = a_k \frac{T}{2}$$
- $$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\omega_1 t dt$$
- $$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin k\omega_1 t dt =$$
$$= a_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin k\omega_1 t dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_1 t \sin k\omega_1 t dt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin n\omega_1 t \sin k\omega_1 t dt =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tfrac{1}{2}\left(\sin(k-n)\omega_1 t + \sin(k+n)\omega_1 t\right) dt +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tfrac{1}{2}\left(\cos(k-n)\omega_1 t - \cos(k+n)\omega_1 t\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \delta_{kn} \frac{T}{2} = b_k \frac{T}{2}$$
- $$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin k\omega_1 t dt$$

Komplex számokkal leírva

- legyen $c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_1 t} dt$
- $c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i0\omega_1 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = a_0$
- ha $n > 0$: $c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_1 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\left(\cos\left(n\omega_1 t - i\sin\left(n\omega_1 t\right)\right)\right) dt = \frac{a_n - ib_n}{2}$
- ha $n < 0$: $c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_1 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\left(\cos\left(n\omega_1 t - i\sin\left(n\omega_1 t\right)\right)\right) dt = \frac{a_{-n} - ib_{-n}}{2}$
- $$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{in\omega_1 t} + e^{-in\omega_1 t}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega_1 t} - e^{-in\omega_1 t}}{2i} \right) =$$
  $$= a_0 e^{i0\omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega_1 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{a_{-n} - ib_{-n}}{2} e^{in\omega_1 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_1 t}$$

Nem periodikus függvények esetében

- legyen $\Delta\omega = \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$
- $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{\Delta\omega} e^{in\omega_1 t} \Delta\omega$
- $\frac{c_n}{\Delta\omega} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_1 t} dt$
- nem periodikus függvények esetében $T \to \infty$
- Fourier-integrál: $F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$
- Fourier-transzformáció: $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$
- voltaképp ez a függvények reprezentációja
  - periodikus függvények lineáris tere megszámlálhatóan végtelen
  - nem periodikus függvények lineáris tere folyamatosan végtelen
  - függvények skaláris szorzata: $\langle f, g \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) g(t) dt$

Közönséges lineáris differenciálegyenletek megoldása Fourier-analízis segítségével

Egy kis mellékfeladat:

- $L(D)\psi(t) = e^{i\omega t}$
- legyen $\psi(t) = C(\omega)e^{i\omega t}$
- $L(D)\left(C(\omega)e^{i\omega t}\right) = C(\omega)L(D)e^{i\omega t} = C(\omega)L(i\omega)e^{i\omega t}$
- $C(\omega) = \dfrac{1}{L(i\omega)}$ átviteli függvény
- $\psi(t) = \dfrac{1}{L(i\omega)}e^{i\omega t}$
- sajátrezgés: $L(i\omega) = 0$, $C(\omega) = \infty$ (rezonancia-katasztrófa)

A megoldás menete (hogy mettől meddig integrálunk, az a függvény periódusától függ):

- $f(t) = \int F(\omega)e^{i\omega t}d\omega$
- $u(t) = \int F(\omega)C(\omega)e^{i\omega t} = \int U(\omega)e^{i\omega t}$, ahol $U(\omega) = F(\omega)C(\omega)$

Az átviteli függvény (fontos, mert leírja a rendszert és tudom mérni) ábrázolása:

1. kettébontás amplitúdó- és fáziskarakterisztikára:

- $C(\omega) = A(\omega)e^{-i\varphi(\omega)}$
- $C(\omega)e^{i\omega t} = A(\omega)e^{i(\omega t - \varphi(\omega))}$

2. Nyquist-karakterisztika:

- $C(\omega) = a(\omega) + ib(\omega)$ ábrázolása a komplex síkon

Általános leírási módszer:

- legyen ω tetszőleges komplex szám
- ekkor az $L(i\omega) = 0$ n-edrendű egyenletnek n megoldása lesz
- tehát a $C(\omega)$ függvény meromorf (nullánál több, véges darab szinguláris pontja van) és n darab szinguláris pontja van és ezek rezidumaiból (hogy tart itt a függvény a végtelenbe) rekonstruálható a függvény
- a rezonanciagörbe az $A(\omega)$ függvény metszete pozitív ω-ákra, de a komplex függvény szimmetrikus lesz az imaginárius tengelyre minden ilyen esetben
- a fázisgörbéből következtetni tudok a szinguláris pontok valós koordinátáira, a rezonanciagörbéből az imagináriusra is és a rezidumokra, ezek ismeretében pedig $C(\omega)$ meghatározható

A Fourier-analízis kapcsolata a Green-függvényes módszerrel

- $$u(t)=\int F(\omega)C(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\int\frac{1}{2\pi}\int f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau C(\omega)e^{i\omega t}d\omega=$$
  $$=\int f(\tau)\int\frac{C(\omega)}{2\pi}e^{i\omega(t-\tau)}d\omega d\tau=\int f(\tau)G(t-\tau)d\tau$$
- $G(t)=\int\frac{C(\omega)}{2\pi}e^{i\omega t}d\omega$ $F_y=F\sin\varphi=F\frac{a+y_3-y_2}{l}$
- a két módszer egymás Fourier-transzformáltja
- $$f(t)=\int F(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\int\frac{1}{2\pi}\int f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau e^{i\omega t}d\omega=\int f(\tau)\int\frac{1}{2\pi}e^{i\omega(t-\tau)}d\omega d\tau=$$
  $$=\int f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$
- $\delta(t)=\int\frac{1}{2\pi}e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int\cos\omega t d\omega$
- $\delta_\alpha(t)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-\alpha\omega}\cos\omega t d\omega$ ($\alpha>0$)

Példák a Fourier-analízis alkalmazására

1. $$f(t)=\begin{cases}1: nT<t<nT+\frac{T}{2}\\ \frac{1}{2}: t=nT+\frac{T}{2}\\ 0: nT+\frac{T}{2}<t<(n+1)T\end{cases}$$

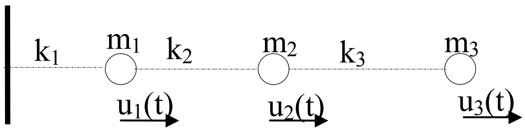
- $a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}1dt=\frac{1}{2}$
- $$a_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos k\omega_1 tdt=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\cos k\omega_1 tdt=\frac{2}{T}\int_0^{k\pi}\frac{1}{k\omega_1}\cos ydy=\frac{2}{Tk\omega_1}\int_0^{k\pi}\cos ydy=$$
  $$=\frac{1}{k\pi}[\sin y]_{y=0}^{k\pi}=0$$
- $$b_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin k\omega_1 tdt=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\sin k\omega_1 tdt=\frac{2}{Tk\omega_1}\int_0^{k\pi}\sin ydy=\frac{1}{k\pi}[-\cos y]_{y=0}^{k\pi}=$$
  $$=\frac{1}{k\pi}(1-\cos k\pi)=\frac{1}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right)$$
- $f(t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin n\omega_1 t$

2. a csillapított harmonikus oszcillátor

- $\ddot{u}+2\beta\dot{u}+\omega_0^2u=f(t)$
- $L(D)=D^2+2\beta D+\omega_0^2$

- $L(i\omega) = (i\omega)^2 + 2\beta i\omega + \omega_0^2 = \omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta i\omega$
- $C(\omega) = \dfrac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta i\omega}$
- $A(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$
    - Brect-Wigner-függvény
    - rezonanciagörbe
    - β a rezonanciacsúcs szélességét mutatja meg
    - ω_0 a rezonancihelyet, ha β kicsi
- $\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
- minden más rendszer visszavezethető erre a rendszerre a Fourier-transzformáció miatt
- sajátfrekvencia: $C(i\omega) = 0$
- $\omega = i\beta \pm \Omega$ (ha nincs túlcsillapítva): ω_0 sugarú körön vannak a komplex ω síkon

Vizsgáljuk az alábbi problémát:



- az egyszerűség kedvéért minden golyó kitérését az egyensúlyi helyzettől vesszük
- a differenciálegyenletek:
$$m_1\ddot{u}_1 = -k_1u_1 + k_2(u_2 - u_1)$$
$$m_2\ddot{u}_2 = k_2(u_1 - u_2) + k_3(u_3 - u_2)$$
$$m_3\ddot{u}_3 = k_3(u_2 - u_3)$$
- átalakítva:
$$m_1\ddot{u}_1 = (-k_1 - k_2)u_1 + k_2u_2$$
$$m_2\ddot{u}_2 = k_2u_1 + (-k_2 - k_3)u_2 + k_3u_3$$
$$m_3\ddot{u}_3 = k_3u_2 + (-k_3)u_3$$
- legyen $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\underline{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}$ és $\underline{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}$
- ekkor: $\underline{M}\underline{\ddot{u}} = -\underline{K}\underline{u}$
- ebből: $\underline{\ddot{u}} = -\underline{A}\underline{u}$, ahol $\underline{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{k_1 + k_2}{m_1} & -\dfrac{k_2}{m_1} & 0 \\ -\dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{k_2 + k_3}{m_2} & -\dfrac{k_3}{m_2} \\ 0 & -\dfrac{k_3}{m_3} & \dfrac{k_3}{m_3} \end{pmatrix}$

- és: $\underline{\ddot{u}} = -\omega_0^2 \underline{B}\underline{u}$, ahol $\omega_0^2 = \frac{k_1}{m_1}$ és $\underline{B} = \begin{pmatrix} \frac{k_1+k_2}{k_1} & -\frac{k_2}{k_1} & 0 \\ -\frac{k_2}{k_1}\frac{m_1}{m_2} & \frac{k_2+k_3}{k_1}\frac{m_1}{m_2} & -\frac{k_3}{k_1}\frac{m_1}{m_2} \\ 0 & -\frac{k_3}{k_1}\frac{m_1}{m_3} & \frac{k_3}{k_1}\frac{m_1}{m_3} \end{pmatrix}$
- ebből: $D^2\underline{u} + \omega_0^2 \underline{B}\underline{u} = 0$
- $\left(\underline{E}D^2 + \omega_0^2 \underline{B}\right)\underline{u}(t) = 0$
- $\underline{L}(D)\underline{u}(t) = 0$ (inhomogén esetben $\underline{L}(D)\underline{u}(t) = \underline{f}(t)$, ahol $\underline{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$)
- legyen $\underline{u}(t) = \underline{a}e^{i\omega t}$
- ekkor az egyenlet: $-\omega^2 \underline{a}e^{i\omega t} = -\omega_0^2 \underline{B}\left(\underline{a}e^{i\omega t}\right)$-re módosul
- ebből, ha $\lambda = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ az lesz, hogy: $\underline{B}\underline{a} = \lambda \underline{a}$ (sajátértékprobléma)
- λ valós lesz, ennek okát lásd később
- ha λ negatív, akkor az egyensúlyi állapot labilis és nem alakul ki rezgőmozgás
- $\underline{u}(t) = \sum_l c_l \underline{a}^{(l)} e^{i\omega_l t}$, ahol $\omega_l = \omega_0\sqrt{\lambda_l}$
- átírva: $\underline{u}(t) = \sum_l \underline{a}^{(l)}\left(A_l \cos\omega_l t + B_l \sin\omega_l t\right)$
- legyen $\underline{u}(0) = \sum_l \underline{a}^{(l)} A_l = \underline{u}_0$ és $\underline{\dot{u}}(0) = \sum_l \underline{a}^{(l)} B_l \omega_l = \underline{v}_0$
- ekkor: $\left(u_0\right)_k = \sum_l \underline{a}_k^{(l)} A_l$ és $\left(v_0\right)_k = \sum_l \underline{a}_k^{(l)} B_l \omega_l$
- sajátvektorokat tegyük lineárisan függetlenné, legyen: $\underline{a}^{(l)}\underline{b}^{(m)} = \delta_{lm}$ (baloldali sajátvektorok)
- az előzőekből: $\underline{b}^{(m)}\sum_l \underline{a}^{(l)} A_l = \underline{b}^{(m)}\underline{u}_0$ és $\underline{b}^{(m)}\sum_l \underline{a}^{(l)} B_l \omega_l = \underline{b}^{(m)}\underline{v}_0$
- ebből: $A_m = \underline{b}^{(m)}\underline{u}_0$ és $B_m \omega_m = \underline{b}^{(m)}\underline{v}_0$

$$\underline{u}(t)=\sum_l \underline{a}^{(l)}\left(\left(\underline{b}^{(l)}\underline{u}_0\right)\cos\omega_l t+\left(\underline{b}^{(l)}\underline{v}_0\right)\frac{\sin\omega_l t}{\omega_l}\right)=$$

$$=\sum_l\left(\underline{a}^{(l)}\circ\underline{b}^{(l)}\right)\left(\underline{u}_0\cos\omega_l t+\underline{v}_0\frac{\sin\omega_l t}{\omega_l}\right)=\sum_l \underline{P}^{(l)}\left(\underline{u}_0\cos\omega_l t+\underline{v}_0\frac{\sin\omega_l t}{\omega_l}\right)=$$

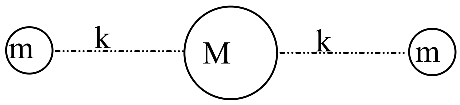
- ekkor: $=\left(\sum_l \cos\omega_l t\underline{P}^{(l)}\right)\underline{u}_0+\left(\sum_l\frac{\sin\omega_l t}{\omega_l}\underline{P}^{(l)}\right)\underline{v}_0=$

$$=\left(\sum_l \cos\omega_0\sqrt{\lambda_l}t\underline{P}^{(l)}\right)\underline{u}_0+\left(\sum_l\frac{\sin\omega_0\sqrt{\lambda_l}t}{\omega_0\sqrt{\lambda_l}}\underline{P}^{(l)}\right)\underline{v}_0=$$

$$=\left(\sum_l \cos\omega_0\sqrt{\underline{B}}\right)\underline{u}_0+\left(\sum_l\frac{\sin\omega_0\sqrt{\underline{B}}t}{\omega_0\sqrt{\underline{B}}}\right)\underline{v}_0$$

- ha $\omega_l=0$, akkor hozzáteszünk a rendszerhez még egy k' rugóállandójú rugót és aztán $k'\to 0$
- akkor lesz periodikus, ha az ω-k racionális viszonyban állnak egymással (ritkán igaz)
- Landau elmélete szerint a bonyolult mozgások erre visszavezethetőek, de 1980 körül bonyolult topológiai módszerekkel bebizonyították, hogy nem volt igaza

konkrét példa:



- legyen $M=\alpha m$
- az egyenletek:
$$m\ddot{u}_1=k\left(u_2-u_1\right)$$
$$M\ddot{u}_2=k\left(u_1-u_2\right)+k\left(u_3-u_2\right)$$
$$m\ddot{u}_3=k\left(u_2-u_3\right)$$
- legyen $\omega_0^2=\frac{k}{M}$ és $\underline{B}=\begin{pmatrix}\alpha & -\alpha & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -\alpha & \alpha\end{pmatrix}$
- ekkor: $\underline{\ddot{u}}=-\omega_0^2\underline{Bu}$
- tehát: $\underline{Ba}=\lambda\underline{a}$
- $\left(\underline{B}-\lambda\underline{E}\right)\underline{a}=0$

$$\left|\underline{B}-\lambda\underline{E}\right|=\begin{vmatrix}\alpha-\lambda & -\alpha & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -\alpha & \alpha-\lambda\end{vmatrix}=\left(\alpha-\lambda\right)\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -\alpha & \alpha-\lambda\end{vmatrix}+\alpha\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & \alpha-\lambda\end{vmatrix}=$$

- $=\left(\alpha-\lambda\right)\left(\left(2-\lambda\right)\left(\alpha-\lambda\right)-\alpha\right)+\alpha\left(\alpha-\lambda\right)\left(-1\right)=\left(\alpha-\lambda\right)\left(\lambda^2-\lambda\alpha-2\lambda\right)=$

  $=\lambda\left(\alpha-\lambda\right)\left(\lambda-\alpha-2\right)$

  1. $\lambda_1=0$

- $\underline{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\omega_1 = 0$

2. $\lambda_2 = \alpha$

- $\underline{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ és $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

3. $\lambda_3 = \alpha + 2$

- $\underline{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \\ -2m \\ M \end{pmatrix}$ és $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m} + 2\frac{k}{M}}$

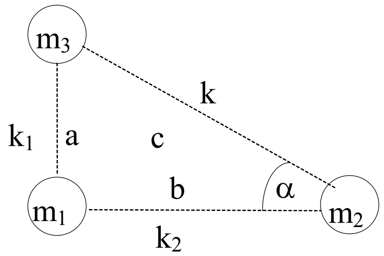
a Schödlinger-egyenlet:

- $i\hbar \frac{d\psi}{dt} = \hat{H}\psi$
- $\frac{d\psi}{dt} = \frac{-i}{\hbar}\hat{H}\psi = \hat{A}\psi$
- $\psi = e^{\hat{A}t}\psi(0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\psi(0) = \hat{G}\psi(0)$
- időtől független Schödlinger-egyenlet: $\hat{H}\varphi = \lambda\varphi$

Elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerek megoldása:

- $$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n \\ \dot{u}_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n \\ &\vdots \\ \dot{u}_n &= a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \ldots + a_{nn}u_n \end{aligned}$$
- ebből: $\underline{\dot{u}} = \underline{A}\underline{u}$ és legyen $\underline{u}(0) = \underline{u}_0$
- $\underline{u} = \underline{a}e^{\lambda t}$ alakban keressük a megoldást: $\underline{A}\underline{a} = \lambda \underline{a}$
- $\underline{u}(t) = \sum_n C_k \underline{a}^{(k)} e^{\lambda_k t}$ valamint az előzőekhez hasonlóan $C_l = \underline{u}_0 \underline{b}_l$
- $\underline{u}(t) = \sum_n \left(\underline{u}_0 \underline{b}^{(k)}\right) \underline{a}^{(k)} e^{\lambda_k t} = \sum_k \left(\underline{a}^{(k)} \circ \underline{b}^{(k)}\right) \underline{u}_0 e^{\lambda_k t} = \left(\sum_k \left(\underline{a}^{(k)} \circ \underline{b}^{(k)}\right) e^{\lambda_k t}\right) \underline{u}_0 = e^{\underline{A}t} \underline{u}_0$

Hasonló nem 1 dimenziós rendszerekre példa:



- a c rugót fogjuk vizsgálni
- $l = \sqrt{(b + x_2 - x_3)^2 + (a + y_3 - y_2)^2}$

- $\Delta l = l - c = \sqrt{(b + x_2 - x_3)^2 + (a + y_3 - y_2)^2} - \sqrt{a^2 + b^2}$
- $F = k\Delta l$
- $F_x = F\cos\varphi = F\dfrac{b + x_2 - x_3}{l}$ és (nem lineáris)
- lineáris közelítés:

$$\Delta l = \sqrt{(b + x_2 - x_3)^2 + (a + y_3 - y_2)^2} - c =$$

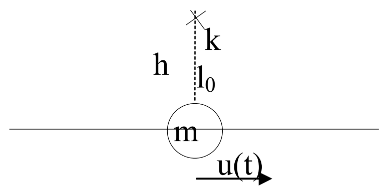
$$= \sqrt{b^2 + (x_2 - x_3)^2 + 2b(x_2 - x_3) + a^2 + (y_3 - y_2)^2 + 2a(y_3 - y_2)} - c =$$

$$= c\sqrt{1 + 2\frac{b}{c}\frac{x_2 - x_3}{c} + \left(\frac{x_2 - x_3}{c}\right)^2 + 2\frac{a}{c}\frac{y_3 - y_2}{c} + \left(\frac{y_3 - y_2}{c}\right)^2} - c \approx$$

$$\approx c\left(\sqrt{1 + 2\frac{b}{c}\frac{x_2 - x_3}{c} + 2\frac{a}{c}\frac{y_3 - y_2}{c}} + -1\right) \approx \frac{b}{c}(x_2 - x_3) + \frac{a}{c}(y_3 - y_2)$$

- valamint $\cos\varphi \approx \cos\alpha = \dfrac{b}{c}$ és $\sin\varphi \approx \sin\alpha = \dfrac{a}{c}$
- ekkor: $F_x = k\Delta l\cos\varphi = k\dfrac{b}{c}\left(\dfrac{b}{c}(x_2 - x_3) + \dfrac{a}{c}(y_3 - y_2)\right)$
- és: $F_y = k\Delta l\sin\varphi = k\dfrac{a}{c}\left(\dfrac{b}{c}(x_2 - x_3) + \dfrac{a}{c}(y_3 - y_2)\right)$
- ekkor ha $\underline{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$ az egyenletrendszer felírható $\underline{\ddot{u}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{u}$ alakban

Vizsgáljuk a következő problémát:



- $l = \sqrt{h^2 + u^2}$
- $\Delta l = \sqrt{h^2 + u^2} - l_0 \approx h - l_0$
- $F = k\Delta l\sin\varphi \approx k(h - l_0)\dfrac{u}{l} \approx k\dfrac{h - l_0}{h}u$
- $m\ddot{u} = -k\dfrac{h - l_0}{h}u$
- $\ddot{u} = -\dfrac{k}{m}\dfrac{h - l_0}{h}u$

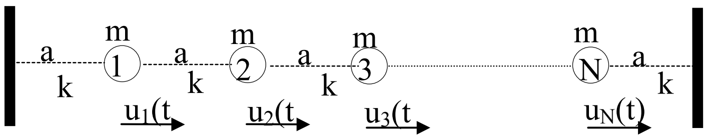
mi van ha $h = l_0$?

- $\Delta l = \sqrt{h^2+u^2} - h \approx \dfrac{u^2}{2h}$
- $F = k\Delta l \sin\varphi \approx \dfrac{k}{2}\dfrac{u^3}{h^2}$
- $m\ddot{u} = -\dfrac{k}{2h^2}u^3$ (nem lineáris)

Miért nem lesznek a $\underline{B}$ mátrixnak komplex sajátértékei?

- az egyenletek így is felírhatók: $\sqrt{m_i}\ddot{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{k_i}{\sqrt{m_i}} u_i$
- legyen: $z_i = \sqrt{m_i} u_i$
- ekkor az egyenlet: $\underline{\ddot{z}} = \underline{C}\underline{z}$, ahol $\underline{\tilde{C}} = \underline{C}$ és $\underline{C}$ sajátértékei ugyanazok lesznek, mint $\underline{B}$-nek

Vizsgáljuk a következő problémát:



- legyen $L = a(N+1)$ és $M = Nm$
- legyen $u_0 \equiv u_{N+1} \equiv 0$
- $m\ddot{u}_l(t) = -k(u_l - u_{l-1}) + k(u_{l+1} - u_l)$
- legyen $\dfrac{k}{m} = \omega_0^2$
- ekkor: $\ddot{u}_l = -\omega_0^2(-u_{l-1} + 2u_l - u_{l+1})$
- ha $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$: $\underline{\ddot{u}} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots \\ -1 & 2 & -1 & \cdots \\ 0 & -1 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \underline{u} = -\omega_0^2 \underline{B}\underline{u}$
- legyen $\underline{u} = \underline{a}e^{i\omega t}$, ekkor $\underline{B}\underline{a} = \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\underline{a}$
- $A_N(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & \cdots \\ -1 & 2-\lambda & -1 & \cdots \\ 0 & -1 & 2-\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$
- $A_N(\lambda) = (2-\lambda)A_{N-1}(\lambda) - A_{N-2}(\lambda)$
- helyettesítsük λ-t:
  1. eset: $0 \le \lambda \le 4$
  - $2 - \lambda = 2\cos\alpha$
  - ekkor $\lambda = 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

  2. eset: $\lambda < 0$
  - $2 - \lambda = 2\,\mathrm{ch}\,\beta$

- ekkor $\lambda = -4\,\mathrm{sh}^2 \frac{\beta}{2}$

3. eset: $\lambda > 4$
- $2 - \lambda = -2\,\mathrm{ch}\,\gamma$
- ekkor $\lambda = 4\,\mathrm{ch}^2 \frac{\gamma}{2}$

- az 1. esetben: $A_N(\alpha) = 2\cos\alpha A_{N-1}(\alpha) - A_{N-2}(\alpha)$
- a megoldást $A_N = q^N$ alakban keressük
- $q^N = 2\cos\alpha q^{N-1} - q^{N-2}$
- $q^2 - 2\cos\alpha q + 1 = 0$
- ebből: $q_{1,2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha = e^{\pm i\alpha}$
- tehát: $A_N(\alpha) = Pe^{iN\alpha} + Qe^{-iN\alpha}$
- kezdeti feltételek:
  - $A_1 = 2\cos\alpha$
  - $A_2 = 4\cos^2\alpha - 1$
  - ezekből definiálható a rekurziós szabály alapján $A_0 = 1$ és $A_{-1} = 0$ is
- $A_0 = P + Q = 1$, ebből: $Pe^{i\alpha} + Qe^{i\alpha} = e^{i\alpha}$
- $A_{-1} = Pe^{-i\alpha} + Qe^{i\alpha} = 0$
- ezekből: $P\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right) = e^{i\alpha}$
- tehát: $P = \frac{e^{i\alpha}}{2i\sin\alpha}$ és ebből $Q = -\frac{e^{-i\alpha}}{2i\sin\alpha}$
- $A_N(\alpha) = \frac{e^{i\alpha}}{2i\sin\alpha}e^{iN\alpha} - \frac{e^{-i\alpha}}{2i\sin\alpha}e^{-iN\alpha} = \frac{e^{i(N+1)\alpha} - e^{-i(N+1)\alpha}}{2i\sin\alpha} = \frac{\sin(N+1)\alpha}{\sin\alpha}$

$$A_N = 2\cos\alpha A_{N-1} - A_{N-2} = 2\cos\alpha \frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin(N-1)\alpha}{\sin\alpha} =$$

- ellenőrzés: $= \frac{2\cos\alpha \sin N\alpha - \sin(N\alpha - \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha\sin N\alpha + \sin N\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} =$

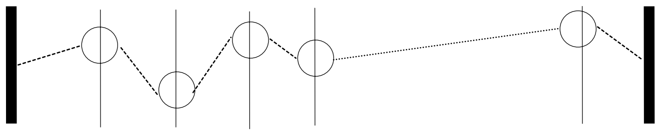
$$= \frac{\sin(N\alpha + \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin(N+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

- $\lim_{\alpha\to 0} A_N(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin(N+1)\alpha}{(N+1)\alpha}\frac{\alpha}{\sin\alpha}(N+1) = N+1$
- $\lambda = 0$, $N + 1 = 2N - (N-1)$ (csak határesetben megoldás)
- $\alpha_k = \frac{k\pi}{N+1}$
- $\lambda_k = 4\sin^2\left(\frac{k}{N+1}\frac{\pi}{2}\right)$ ($1 \le k \le N$-re kapunk különböző megoldásokat)
- a többi esetet felesleges megvizsgálni mert megvan az N darab gyök
- $\omega_k = \omega_0\sqrt{\lambda_k} = 2\omega_0 \sin\left(\frac{K}{N+1}\frac{\pi}{2}\right)$

- $u_l = a_l e^{i\omega t}$-t beírva az eredeti egyenletbe
- $\omega^2 a_l = \omega_0^2(-a_{l-1} + 2a_l - a_{l+1})$
- amiből: $-a_{l-1} + (2-\lambda)a_l - a_{l+1} = 0$
- $-a_{l-1} + 2\cos\alpha a_l - a_{l+1} = 0$
- $a_l^{(k)} = \sin(l\alpha_k) = \sin\frac{lk}{N+1}\pi$
- ellenőrzés: $a_{l+1} + a_{l-1} = \sin((l+1)\alpha_k) + \sin((l-1)\alpha_k) = 2\cos\alpha_k \sin l\alpha_k = 2\cos\alpha_k a_l$

ekvivalens vagy ebből levezethető rendszerek:

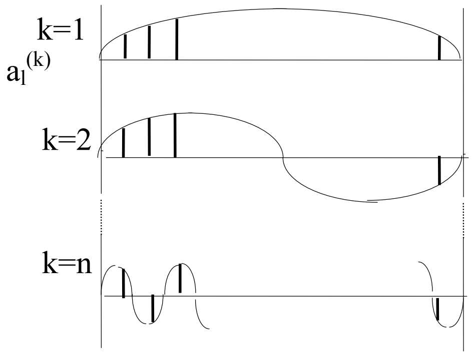
- transzverzális rendszer

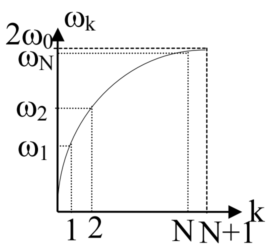


  - $\Delta l = \sqrt{a^2 + (u_l - u_{l+1})^2} - l_0 = a\sqrt{1 + \left(\frac{u_l - u_{l+1}}{a}\right)^2} - b \approx a - b$
  - $F = k\Delta l \sin\varphi = k\frac{a-b}{a}(u_l - u_{l+1}) = k'(u_l - u_{l+1})$
- transzverzális esetben mindegyiket egy függőleges rugó (K rugóállandójú) is tartja:
  - $m\ddot{u}_l = k'(u_{l-1} + 2u_l - u_{l+1}) - Ku_l$
  - legyen $\frac{K}{m} = \Omega^2$, ekkor: $\ddot{u}_l = -\omega_0^2(-u_{l-1} + 2u_l - u_{l+1}) - \Omega^2 u_l$
  - legyen $\frac{\Omega}{\omega_0} = p$: $\underline{\ddot{u}} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 2+p & -1 & 0 & \cdots \\ -1 & 2+p & -1 & \cdots \\ 0 & -1 & 2+p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \underline{u}$
  - ekkor, ha $x = \lambda - p$, akkor $2\cos\alpha = 2 - x$
  - $\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 4\sin^2\left(\frac{k}{N+1}\frac{\pi}{2}\right) + p$
- csak egyik végén rögzített: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$
- egyik végén se rögzített: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$

- ciklikus: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$

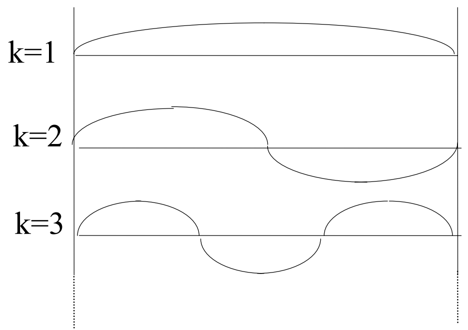
ω_k és $a_l^{(k)}$ ábrázolása:





Húr:

- $N \to \infty$, L, M konstansok, $a \to 0$, $m \to 0$, $k \to \infty$ és $ak = b$ konstans
- $\frac{M}{N}\ddot{u}_l = \frac{b}{a}\left(\left(u_{l+1} - u_l\right) - \left(u_l - u_{l-1}\right)\right)$
- $\frac{M}{Na}\ddot{u}_l = \frac{b}{a^2}\left(\left(u_{l+1} - u_l\right) - \left(u_l - u_{l-1}\right)\right)$
- $\ddot{u}_l = \frac{Lb}{M}\frac{1}{a^2}\left(\left(u_{l+1} - u_l\right) - \left(u_l - u_{l-1}\right)\right)$
- legyen $c^2 = \frac{Lb}{M}$: $\ddot{u}_l = c^2 \frac{\frac{\left(u_{l+1} - u_l\right)}{a} - \frac{\left(u_l - u_{l-1}\right)}{a}}{a}$
- vezessük be a folyamatos $u\left(x,t\right)$ függvényt
- hullámegyenlet: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (homogén lineáris parciális differenciálegyenlet)
- $$\omega_m = 2\sqrt{\frac{Nk}{M}}\sin\left(\frac{m\pi}{2\left(N+1\right)}\right) = 2\sqrt{\frac{bN}{aM}}\sin\left(\frac{m\pi}{2\left(N+1\right)}\right) = 2\frac{cN}{L}\sin\left(\frac{m\pi}{2\left(N+1\right)}\right) =$$ $$= \frac{c}{L}2N\frac{m\pi}{2N} = \frac{c\pi}{L}m$$



Parciális differenciálegyenletek (kétváltozós függvényekre)

fajtáik:

- homogén: $L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u\left(x,t\right) = 0$
- inhomogén: $L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u\left(x,t\right) = f\left(x,t\right)$

peremfeltételek:

- kezdeti feltételek:
  - annyi kell ahányad rendű
  - $u\left(x, t=0\right) = \alpha\left(x\right)$
  - $\frac{\partial u}{\partial t}\left(x, t=0\right) = \beta\left(x\right)$
  - stb.
- határfeltételek (pld.):
  - $u\left(x=0, t\right) = 0$

- $u(x=L,t)=0$

példák:

- hullámegyenlet: $L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2-c^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2$
- Klein-Gordon egyenlet: $L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2-c^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2-\mu^2$
- csillapított hullámegyenlet: telegráf egyenlet
- Laplace-egyenlet: $L\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2$
- diffúziós egyenlet, hővezetési egyenlet: $L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)-\beta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2$
- a gerenda egyenlete: $L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+B^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^4$

megoldási módszerek:

- D'alambert módszer: csak a hullámegyenletre
- Fourier módszer: általános (három módszer)

A hullámegyenlet megoldása D'alambert módszerrel

Végtelen húr:

- legyen $\xi(x,t)=x-Vt$, ekkor $u(x,t)=f(\xi)$
- az egyenlet $V^2 f''(\xi)=c^2 f''(\xi)$ alakra módosul
- ebből: $V=\pm c$
- $u(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct)$

Kezdeti feltételek:

- $f(x)+g(x)=u(x,0)=\alpha(x)$ és $-cf(x)+cg(x)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\beta(x)$
- legyen $\gamma'(x)=\beta(x)$, ekkor $-f(x)+g(x)=\frac{\gamma(x)}{c}$
- $f(x)=\frac{1}{2}\left(\alpha(x)-\frac{1}{c}\gamma(x)\right)$ és $g(x)=\frac{1}{2}\left(\alpha(x)+\frac{1}{c}\gamma(x)\right)$
- $u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\alpha(x-ct)-\frac{1}{c}\gamma(x-ct)\right)+\frac{1}{2}\left(\alpha(x+ct)+\frac{1}{c}\gamma(x+ct)\right)$

speciális esetek:

- $\beta(x)=0$, $\gamma(x)=0$: $u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\alpha(x-ct)\right)+\frac{1}{2}\left(\alpha(x+ct)\right)$
- $\alpha(x)=0$: $u(x,t)=\frac{1}{2c}\left(\gamma(x+ct)-\gamma(x-ct)\right)$

Véges húr:

- α és β függvények csak a $[0,L]$ intervallumon vannak értelmezve
- kibővítjük az intervallumot:
  - rögzített vég: középpontos tükrözés
  - szabad vég tengelyes tükrözés

A Fourier módszer

A változók szétválasztásának módszere (Klein-Gordon egyenlet):

- legyen: $u(x,t) = X(x)T(t)$
- $X(x)\ddot{T}(t) = c^2 X''(x)T(t) - \mu^2 X(x)T(t)$
- átalakítva: $\dfrac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = c^2 \dfrac{X''(x)}{X(x)} - \mu^2$
- legyen $\dfrac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2$ (szekréciós állandó): $T(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$
- az egyenlet: $-\omega^2 = c^2 \dfrac{X''(x)}{X(x)} - \mu^2$
- $X''(x) = -\dfrac{\omega^2 - \mu^2}{c^2} X(x)$
- legyen $k^2 = -\dfrac{\omega^2 - \mu^2}{c^2}$, ekkor: $X(x) = C\cos kx + D\sin kx$
- $u(x,t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)(C\cos kx + D\sin kx)$

Peremfeltételek:
határfeltételek:

- $u(x=0,t) = C(A\cos\omega t + B\sin\omega t) = 0$ -ból: $C = 0$
- $u(x,t) = (A'\cos\omega t + B'\sin\omega t)\sin kx$ ($A' = DA$ és $B' = BD$)
- $u(x=L,t) = (A'\cos\omega t + B'\sin\omega t)\sin kL = 0$ -ból: $\sin kL = 0$
- $kL = n\pi$ ($n \in \mathbb{N}$), ebből: $k_n = \dfrac{n\pi}{L}$
- $\omega_n^2 = \mu^2 + c^2k^2 = \mu^2 + c^2 \dfrac{\pi^2}{L^2} n^2$, amiből: $\omega_n = \sqrt{\mu^2 + c^2 \dfrac{\pi^2}{L^2} n^2}$
- hullámegyenletnél: $\omega_n = \dfrac{c\pi n}{L} = n\omega_1$
- $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)\sin k_n x$ (mivel $n = 0$ -nál áll a húr)

kezdeti feltételek:

- $u(x,t=0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x = \alpha(x)$
- $\dfrac{\partial u(x,t=0)}{\partial t} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n\omega_n \sin k_n x = \beta(x)$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \int\limits_0^L \sin k_n x \sin k_m x dx = \int\limits_0^L \alpha(x)\sin k_m x dx$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L \sin k_n x \sin k_m x dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L \frac{\cos(k_n - k_m)x - \cos(k_n + k_m)x}{2} dx =$$
  $$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L \cos(n-m)\frac{\pi}{L}x - \cos(n+m)\frac{\pi}{L}x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} L\delta_{nm}$$

- $A_m = \frac{2}{L}\int_0^L \alpha(x)\sin k_m x dx$
- ugyanígy: $B_m = \frac{2}{L\omega_m}\int_0^L \beta(x)\sin k_m x dx$

$u(x,t) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(\cos\left(\frac{nc\pi}{L}t\right)\frac{2}{L}\int_0^L \alpha(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right)d\xi + \frac{\sin\left(\frac{nc\pi}{L}t\right)}{\frac{nc\pi}{L}}\frac{2}{L}\int_0^L \beta(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{L}\xi\right)d\xi\right) =$$

- $$= \int_0^L \alpha(\xi)\left(\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{L}x\sin\frac{n\pi}{L}\xi\cos\frac{nc\pi}{L}t\right)d\xi + \int_0^L \beta(\xi)\left(\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{L}x\sin\frac{n\pi}{L}\xi\frac{\sin\frac{nc\pi}{L}t}{\frac{nc\pi}{L}}\right)d\xi =$$

$$= \int_0^L \alpha(\xi)G_1(x,\xi,t)d\xi + \int_0^L \beta(\xi)G_2(x,\xi,t)d\xi$$

$$u(x,t) = \sum_n A_n \sin k_n x \cos\omega_n t + \sum_n B_n \sin k_n x \sin\omega_n t =$$

$$= \sum_n \frac{A_n}{2}\left(\sin(k_n x + \omega_n t) + \sin(k_n x - \omega_n t)\right) +$$

$$+ \sum_n \frac{B_n}{2}\left(\cos(k_n x - \omega_n t) - \cos(k_n x + \omega_n t)\right) =$$

- $$= \sum_n \left(\frac{A_n}{2}\sin k_n\left(x - \frac{\omega_n}{k_n}t\right) + \frac{B_n}{2}\cos k_n\left(x - \frac{\omega_n}{k_n}t\right)\right) +$$

$$+ \sum_n \left(\frac{A_n}{2}\sin k_n\left(x + \frac{\omega_n}{k_n}t\right) - \frac{B_n}{2}\cos k_n\left(x - \frac{\omega_n}{k_n}t\right)\right) =$$

$$= f\left(x - \frac{\omega_n}{k_n}t\right) + g\left(x + \frac{\omega_n}{k_n}t\right) = f(x - V_n t) + g(x + V_n t)$$

- $V_n = \frac{\omega_n}{k_n} = \sqrt{\frac{\mu^2}{k_n^2} + c^2}$
- ha $\mu = 0$: $V_n = c$, $u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$
- az f és g függvények Fourier-sora szerepel fenn

Ha feltételezzük, hogy exponenciális az időfüggés:

- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots\right) = p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u$ alakú differenciálegyenletekre
- $u(x,t) = e^{-i\omega t}X(x)$ alakban keresem a megoldást
- $-\omega^2 e^{-i\omega t}X(x) = e^{-i\omega t}p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)X(x)$
- $p\left(\frac{d}{dx}\right)X(x) = -\omega^2 X(x)$ (már nem parciális, a sajátfüggvényeket keressük)

A gerenda egyenletének megoldása:

- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -B^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$
- $\omega^2 e^{-i\omega t} X(x) = B^2 e^{-i\omega t} X''''(x)$
- $X''''(x) = \frac{\omega^2}{B^2} X(x)$
- $X(x) = a\cos\sqrt{\frac{\omega}{B}}x + b\sin\sqrt{\frac{\omega}{B}}x + c\,\mathrm{ch}\sqrt{\frac{\omega}{B}}x + d\,\mathrm{sh}\sqrt{\frac{\omega}{B}}x$
- a határfeltételek alkalmazásával folytatható a megoldás
- a hullámegyenletre és a Klein-Gordon egyenletre kijön az előző megoldás

Mindkét változótól való függést exponenciálisnak tekintve:

- ekkor a peremfeltételektől eltekintünk és azt vizsgáljuk milyen hullámok fordulhatnak elő
- $L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) = 0$
- $u(x,t) = e^{ikx} e^{-i\omega t}$ (k: hullámszám)
- $\frac{\partial u}{\partial t} = -i\omega u$ és $\frac{\partial u}{\partial x} = iku$
- $L(-i\omega, ik) u = 0$
- $L(-i\omega, ik) = 0$, ebből: $\omega = f(k)$
- $u(x,t) = \int C(k) e^{ikx} e^{-i\omega(k)t} dk$
- ha egy k-hoz több ω tartozik, akkor szummázni is kell

Annak a megvizsgálása, hogy milyen típusú hullámok terjedhetnek a közegben:

- $u = e^{ikx} e^{-i\omega t} = e^{ik(x - \frac{\omega}{k}t)} = e^{ik(x - v_f t)}$
- $v_f(k) = \frac{\omega}{k}$: fázissebesség
- $v_f(\omega)$: diszperzió jelensége (üvegszál, delfinek)
- ha $\omega = ck$ (pld.: hullámegyenlet, $\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = c^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$), v_f állandó, alkalmazható a D'alambert módszer
- a diszperziós relációk nem határoznak meg differenciálegyenletet

A csoportsebesség:

- $u(x,t) = \Re C e^{ikx} e^{-i\omega t} = \Re A e^{-i\varphi} e^{ikx} e^{-i\omega t} = \Re A e^{i(kx - \omega t - \varphi)} = A\cos(kx - \omega t - \varphi)$
- $(n \in \mathbb{Z})$
- $x = \frac{\varphi + \omega t}{k} + \frac{2\pi}{k} n$
- hullámhossz: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$
- $t = \frac{kx - \varphi}{\omega} - n\frac{2\pi}{\omega}$
- $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- térben és időben is síkhullám lesz

- egy valódi hullámot Fourier-analízissel lehet felbontani ilyenekre
  - pld.: : $f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(t)\,dt = Ce^{-\frac{\omega^2}{\Omega^2}}$, $\Omega \sim \frac{1}{T}$
- legyen $k_1 = k_0 - \Delta k$, $k_2 = k_0 + \Delta k$ ($\omega(k)$ lineárisnak tekinthető)

  $u(x,t)=\cos(k_1x-\omega_1 t)+\cos(k_2x-\omega_2 t)=$
- $=2\cos\frac{(k_1+k_2)x-(\omega_1+\omega_2)t}{2}\cos\frac{(k_1-k_2)x-(\omega_1-\omega_2)t}{2}=$

  $=2\cos(k_0x-\omega_0 t)\cos(\Delta kx-\Delta\omega t)$
- több hullámra is általánosítható
- burkológörbe: $\cos(\Delta kx-\Delta\omega t)=\cos\Delta k\left(x-\frac{\Delta\omega}{\Delta k}t\right)$
- csoportsebesség: $v_g=\frac{d\omega}{dk}$

Példák:

- páratlan időhatvánnyal rendelkező egyenletek általában irreverzibilis folyamatokat írnak le, míg a páros időhatvánnyal rendelkezők reverzibiliseket

Gerenda egyenlete:

- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-B^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$
- $(-i\omega)^2=-B^2(ik)^4$
- $\omega=Bk^2$
- $v_f=\frac{\omega}{k}=Bk=\sqrt{B\omega}$
- $v_g=\frac{d\omega}{dk}=2Bk=2v_f$

$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}=-A^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$:

- $\omega=\sqrt{Ak}$
- $v_f=\frac{\omega}{k}=\sqrt{\frac{A}{k}}=\frac{A}{\omega}$
- $v_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{k}}=\frac{1}{2}v_f$

Klein-Gordon egyenlet:

- $(-i\omega)^2=c^2(ik)^2-\omega_0^2$
- $\omega^2=c^2k^2+\omega_0^2$
- $\omega=\sqrt{c^2k^2+\omega_0^2}$
- $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-\frac{k^2}{\frac{\omega_0^2}{c^2}}=1$ (hiperbola)

- $v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{c^2k^2+\omega_0^2}}{k} = \sqrt{c^2 + \frac{\omega_0^2}{k^2}} = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$
- $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2k}{\sqrt{c^2k^2+\omega_0^2}} = c\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$
- $v_f v_g = c^2$

hővezetési egyenlet:

- $Q(t) = c\int T(\underline{r})\,dV$
- $\frac{dQ}{dt} = -\int \underline{j}d\underline{F}$ ($\underline{j}$: hőáram)
- zárt felületre: $c\int \frac{\partial T}{\partial t} = -\int \operatorname{div} \underline{j}dV$
- $c\frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \underline{j} = \lambda \operatorname{divgrad} T$
- (Fourier-féle hővezetési egyenlet (nem relativisztikus))
- 1 dimenzióban: $\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ (diffúziós egyenlet: $\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$)
- $\omega = -iDk^2$
- ha $k \in R$ (periodikusan melegítjük):
  - $\omega = -iDk^2 = -iB(k)$
  - $u(x,t) = \Re e^{ikx}e^{-i\omega t} = e^{-Bt}\cos kx$ (a hő szétkenődik a rendszerben, a cukor elolvad a pohár alján)
- ha $\omega \in R$ (periodikusan időfüggő a melegítés):
  - $k = \sqrt{\frac{i\omega}{D}} = \sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i)$
  - $u(x,t) = \Re e^{-i\omega t}e^{ikx} = \Re e^{-i\omega t}e^{(i-1)\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x} = \Re e^{-i\omega t}e^{iKx}e^{-\frac{x}{x_0}} = e^{-\frac{x}{x_0}}\cos(Kx-\omega t)$

    ($K = \sqrt{\frac{\omega}{2D}} = \frac{1}{x_0}$)
  - exponenciálisan csökkenő, adott sebességgel terjedő és szinuszos
  - egy periódus alatt századrészére csökken ($e^{-2\pi}$ -szeresére) az amplitúdó
  - pld.: nap süti a földet

Schödlinger egyenlet:

- kiindulás: $\hbar\omega = E = \frac{mv^2}{2}$ és $\hbar k = p = mv$
- $E = \frac{p^2}{2m}$
- $\hbar\omega = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$
- $\omega = \frac{\hbar}{2m}k^2$

- $\left(-i\omega\right)=i\left(\frac{\hbar}{2m}\right)\left(ik\right)^2$
- $\frac{\partial\psi}{\partial t}=i\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$
- $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$

potenciális erőtérben levő részecske Schödlinger egyenlete (hibás levezetés, jó eredmény (nincs ugyanis síkhullám alakú megoldása)):

- kiindulás: $\hbar\omega=E=\frac{mv^2}{2}+V\left(x\right)$ és $\hbar k=p=mv$
- $E=\frac{p^2}{2m}+V\left(x\right)$
- $\hbar\omega=\frac{\left(\hbar k\right)^2}{2m}+V\left(x\right)$
- $i\hbar\left(-i\omega\right)=-\frac{\hbar}{2m}\left(ik\right)^2+V\left(x\right)$
- $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V\left(x\right)\psi$

A Fourier módszer általános formája:

- $\frac{\partial}{\partial t}\phi\left(t,\underline{r}\right)=L\left(\underline{\nabla},\underline{r},\right)\phi$
- ha vannak magasabb rendű időderiváltak is: $\underline{\phi}=\begin{pmatrix}\phi\\ \phi'\\ \vdots\end{pmatrix}$
- $\frac{\partial\phi_a}{\partial t}=\sum_b L_{ab}\left(\underline{\nabla},\underline{r}\right)\phi_b$
- peremfeltételek: $\phi\left(t,\underline{r}\right)\Big|_{r\in S}=0$ (vagy egy $f\left(t\right)$ függvény, de az visszavezethet ide) és $\phi\left(t=0,\underline{r}\right)=\varphi\left(\underline{r}\right)$
- $\phi_a\left(t,\underline{r}\right)=e^{-i\omega t}\psi_a\left(\underline{r}\right)$ alakban keressük
- $-i\omega\psi_a\left(\underline{r}\right)=\sum_b L_{ab}\left(\underline{\nabla},\underline{r}\right)\psi_b$
- $\underline{L}\left(\underline{\nabla},\underline{r}\right)\underline{\psi}=-i\omega\underline{\psi}$ (L operátor sajátérték egyenlete)
- visszavezethető ide: $L\left(\underline{\nabla},\underline{r}\right)\psi=-i\omega\psi$
- határfeltételek: ω bizonyos diszkrét értékeket vesz fel és annyi paraméterrel adható meg ahány dimenziós az egyenlet

Téglalap alakú membrán rezgései:

- $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=0$
- $u=e^{-i\omega t}\psi\left(x,y\right)$ alakban keresem
- $\Delta\psi=-\frac{\omega^2}{c^2}\psi$
- határfeltételek: $\psi\left(x=0,y\right)=\psi\left(x=a,y\right)=0$, $\psi\left(x,y=0\right)=\psi\left(x,y=b\right)=0$

- $\psi(x,y) = X(x)Y(y)$ alakban keressük
- $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = -\frac{\omega^2}{c^2}X(x)Y(y)$
- $\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\frac{\omega^2}{c^2}$
- legyen $\frac{X''}{X} = -k^2$ és $\frac{Y''}{Y} = -q^2$
- ekkor: $X'' = -k^2 X$, $Y'' = -q^2 Y$ és $k^2 + q^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$
- $X(x) = A\cos kx + B\sin kx$ és $Y(y) = C\cos qy + D\sin qy$
- a határfeltételekből: $\sin ka = 0$ és $\sin qb = 0$
- ebből: $k_n = n\frac{\pi}{a}$ és $q_m = m\frac{\pi}{b}$
- $\omega_{nm} = c\sqrt{k^2 + q^2} = c\sqrt{n^2\frac{\pi^2}{a^2} + m^2\frac{\pi^2}{b^2}}$

A kör alakú membrán rezgései:

- $\Delta\psi = -\frac{\omega^2}{c^2}\psi$
- áttérünk polárkoordinátákra: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$
- $\psi(x,y) = \psi(r(x,y), \varphi(x,y))$
- $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\varphi$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\varphi$
- $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-\sin\varphi}{r}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\varphi}{r}$
- $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$
- $\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$
- $\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$

- $$\Delta\psi = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\psi + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\psi = \left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) +$$
$$+\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) =$$
$$= \cos\varphi\left(\cos\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\varphi}\right) -$$
$$-\frac{\sin\varphi}{r}(-\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial r} + \cos\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial r} - \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}) +$$
$$+\sin\varphi\left(\sin\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{\cos\varphi}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\varphi}\right) +$$
$$+\frac{\cos\varphi}{r}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial r} + \sin\varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right) = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$
- azért lesz ilyen szép mert azok a görbék, ahol a paraméterek állandóak merőlegesek egymásra
- $\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}\psi$
- $\psi(r,\varphi) = B(r)M(\varphi)$
- $B''(r)M(\varphi) + \frac{1}{r}B'(r)M(\varphi) + \frac{1}{r^2}B(r)M''(\varphi) = -\frac{\omega^2}{c^2}B(r)M(\varphi)$
- $r^2\left(\frac{B''}{B} + \frac{1}{r}\frac{B'}{B} + \frac{\omega^2}{c^2}\right) + \frac{M''}{M} = 0$
- legyen $\frac{M''}{M} = -m^2$, ekkor: $M(\varphi) = A\cos m\varphi + B\sin m\varphi$
- határfeltétel: $M(\varphi + 2\pi) = M(\varphi)$, tehát: $m \in Z$
- $B'' + \frac{1}{r}B' + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2}{r^2}\right)B = 0$ (megoldásai a Bessel-függvények)
- legyen $w = \frac{r\omega}{c}$, ekkor: $\frac{d}{dr} = \frac{\omega}{c}\frac{d}{dw}$ és $\frac{d^2}{dr^2} = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{d^2}{dw^2}$
- $\frac{d^2B}{dw^2} + \frac{1}{w}\frac{dB}{dw} + \left(1 - \frac{m^2}{w^2}\right)B = 0$ (m-indexű Bessel-egyenlet)
- megoldása: $B_m = \alpha\exists_m(w) + \beta N_m(w)$
- ha az egyenlet az origóban is értelmezve van: $B_m = \exists_m(w)$
- $\psi_m(r,\varphi) = \exists(w)e^{im\varphi}$
- határfeltétel: $\psi_m(R,\varphi) = 0$, ebből: $\exists_m(w)\big|_{r=R} = 0$
- legyen $\xi_k^{(m)}$ az m -edik Bessel-függvény k -adik zérushelye
- $w\big|_{r=R} = \xi_k^{(m)}$, ebből: $\omega_{mk} = \frac{c}{R}\xi_k^{(m)}$
- ugyanez térben: elektronfelhők

A Fourier-módszer általánosítása:

- $L(\underline{\nabla},\underline{r})\psi(\underline{r}) = -i\omega\psi(\underline{r})$ (ω_{klm} lesz)
- $\psi_{klm}(r,\vartheta,\varphi) = f_k(r)g_l(\vartheta)h_m(\varphi)$
- a ψ -k ortonormált rendszert alkotnak a helyvektorokon értelmezett függvények lineáris terében
- függvények skaláris szorzása: $\langle\psi(\underline{r})|\theta(\underline{r})\rangle = \int\psi^*(\underline{r})\theta(\underline{r})K(\underline{r})d\underline{r}^3$
- $K(\underline{r})$: magfüggvény, a differenciálegyenletből meghatározható
- ortogonalitási követelmény: $\langle\psi_{klm}|\psi_{k'l'm'}\rangle = \delta_{kk'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}$ (L -re megkötéseket kell tenni)
- pld.: körfelületen értelmezett függvények: $\langle f(\vartheta,\varphi)|g(\vartheta,\varphi)\rangle = \int f^*(\vartheta,\varphi)g(\vartheta,\varphi)\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$
- ha $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx$: $\int\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \delta_{nm}$
- Bessel-függvényekre: $\psi_{mk}(r,\varphi) = \exists_m\left(\frac{\omega_{km}r}{c}\right)\cos(m\varphi)C_{mk}$, ahol $\omega_{km} = \frac{c}{R}\xi_k^{(m)}$
- $\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\psi_{mk}^*(r,\varphi)\psi_{m'k'}(r,\varphi)rdrd\varphi = \delta_{mm'}\delta_{kk'}$
- teljes ortonormált bázist alkotnak az adott tartományon értelmezett függvények lineáris terén (a határfelülettől is függ a dolog nem csak a diffegyenlettől)
- $\forall\Psi(r,\varphi):\Psi(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}c_{km}\psi_{km}(r,\varphi)$
- $\Psi(r,\varphi,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}c_{km}\psi_{km}(r,\varphi)e^{-i\omega_{km}t}$
- $\frac{\partial\phi(\underline{r},t)}{\partial t} = L(\underline{\nabla},\underline{r})\phi(\underline{r},t)$, $\phi(\underline{r}\in\underline{S},t) = 0$ és $\phi(\underline{r},t=0) = Z(\underline{r})$
- $L(\underline{\nabla},\underline{r})\varphi(\underline{r}) = \lambda\varphi(\underline{r})$ és $\varphi(\underline{r}\in\underline{S}) = 0$
- legyen $\lambda_{n_1,n_2,\ldots,n_d} = \lambda_{\underline{n}}$ és $\varphi_{n_1,n_2,\ldots,n_d}(\underline{r}) = \varphi_{\underline{n}}(\underline{r})$
- $\langle\varphi_{\underline{n}}|\varphi_{\underline{n}'}\rangle = \delta_{\underline{n}\underline{n}'}$ (teljes ortonormált bázist alkotnak)
- $\forall\psi(\underline{r}),\exists c_{\underline{n}}:\psi(\underline{r}) = \sum_{\underline{n}}c_{\underline{n}}\varphi_{\underline{n}}(\underline{r})$ (általánosított Fourier-probléma)
- $\langle\varphi_{\underline{n}}|\psi\rangle = \sum_{\underline{n}}c_{\underline{n}}\langle\varphi_{\underline{n}}|\varphi_{\underline{m}}\rangle = \sum_{\underline{n}}c_{\underline{n}}\delta_{\underline{n}\underline{m}} = c_{\underline{m}}$
- $Z(\underline{r}) = \sum_{\underline{n}}c_{\underline{n}}(0)\varphi_{\underline{n}}(\underline{r})$, ebből: $c_{\underline{n}}(0) = \langle\varphi_{\underline{n}}|Z\rangle$
- $\sum_{\underline{n}}\dot{c}_{\underline{n}}(t)\varphi_{\underline{n}}(\underline{r}) = \frac{\partial\phi}{\partial t} = L\phi = L\sum_{\underline{n}}c_{\underline{n}}\varphi_{\underline{n}} = \sum_{\underline{n}}c_{\underline{n}}\lambda_{\underline{n}}\varphi_{\underline{n}}$
- ebből $\dot{c}_{\underline{n}}(t) = c_{\underline{n}}\lambda_{\underline{n}}$, tehát: $c_{\underline{n}}(t) = e^{\lambda_{\underline{n}}t}c_{\underline{n}}(0)$

$$\phi(\underline{r},t)=\sum_{\underline{n}} c_{\underline{n}}(0)e^{\lambda_{\underline{n}}t}\varphi_{\underline{n}}(\underline{r})=\sum_{\underline{n}}\langle\varphi_{\underline{n}}|Z\rangle e^{\lambda_{\underline{n}}t}\varphi_{\underline{n}}(\underline{r})=$$

- $$=\sum_{\underline{n}}\left(\int\varphi_{\underline{n}}^*(\underline{R})Z(\underline{R})K(\underline{R})d^d\,\underline{R}\right)e^{\lambda_{\underline{n}}t}\varphi_{\underline{n}}(\underline{r})=$$
  $$=\int\left(K(\underline{R})\sum_{\underline{n}}\varphi_{\underline{n}}^*(\underline{R})\varphi_{\underline{n}}(\underline{r})e^{\lambda_{\underline{n}}t}\right)Z(\underline{R})d^d\,\underline{R}=\int G(\underline{r},t,\underline{R})Z(\underline{R})d^d\,\underline{R}$$
- $G(\underline{r},t,\underline{R})$: terjedési függvény, propagátor
- a hullámegyenletre ($\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)u=0$):
  - ha $d\in\{1,3\}$: $G(\underline{r},t,\underline{R})=\frac{1}{4\pi r}\delta\left(t-\frac{|\underline{r}-\underline{R}|}{c}\right)$
  - egyébként nincs egy adott sebesség amivel a hullámok terjednek, a c csak a maximális sebesség lesz
- a Klein-Gordon egyenletre ($\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)u=\mu^2$):