Rezgések és hullámok

Előadó: Dávid Gyula
- ZH lesz félév végén

↳ jan. első napjaiban lesz a vizsga ZH (1 vizsga lesz)
- vizsgákat nem kell előre felvenni

ZH:
5 feladat < 3 feladatot kell kiszámolni
többihez is hozzá kell tudni szólni"

Példatár:
- Elm. fiz 1. mechanika, rezgések

1. óra

út-idő diagram

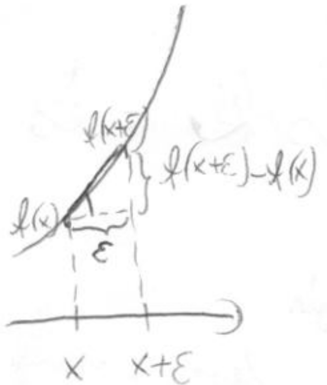
nincs szakadás

törés elvileg nincs

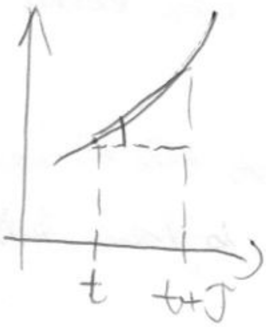
pattogó labda

valójában benyomja a földet
↳ folyt.-an változik a sebesség

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$



– nincs derivált



$$v = \dot{x}(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau}$$

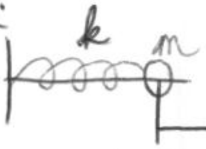
derivált fv.

$$\ddot{x}(t) = \dot{v}(t) = a(t)$$

rezgéstan

$$\left(\ddot{u}(t) = \dot{v}(t) = a\right)$$

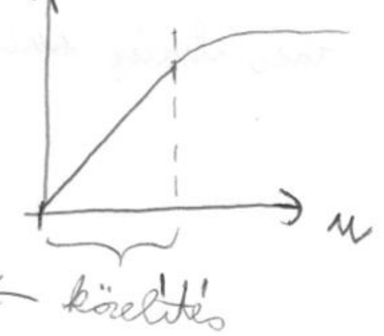
Példa:



rezgéstanban az egyensúlyi rendszertől való eltérést mérjük → ehhez viszonyítunk

$F = m \cdot \ddot{u}(t)$ $\quad F = -k \cdot u$

a linearitás nem mindenhol igaz, de jó közelítés, és könnyen ~~használható~~ számolható



← közelítés

linearitás nem közelítés:

- elektrodinamika, optika
- kvantumelmélet

$m \cdot \ddot{u}(t) = -k \cdot u(t)$

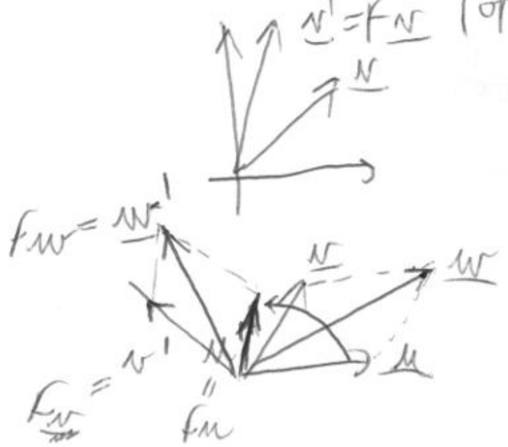
- másodrendű diff. egyenlet
- közönséges (1db független vált. (t)) ↔ parciális (több független változó van)

pl. x, y, z, hullámtan

- lineáris:

$A(v+u)$ lineáris (operátor)

$\underline{v}' = F\underline{v}$

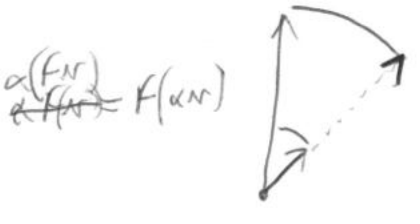


vektorok

$w' = v' + u'$

$Fw = Fv + u$ additivitás

$F(v+u) = Fv + Fu$



$\alpha(Fv) = F(\alpha v)$ = homogenitás

---

linearitás

fv-ek

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

$(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$

$\text{"} Df \text{"} = f'$

linearitás

$D(f+g) = Df + Dg$

$D(\alpha f) = \alpha \cdot (Df)$

(- nem lineáris:

$\ddot{u} = -\sin u$ (inga egyenlete nagy kitérésre)

$\dot{u} = \frac{1}{u}$

$\ddot{u} = -u^2$

- ált. diff. egy.

$f'(x) = g(x) \quad / \int$

$f(x) = \int g(x)\,dx \rightarrow$ mo. = integrálás

= ált. ban nincs megoldás)

⇒ u-t, $\dot{u}$-t, $\ddot{u}$-t csak összeadtuk és számmal szoroztuk

$m\ddot{u}(t) = -k\,u(t)$ állandó együttható

$\ddot{u} = u \cdot \sin t$ vált. — ‖ —

$m > 0 \quad k > 0$

$m \cdot \ddot{u} = -ku$

$m\ddot{u} + ku = 0$

$\ddot{u} + \frac{k}{m} u = 0$

$\frac{k}{m} = \omega_0^2$

$\boxed{\ddot{u} + \omega_0^2 \cdot u = 0}$ standard alak

Csillapítás

fékező dugattyú

$m\ddot{u} = \sum F = F_R + F_C \qquad \boxed{m\ddot{u} = -ku - c\dot{u}}$

$F_R = -ku$

$F_C = -c \cdot \dot{u}$

$\cancel{\left(\ddot{u} + \frac{k}{m}\right)}$ $\quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\frac{c}{m} = 2\beta$$

$$\boxed{\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 \cdot u = 0}$$ homogén lin.

↳ 1 mo. van

Gerjesztőerő

a) 

kényszererő

- külső rendszer, ami
  túl nagy a vizsgált rendszerhez
  képest → elhanyagoljuk a visszahatást

$$m\ddot{u} = -ku - c\dot{u} + F(t) \quad / \cdot \frac{1}{m}$$

$$f(t) := \frac{F(t)}{m}$$

$$\ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = \frac{1}{m}F(t)$$

$$\boxed{\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = f(t)}$$ ← külső behatás

inhomogén lineáris → ∞ megoldás lehetséges

Jelölés: $\dot{u} = Du$

$$\ddot{u} = \cancel{D^2 u}\ D(Du) = D^2 u$$

$$u^{(n)} = D^n u$$

$$D^2 u + \omega_0^2 u = 0 \qquad (D^2 + \omega_0^2)u = 0$$

$$D^2 u + 2\beta \cdot Du + \omega_0^2 u = 0 \qquad (D^2 + 2\beta \cdot D + \omega_0^2)u = 0$$

$$\boxed{\underbrace{L(D)}\, u(t) = 0}$$

D lineáris polinomja, pl. $L(D) = D^2 + \omega_0^2$

$$\boxed{L(D) \cdot u(t) = f(t)}$$

$$\xrightarrow{f(t)} \boxed{L(D)} \xrightarrow{u(t)}$$

(fekete doboz)

állandó külső gerjesztésre így reagál ~~egyenle~~

$$\boxed{L(D)} \xrightarrow{u(t)}$$

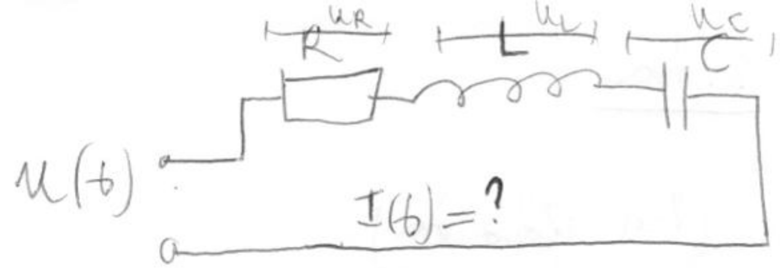
nincs „bemenő" jel, de a kezdetben kitérítették az egyensúlyi állapotból

↓

a megoldáshoz kell kezd. felt. (önmagában nem oldja meg a feladatot)

– egy közönséges diff. egyenlethez annyi kezdőfeltétel kell, ahányad rendű

a homogén egyenletnek mindig megoldása az $u = 0$, az inhomogénnek nem



$$u_R + u_L + u_C = u(t)$$

$$u_R(t) = R \cdot I(t)$$

$$u_L(t) = L \cdot \underbrace{\frac{dI}{dt}}_{\dot{I}}$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int I \, dt \qquad Q = C \cdot u$$

$$\dot{Q}(t) = I(t)$$

$$Q(t) = \int I(t) \, dt$$

$$R \cdot I(t) + L \cdot \dot{I}(t) + \frac{1}{C} \int I \, dt = u(t) \Big/ \frac{d}{dt}$$ integrodifferenciál-egyenlet

$$R \cdot \dot{I} + L \cdot \ddot{I} + \frac{1}{C} I = \dot{u}(t)$$

$$\ddot{I} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\beta} \dot{I} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} I = \underbrace{\frac{1}{L} \dot{u}(t)}_{f(t)}$$

$$\boxed{\ddot{I} + 2\beta \cdot \dot{I} + \omega_0^2 I = f(t)} \sim \ddot{u} + 2\beta \dot{u} + \omega_0^2 \cdot u = f(t)$$

$L \sim m$ tehetetlenség: meg akarja akadályozni a magát

$R \sim c$ súrlódás: elvesik energia

$C \sim k$ rugó → tárolódik benne az energia

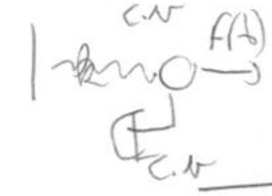
= egyszerűbb pl. egy elektromos rendszerrel modellezni egy mechanikai rendszert

2. óra

Ism. Harmonikus oszcillátor (lsd. előző óra)

$m\ddot{u}(t) = -ku \qquad \ddot{u} + \frac{k}{m}u = 0$

$m\ddot{u}(t) = -ku - c\dot{u} \qquad \ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = 0$



$m\ddot{u} = -ku - c\dot{u} + f(t) \qquad \ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = \frac{1}{m}f(t)$

$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \qquad \frac{c}{m} = 2\beta \qquad \frac{f(t)}{m} = \ell(t)$

közönséges
másodrendű
lineáris
állandó együtthatós

$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$
$\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$ } homogén
$\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = \ell(t)$ → inhomogén
∞ sok probléma

- ezek korlátozott tartományban igazak
- Jelölések:

$D(u_1(t) + u_2(t)) = (Du_1) + (Du_2) \qquad Du = \dot{u}$

$(u_1 + u_2)^{\cdot} = \dot{u}_1 + \dot{u}_2$ } linearitás

$D(\alpha u) = \alpha(Du)$

$(\alpha u)^{\cdot} = \alpha \cdot \dot{u}$ } homogenitás

$\ddot{u} = (\dot{u})^{\cdot} = D\dot{u} = D(Du) = D^2 u$

$\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$

$D^2 u + 2\beta D u + \omega_0^2 u = 0$

$(D^2 + 2\beta D + \omega_0^2) u = 0$

$\left(\frac{E}{\cancel{m}}\right)$

D hatványainak lineárkombinációja (polinom): $L(D)$

(világegyenlet:

$U = 0$

unnaturalty (természetellenesség)

$U = U_m + U_{ED} + U_{QM} + \ldots$

$U_m = (F - ma)^2$)

↓ írással sokat nyertünk

• nem biztos, hogy ezzel az ~~átír~~

(↳ ~~belátjuk~~ de most sokat nyertünk)

• $L(D)\, u(t) = 0$

Egzisztencia } tételek → ∃ megoldás, 1 ms. létezik

Unicitás

~~Ezek most~~

a kezdőfeltételek most ezt meghatározzák

(nem mindig, pl. turbulencia hidrodinamikában) korrekt kitűzésű mat. probléma: meg vannak adva a kezdőfeltételek

általános megoldás: ha nincsenek megadva a kezdőfeltételek, ismeretlen konstansokkal kapjuk a megoldást

speciális, partikuláris mo: megadjuk az ált mo.-hoz a kezdőfelt.-eket

$$\boxed{\text{KF}: t=0 \quad u(0)=u_0 \quad \dot{u}(0)=v_0}$$

$$f(x)' = -\cos x$$

$$f(x) = \int dx\,(-\cos x) = -\sin x + K$$

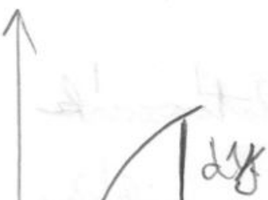
↓

a legegyszerűbb d.e.-eket integrálással oldjuk meg

– Ezért általában a d.e.-ek megoldását a d.e.-ek integrálásának nevezzük.

Diff. egyenletek

1) $f'(x) = c\,f(x)$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{df}{dx} = c f$$

$$df = c \cdot f\,dx$$

$$\frac{df}{f} = c\,dx$$

$$\int \frac{df}{f} = c \cdot \int dx$$

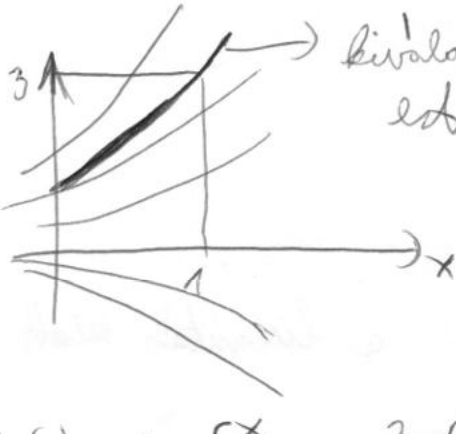
$$\ln f = c \cdot x + k$$

$$e^{\ln f} = \cancel{(\dots)}\, e^{cx+k}$$

$$f = e^{cx} \cdot \underbrace{e^{k}}_{B} = B \cdot e^{cx}$$

$$f(x) = B \cdot e^{cx}$$

$$f' = B\left(e^{cx}\right)' = B \cdot e^{cx} \cdot (cx)' = B \cdot c \cdot e^{cx} = c \cdot \left(Be^{cx}\right) = c \cdot f$$



→ kiválasztjuk ezt a görbét a kezdőfeltétellel

$$f(x) = B \cdot e^{cx} \qquad 3 = Be^{c \cdot 1}$$

kezdőfelt.: $B = 3 \cdot e^{-c}$

↳ $f(1) = 3$

$$\Rightarrow f(x) = 3e^{-c} \cdot e^{cx}$$

↓

2) általában is exp alakban keressük a megoldást

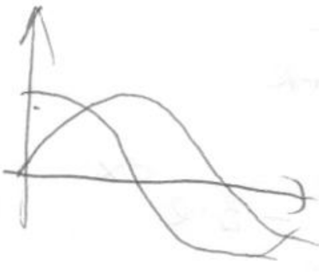
TFH.: $f(x) = e^{\lambda x}$

$f' = c \cdot f$

$f' = \lambda e^{\lambda x}$

$\lambda \cdot e^{\lambda x} = c \cdot e^{\lambda x}$

komplexbe $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$



$e^{\lambda x}$ még komplexben sem 0 $\left(|e^{i\varphi}| = 1 \neq 0\right)$

$\lambda = c$

$B = ?$

$\downarrow$

ha $e^{\lambda x}$ mo., $2e^{\lambda x}$ is mo, ... a linearitás miatt

$\boxed{Df = \lambda f}$

$T\vec{v} = \lambda \vec{v}$ → sajátvektor

hasonlóan az expon. fv. a differenciálásoperátor sajátfv.-e → ezért próbálkozunk ezzel.

KF: $t=0$ $u(0)=u_0$ $\dot{u}(0)=v_0$

$$\ddot{u}+2\beta\dot{u}+\omega_0^2 u=0$$

TFH $\quad u(t)=e^{\lambda t}$

$$\dot{u}=\lambda\cdot e^{\lambda t}$$

$$\ddot{u}=\lambda^2\cdot e^{\lambda t}$$

$$\ddot{u}+2\beta\dot{u}+\omega_0^2 u=0$$

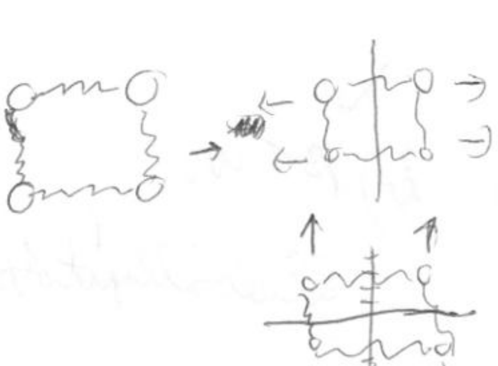
$$\lambda^2 e^{\lambda t}+2\beta\lambda e^{\lambda t}+\omega_0^2 e^{\lambda t}=0$$

$$\left(\lambda^2+2\beta\lambda+\omega_0^2\right)e^{\lambda t}=0 \ /:\underset{\neq 0}{e^{\lambda t}} \longleftrightarrow \left(D^2+2\beta D+\omega_0^2\right)u=0$$

$$\boxed{\lambda^2+2\beta\lambda+\omega_0^2=0}$$

differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

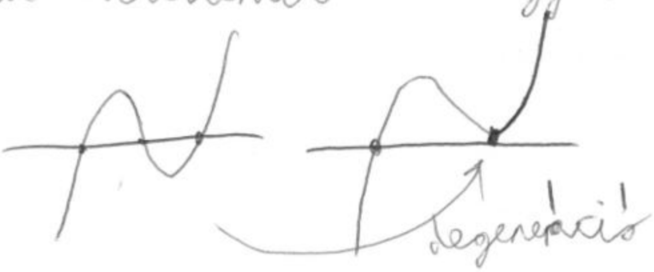
- ahányad rendű a d.e., annyiad fokú a kar. egyenlet
- komplex számok halmazán mindig van n db gyök



szimmetria miatt 2 sajátérték egybeesik

- degeneráció

ha véletlenül esik egybe 2 gyök:



- <u>perturbáció</u> → kis zavar
  a perturbáció megszünteti a degenerációt
- ha véletlen degeneráció lép fel → „légy" (ε perturb.)
  ezzel oldjuk meg
  végeredményben $\varepsilon \to 0$-t nézünk

- a megoldás során komplex eredményeket is kaphatunk
  ↳ de a végeredményben csak a valós részekkel foglalkozunk

Most tfh $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\cdot\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

a) $\beta > \omega_0$ $\left(2\beta = \frac{c}{m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}\right)$

$$\frac{c}{2m} > \sqrt{\frac{k}{m}}$$

nagyobb egy ~~határ.~~ kritikus értéknél

túlcsillapított

b) $\beta < \omega_0$

alulcsillapított rezgés

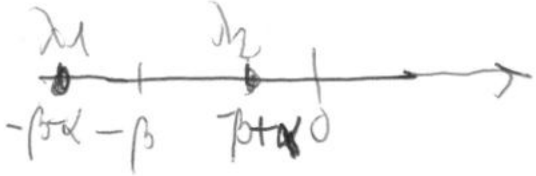
↓ mindkettő lehet hasznos

a) $\beta > \omega_0$

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$\alpha^2 = \beta^2 - \omega_0^2 \qquad \alpha < \beta$$

$$\lambda = -\beta \pm \alpha$$



$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

$$\gamma_1 = -\lambda_1 = \beta + \alpha > 0$$

$$\gamma_2 = -\lambda_2 = \beta - \alpha > 0$$

$\Downarrow$

~~(=Nan=e)~~ kétféle $u(t)=e^{\lambda t}$ alakú megoldás van

λ_1 , λ_2

$u_1(t) = e^{\lambda_1 t} \qquad u_2 = e^{\lambda_2 t}$

– de 1 megoldás többszöröse is mo. homogén de. esetén

– 2 megoldás összege is mo.

$\Downarrow$

a megoldások lineárkombinációja is mo.

lineáris tér: homogén d.e.-ek megoldásai lineáris teret alkotnak

$$\underline{\underline{u(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}}}$$

↓

általános megoldás (áll.: minden mo. ilyen alakú)

$$\dot{u}(t) = A \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

$$u(0) = A \cdot 1 + B \cdot 1 \overset{!}{=} u_0 \quad / \cdot \lambda_2$$

$$\dot{u}(0) = A \cdot \lambda_1 \cdot 1 + B \cdot \lambda_2 \cdot 1 \overset{!}{=} v_0$$

$$A \cdot \lambda_2 + B \lambda_2 = u_0 \cdot \lambda_2$$

$$A \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) = v_0 - u_0 \lambda_2$$

$$A = \frac{v_0 - u_0 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$B \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) = v_0 - u_0 \lambda_1$$

$$B = \frac{v_0 - u_0 \cdot \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$\boxed{u(t) = \frac{v_0 - u_0 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot e^{\lambda_1 t} + \frac{v_0 - u_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}}$$

ha $\beta > \omega_0$)

~~(part. mo. általános)~~

partikuláris mo.

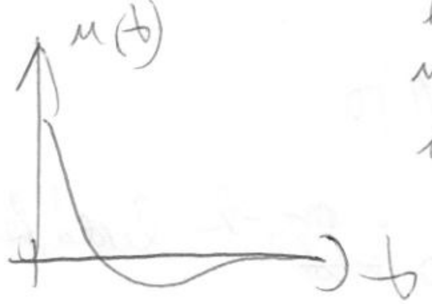
$\lambda_1 = -\beta - \alpha$ $\qquad \lambda_1 - \lambda_2 = -2\alpha$

$\lambda_2 = -\beta + \alpha$ $\qquad \lambda_2 - \lambda_1 = 2\alpha$

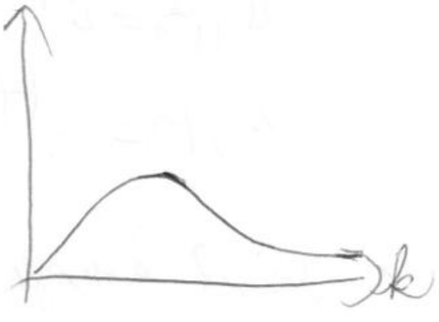
$$u(t) = \frac{v_0 - u_0(\beta + \alpha)}{-2\alpha} e^{-\lambda_1 t} + \frac{v_0 - u_0(-\beta - \alpha)}{2\alpha} e^{-\lambda_2 t}$$

a 2 fv.:

ha $u_0 \neq 0$, $v_0 = 0$



ha $v_0 \neq 0$, $u_0 = 0$



túlcsillapított eset

b) $\beta < \omega_0$

$$\underbrace{\beta^2 - \omega_0^2}_{} < 0$$

$$-\Omega^2 = \beta^2 - \omega_0^2$$

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm \sqrt{-\Omega^2}$$

$$\lambda = -\beta \pm i\Omega$$

fizikában ez is előfordulhat

$$\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

$$u(t) = e^{\lambda t}$$

$$u_1(t) = e^{(-\beta + i\Omega)t}$$

$$u_2(t) = e^{(-\beta - i\Omega)t}$$

- Mivel homogén, ezért a mo.-k lineárkombinációja is mo.

- a lineárkomb. már nem lesz ugyanaz, mint az egyszerű próbafv. !!

$$u(t) = A e^{(-\beta + i\Omega)t} + B e^{(-\beta - i\Omega)t} \qquad A, B \in \mathbb{C}$$

$A = \ldots + i\ldots$, $B = \ldots + i\ldots$ $\Big\} \to$ 4 ismeretlen, de látszólag csak 2 kezdeti feltét van

a kezdeti feltételek is komplexek, csak $\mathrm{Im}\, u_0$, $\mathrm{Im}\, v_0 = 0 \Rightarrow$ ezek is fontosak most

$$= A^{-\beta t + i\Omega t} + B e^{-\beta t - i\Omega t}$$

$$= A e^{-\beta t} \cdot e^{i\Omega t} + B e^{-\beta t} e^{-i\Omega t} = e^{-\beta t}\left(A e^{i\Omega t} + B e^{-i\Omega t}\right) \#$$

mivel: $e^{i\Omega t} = \cos\Omega t + i \sin\Omega t$

$e^{-i\Omega t} = \cos\Omega t - i \sin\Omega t$

$$\# \; u(t) = e^{-\beta t}\left[A(\cos\Omega t + i\sin\Omega t) + B(\cos\Omega t - i\sin\Omega t)\right] =$$

$$= e^{-\beta t}\left[\underbrace{(A+B)}_{a\in\mathbb{R}}\cos\Omega t + i\underbrace{(A-B)}_{b\in\mathbb{R}}\sin\Omega t\right]$$

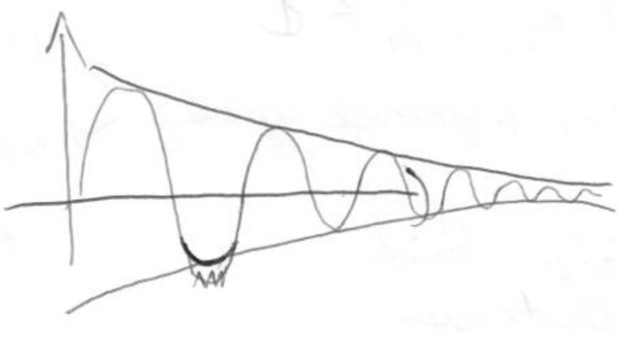
↓ úgy lesz valós a megoldás, hogy A és B egymás komplex konjugáltjai

$$A^* \Rightarrow (A e^{i\Omega t})^* = A^* e^{-i\Omega t} = B e^{-i\Omega t}$$

és 

$z + z^* =$ valós $(2\,\mathrm{Re}\,z)$

$$\underline{\underline{u(t) = e^{-\beta t}(a\cos\Omega + b\sin\Omega t)}}$$



$\Downarrow$

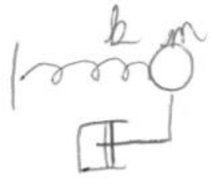
= ugyanannak a differenciálegyenletnek a megoldásai különbözőek lehetnek a paraméterektől függően

$\uparrow$

komplex számok, Euler-összefüggés

3. óra

0) ism.:



$$\ddot{u} + 2\beta\cdot\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

c $\to u(t)$ $\quad 2\beta = \frac{c}{m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

($\overset{\circ}{\left(\frac{d}{dt}\right)} \to D \quad \dot{u} = Du \quad \ddot{u} = D^2 u$)

$$\left(D^2 + 2\beta D + \omega_0^2\right) u(t) = 0$$

$\to u(t) = e^{\lambda t}$ alakban keressük a mo.-t

$$Du = \lambda\cdot u$$

$$L(D)u = L(\lambda)\cdot u \overset{!}{=} 0$$

$$L(\lambda) = 0 \to \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in \mathbb{C}$$

$\lambda_1 = \lambda_2$ (egybeesnek gyökök) $\nearrow$ szimm. $\searrow$ degeneráció $\downarrow$ perturbáció

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= e^{\lambda_1 t} \\ u_2 &= e^{\lambda_2 t} \\ &\vdots \\ u_n &= e^{\lambda_n t} \end{aligned}\right\}$$ lineáris térben bázist alkotnak

$u(t) = \sum_k A_k e^{\lambda_k t}$ $\quad A_k \in \mathbb{C}$

$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

$\beta > \omega_0$

$\lambda_1 = -\beta - \alpha$

$\lambda_2 = -\beta + \alpha$

túlcsill. eset

$\beta \leq \omega_0$

(alulcsill. eset)

$\beta^2 - \omega_0^2 = -\Omega^2$

$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\Omega$

$u_1(t) = e^{(-\beta + i\Omega)t}$

$u_2(t) = e^{(-\beta - i\Omega)t}$

$u(t) = A \cdot e^{(-\beta + i\Omega)t} + B \cdot e^{(-\beta - i\Omega)t} = A \cdot e^{-\beta t} e^{i\Omega t} + B \cdot e^{-\beta t} \cdot e^{-i\Omega t} =$

1) $= e^{-\beta t}\left(A \cdot e^{i\Omega t} + B \cdot e^{-i\Omega t}\right)$ standard 1. alak

ha $\beta = 0$

$\Omega = \omega_0 \to A \cdot e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t}$

$= e^{-\beta t}\left(A(\cos(\Omega t) + i \sin \Omega t) + B(\cos \Omega t - i \sin \Omega t)\right) =$

$= e^{-\beta t}(A+B)\cos(\Omega t) + e^{-\beta t} i(A - B)\sin(\Omega t)$

$a = A + B$

$b = i(A - B)$

$u(t) = e^{-\beta t}(a \cos \Omega t + b \sin \Omega t)$ 2. alak

$$= \sqrt{a^2+b^2}\, e^{-\beta t}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \Omega t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \Omega t\right)$$

Legyen:

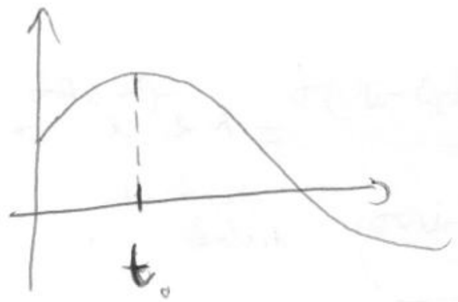
$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \to \cos^2 + \sin^2 = 1$$

$$C = \sqrt{a^2+b^2}$$

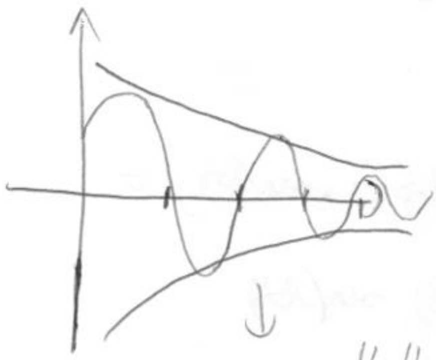
$$x(t) = C \cdot e^{-\beta t}\left(\cos\varphi \cdot \cos \Omega t + \sin \varphi \cdot \sin \Omega t\right) =$$

$$= C \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\Omega t - \varphi) \qquad \text{3. alak}$$

$$C e^{-\beta t} \cos(\Omega (t - t_0)) \qquad \text{4. alak}$$



fáziskésés



nem sűrűsödik (ω = áll)

2) ha adott

KF: $t=0$ $u(0)=u_0$

$\dot{u}(0)=v_0$

$$u(t)=e^{-\beta t}(a\cos\Omega t + b\sin\Omega t)$$

$$\dot{u}=-\beta\cdot e^{-\beta t}(a\cos\Omega t+b\sin\Omega t)+e^{-\beta t}(-a\sin(\Omega t)\cdot\Omega+b\Omega\cos(\Omega t))$$

$$u(t=0)=a=u_0$$

$$\dot{u}(t=0)=-a\beta\ \cancel{+a\beta}+b\Omega=v_0$$

$$b\Omega=v_0+\beta u_0$$

$$\cancel{\left(\Omega=\frac{v_0}{b}+\frac{\beta}{b}u_0\right)}$$

$$a=u_0 \qquad b=\frac{v_0+\beta u_0}{\Omega}$$

$\Downarrow$

a, b is valós

de $a=A+B$ $\qquad A+B=a$

$b=i(A-B) \xrightarrow{:i} A-B=-ib$

$A=\dfrac{a-ib}{2}$

$\underline{\underline{B=\dfrac{a+ib}{2}}}=\underline{\underline{A^*}}$

$\Downarrow$

$$A\cdot e^{i\ldots}+\underbrace{B\cdot e^{-i\ldots}}_{(A\cdot e^{i\ldots})^*}\rightarrow z+z^*=\text{valós szám}$$

$$\underline{\underline{u(t)=e^{-\beta t}\left(u_0\cos\Omega t+\frac{v_0+\beta u_0}{\Omega}\cdot\sin\Omega t\right)}}$$

$$C=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{u_0^2+\left(\frac{v_0+\beta u_0}{\Omega}\right)^2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}=\frac{v_0+\beta u_0}{\Omega u_0}$$

$$\downarrow$$

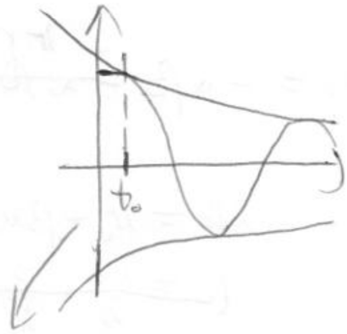
$$\varphi=\dots$$

3) a) Speciális eset$_1$:

$v_0(t=0)=0$

$u_0\neq 0$

$$u(t)=e^{-\beta t}u_0\left(\cos\Omega t+\frac{\beta}{\Omega}\sin\Omega t\right)$$



van fáziskésés

t_0-t az a hely adja meg, ahol exp metszi

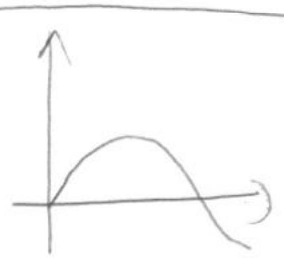
b) Spec.$_2$:

$u_0=0$

$v_0\neq 0$

$$\boxed{u(t)=e^{-\beta t}v_0\cdot\frac{\sin\Omega t}{\Omega}}$$

Green-fv. a Ω-t.



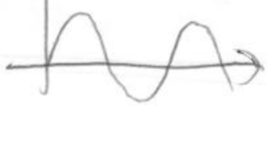
4) $\beta=0$

$$u(t)=u_0\cos\omega_0 t+\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

a) $v_0=0$

$u(t)=u_0\cos\omega_0 t$

b) $u_0=0$ $\quad u(t)=\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega t$



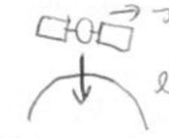
mi van, ha $\beta < 0$

$\swarrow$

nincs negatív súrlódás, se $\ominus$ tömeg → (égi mechanikai paradoxon

$\Downarrow$

ez csak akkor lehet, ha külső hatás van (gerjesztés)



$\vec{}$ súrl. → v csökken
elkezd a Föld felé gyorsulni a műhold
$\Downarrow$
a súrl. most "gyorsít"

Összefoglalás:

$$L(D) = D^n + \alpha D^{n-1} + \dots$$

$$L(D)\, u(t) = 0$$

$$u(t) = e^{\lambda t}$$

$$L(D)\, e^{\lambda t} = L(\lambda)\, e^{\lambda t} = 0$$

$$L(\lambda) = 0$$

$\swarrow$

$$\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$$

$$e^{\lambda_1 t}\ e^{\lambda_2 t} \dots e^{\lambda_n t}$$

$$u(t) = \sum_k A_k \cdot e^{\lambda_k t}$$

$$\dot{u}(t) = \sum_k A_k \lambda_k e^{\lambda_k t}$$

$$\ddot{u} = \sum_k A_k \lambda_k^2 \cdot e^{\lambda_k t}$$

$\vdots$

$t=0$

$$u(0) = u_0$$
$$\dot{u}(0) = u_1$$
$$\ddot{u}(0) = u_2$$
$$\vdots$$
$$u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}$$

Kf-ek:

$$u(0) = \sum A_k = u_0$$
$$\dot{u}(0) = \sum A_k \lambda_k = u_1$$
$$\ddot{u}(0) = \sum A_k \lambda_k^2 = u_2$$
$$\vdots$$

→ n egyenletből álló egyenletrendszer

Csillapítatlan oszcillátor

$m\ddot{u} = -ku \qquad mDu = -ku$

$\ddot{u} = -\omega_0^2 u$

$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$

$u(t) = e^{\lambda t}$

$\dot{u}(t) = \lambda \cdot e^{\lambda t}$

$\ddot{u}(t) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$

$\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} + \omega_0^2 \cdot \cancel{e^{\lambda t}} = 0$

$\lambda^2 = -\omega_0^2$

$\lambda = \pm i\omega_0$

$u_1(t) = e^{i\omega_0 t}$

$u_2(t) = e^{-i\omega_0 t}$

$u(t) = A \cdot e^{i\omega_0 t} + B \cdot e^{-i\omega_0 t}$

$u(t) = (A+B)\cos\omega_0 t + i(A-B)\sin\omega_0 t$

$u(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t$

⋮

Lehetne-e komplex számok nélkül?

↓ a cos és sin csak a csillapítatlan oszcillátornál jó bázisfv., mert ~~az~~ D-nek nem sajátfv.-e, csak D^2-nek.

Spórólj(unk) meg ~~...~~ pár lépést:

TFH: $\boxed{u(t) = e^{i\omega t}}$ alakú a megoldás (eddig t-ra $\omega \neq \omega_0$ komplex jött ki)

$\dot{u} = i\omega \cdot e^{i\omega t}$

$\ddot{u} = (i\omega)^2 e^{i\omega t}$

$\vdots$

$u^{(n)} = (i\omega)^n \cdot e^{i\omega t}$

$L(D)\, e^{i\omega t} = L(i\omega)\, e^{i\omega t}$

$L(i\omega) = 0$ a karakterisztikus egyenlet

$L(D) = D^2 + \omega_0^2$

$L(i\omega) = (i\omega)^2 + \omega_0^2 = -\omega^2 + \omega_0^2 \overset{!}{=} 0$

$\omega = \pm \omega_0$

$u_1(t) = e^{i\omega_0 t}$

$u_2(t) \equiv e^{i(-\omega_0)t}$

(hullámtanban $e^{-i\omega t}$ alakban keressük a mo.-t)

Csillapított oszc.:

$(D^2 + 2\beta D + \omega_0^2)\, u(t) = 0$

$L(i\omega) = (i\omega)^2 + 2\beta(i\omega) + \omega_0^2 \overset{!}{=} 0$

$-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2 = 0$

$\omega^2 - 2i\beta\omega - \omega_0^2 = 0$

$\omega_{1,2} = \dfrac{2i\beta \pm \sqrt{(2i\beta)^2 + 4\omega_0^2}}{2} = i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

elhcs. $\beta > \omega_0$ $\quad i\beta \pm \sqrt{-\alpha^2} = i\beta \pm i\alpha = i(\beta \pm \alpha)$

$\beta^2 - \omega_0^2 = \alpha^2$

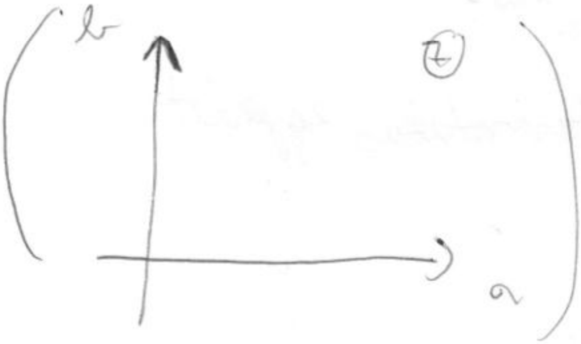
$$e^{i\omega t} = e^{ii(\beta+\alpha)t} = e^{-(\beta+\alpha)t}$$

Túlcsillapított eset

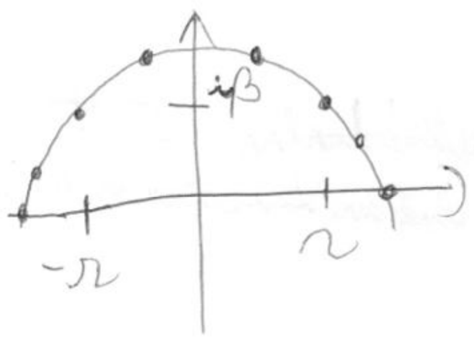
$\beta < \omega_0$

$\omega_0^2 - \beta^2 = \Omega^2$

$$\boxed{\omega_{1,2} = i\beta \pm \Omega}$$



ⓦ: komplex ω sík

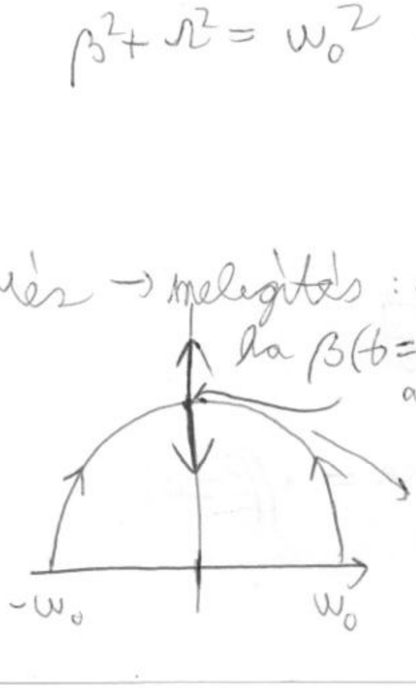


$\beta^2 + \Omega^2 = \omega_0^2$ → ez egy ω_0 sugarú kör

↓

ezen vannak rajta a megoldások

Méz → melegítés: csökken a súrl. (β)



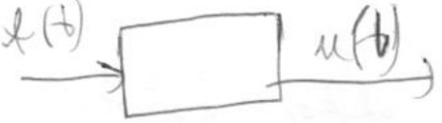
ha $\beta(t=0)=0$ és növelem a komplex síkon

hogy változik? (topológia)

amikor összeérnek a megoldások → túlcsillapított rezgés ↕ Ω komplex → $e^{i\Omega t}$ (valós)

Inhomogén d.e.

$\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = f(t)$ → a visszahatást nem vesszük figyelembe



Tfh. az egyenlet megoldása $u_J(t)$

$$L(D)\,u_J(t) = f(t)$$ (→ inhomogén : $2u_J$ nem megoldás)

~~is meg~~

áll : $u_J(t) + u_H(t)$ is megoldás

$L(D)\,u_H(t) = 0$

homogén mo.

$$L(D)\big(u_J(t) + u_H(t)\big) =$$

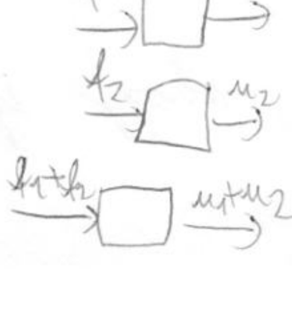
$$L(D)\,u_J(t) + 0 = f(t) + 0 = f(t)$$

⇓ ∞ mo.-a van

- a homogén ~~egy~~ bármely megoldását hozzáadva az inhomogénhez megoldást kapunk → ∞ mo.
- inhomogén ált. mo : homogén mo. + inhom. ált. mo. !!!

$$L(D)\,u_1(t) = f_1(t)$$

$$L(D)\,u_2(t) = f_2(t)$$



$$L(D)\big(u_1(t)+u_2(t)\big) = \underbrace{L(D)\,u_1(t)}_{f_1(t)} + \underbrace{L(D)\,u_2(t)}_{f_2(t)}$$

$$\Downarrow$$

- nem azt jelenti, hogy ha f_1 és f_2 mo, akkor f_1+f_2 is mo, hanem azt, hogy
· ha $L(D)(u_1+u_2)$ megoldását keresem, akkor f_1+f_2 lesz a mo.

$$f_1 \to \boxed{} \to u_1 \qquad f(t)=\sum_k \alpha_k f_k(t)$$
$$f_2 \to \boxed{} \to u_2$$
$$\boxed{} \qquad u(t)=\sum_k \alpha_k u_k(t)$$
$$\vdots$$
$$f_n \to \qquad u_n$$

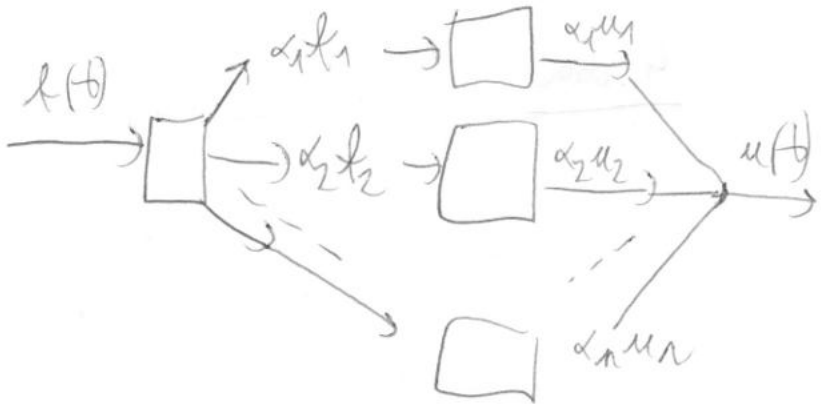
$$L(D)\Big(\sum_k \alpha_k u_k(t)\Big) = \sum_k L(D)\big(\alpha_k u_k(t)\big) =$$
$$= \sum_k \alpha_k \big(L(D)\,u_k(t)\big) = \sum_k \alpha_k f_k(t) = f(t)$$

gerjesztőfv-t egyszerű fv-ek

ha a ~~fv~~ gerjesztőfv-t egyszerű fv-ek lineárkombinációjaként állítjuk elő, akkor az egyszerű fv-ek megoldásainak lineárkombinációja lesz a megoldás

$$\Downarrow$$

= a gerjesztőfv-t kell vhogy egyszerű fv-ekre bontani



Megoldás menete:

① $f(t) = \sum_k \alpha_k \varphi_k(t)$ → felbontás egyszerű fv-ekre (bázisfv-ek)

② $\varphi_k(t) \to \boxed{} \to \xi_k(t)$ → mik a válaszok az egyszerű fv-ekre?

$L(D)\,\xi_k(t) = \varphi_k(t)$

③ $u(t) = \sum_k \alpha_k \xi_k(t)$

↓

attól függően, hogy mit választunk bázisfv-nek, 2 féle megoldás van:

↙ ↘

Green-módszer ✓ — Fourier-módszer

① könnyebb
② nehezebb
bázisfv.: Dirac-féle delta fv-ek

① nehezebb
② könnyebb
bázisfv-ek: sin, cos $(e^{i\ldots})$

4. óra

Homogén:

$u(t)$

$$L(D)\,u(t)=0$$

TFH: $u(t)=e^{i\omega t}$

$$L(D)\,u(t)=L(i\omega)\cdot u(t)=0$$

$$L(i\omega)=0$$

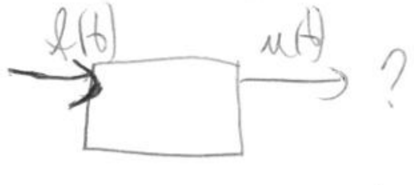
$$\downarrow$$

$$\omega_1,\omega_2,\dots\omega_n\in\mathbb{C}$$

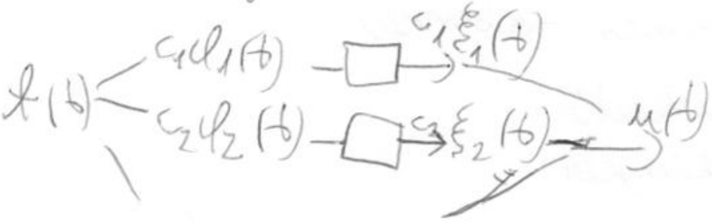
$$u(t)=\sum_k A_k\cdot e^{i\omega_k t}\quad\leftarrow \text{KF}$$

Inhomogén:

$$L(D)\,u(t)=f(t)$$



– itt nem igaz, hogy 2 megoldás összege is megoldás



– de ~~(ha)~~ 2 fv összegének megoldása a megoldások összege

$$f(t)=\sum_k c_k\varphi_k(t)$$

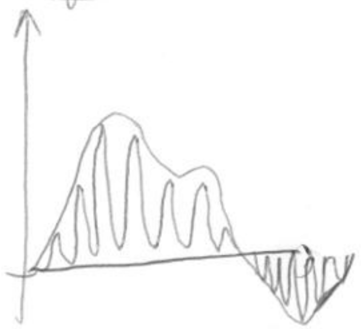
$$L(D)\,\xi_k(t)=\varphi_k(t)$$

$$u(t)=\sum c_k\,\xi_k(t)$$

~ bázisvektorokra való felbontás

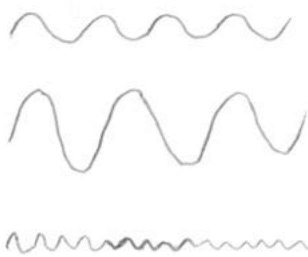
(többváltozós fv.-ek → rezgéstan)

Green



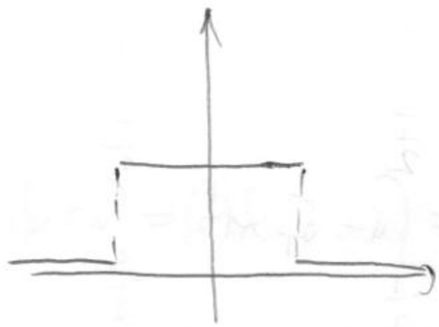
→ tűimpulzusok

Fourier:

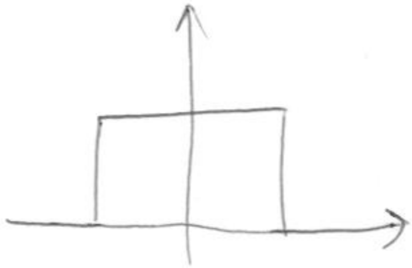


→ válasz: kényszerrezgés

Dirac-delta fv.



tranziens (átmeneti) jelenségek



$$\delta_T(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{T}{2} \\ \frac{1}{T} & \frac{T}{2} > t > -\frac{T}{2} \\ 0 & t > \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(t)\, dt = 1$$

→ efelé tartunk

↓

de valójában nem létezik

ez a határátmenet a fv.-ek körében

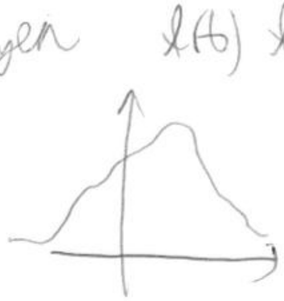
↓

a ~~...~~ fv. fogalmát általánosítjuk

(disztribúciók)

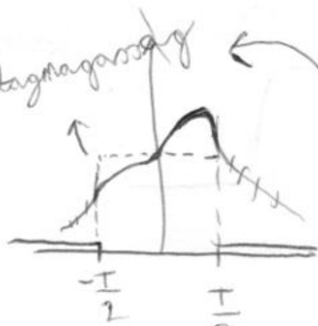
(ez nem folyt.)

Legyen $f(t)$ folytonos fv.



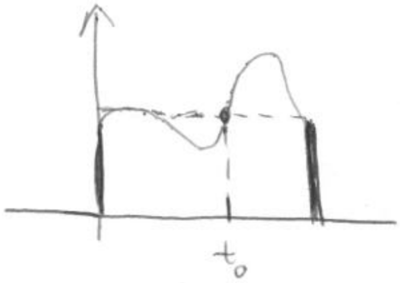
$\delta_T(t) \cdot f(t)$

átlagmagasság



$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \delta_T(t) \cdot f(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt\, \delta_T f(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt\, f(t) \frac{1}{T} =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt\, f(t) \rightarrow = \text{átlagmagasság}$$



$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt\, f(t) = f(t_0)$$

van ilyen pont → matematikai állítás!

↓

több ilyen pont esetén mindegyik tart a 0-ba

$$-\frac{T}{2} \leq t_0 \leq \frac{T}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \delta_T(t)\, f(t) = f(t_0)$$

$T \to 0$

rendőelv

$$\lim_{T \to 0}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \delta_T(t)\, f(t)\right) = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \underbrace{\left(\lim_{T\to 0} \delta_T(t)\, f(t)\right)}_{\delta(t)} =$$

$\delta(t)$ → ez a hat. érték nem ∃

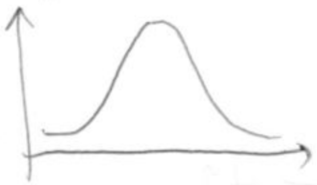
$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dt\; \delta(t)\; f(t) = f_0}$$

Dirac-féle delta (így van definiálva)

(mindig egy ∫-ban fordul elő!!)

(kapott eljárás; ⊓ → ∫ és lim vétele)

Gauss-görbe:

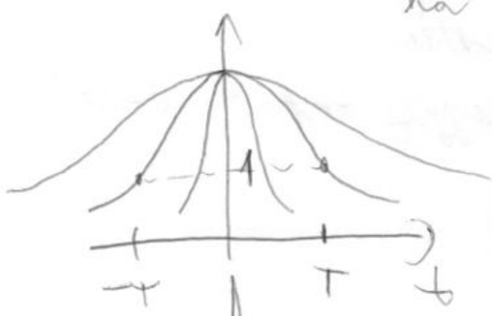


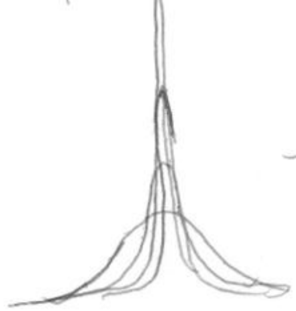
$$K(T)\, e^{-t^2/T^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

e^{-t^2/T^2}

ha $T \to 0$





→ Gauss görbékkel is lehet közelíteni a Dirac-deltát

→ sok különböző fv-el lehet közelíteni a Dirac-deltát

Miért jó ez?

Mi egy tetsz. fv.-t akarunk előállítani egyszerű fv-ekből.

→ ha a Dirac-deltát nem t, hanem $t-\tau$ pontban vesszük → τ-hoz fog tartani

+τ-ba toltuk el a fv.-t

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \delta(t-\tau)\, f(t) = f(\tau)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \delta(t-\tau)\, f(t) = f(\tau)$$

$$\sum_t \delta_{\tau t}\, f_t = f_\tau$$

$\downarrow$

Dirac-delta a Kronecker-delta folytonos kiterjesztése

(fv-ek terén hat)

ugyanaz, csak a paramétereket neveztük át

$\downarrow$

egységoperátor a fv.-ek terén $\rightarrow$ ennek a reprezentációja a Dirac-delta

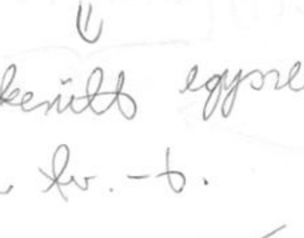
$$\delta(\tau-t) = \delta(t-\tau) \quad \text{(páros)}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, f(\tau)\, \delta(t-\tau)$$

$$f(t) = \sum_k c_k \varphi_k$$

$\Downarrow$

Sikerült egyszerű fv-ek lineárkombinációjára felbontani a fv.-t.



① $f(t) = \Sigma \ldots \delta(t-\tau)$ $G(t)$

Dirac-delta

válasz: Green-fv

$\rightarrow$ elég 1 választ tudni a $t=0$-ban lévő Dirac-deltára

$\rightarrow$ ha nem időfüggő, a többire ugyanaz lesz a válasza

autonóm rendszer : időben eltolható
(független) (áll)

ha nem autonóm → változnak a Dirac-deltákra
adott válaszok is

$$G(t-\tau)$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, f(\tau)\cdot G(t-\tau)$$ → az egyenlet lineáris, ezért az egyszerű fv-ekre adott válaszok összegéből kapjuk meg az $f(t)$-re adott választ

$$D=\frac{d}{dt}$$

$$L(D)\,u(t)=\overbrace{u(t)}$$

$$L(D)\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, f(\tau)\,G(t-\tau)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, L(D)\,\big(f(\tau)\,G(t-\tau)\big)=\int d\tau\, f(\tau)\,\underbrace{\big(L(D)\,G(t-\tau)\big)}_{\delta(t-\tau)}=f(t)$$

ez tényleg megoldás

$$L(D)\cdot G(t-\tau)=\delta(t-\tau)$$

$\cancel{L(D)\,G)}$

A Green-fv: kiszámolás harm. osc.-ra

$$L(D)\, G(t) = \delta(t)$$

$$L(D) = D^2 + 2\beta D + \omega_0^2$$

$$\left(D^2 + 2\beta D + \omega_0^2\right) G(t) = \delta(t)$$

$$\ddot{G}(t) + 2\beta \cdot \dot{G}(t) + \omega_0^2\, G(t) = \delta(t) \quad \Big/ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}$$

→ ha olyan ~~tart.~~ ~~(...)~~-on $\int$, ami a 0-t ~~tartalmazza~~ tartalmazza, akkor $\int = 1$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt\, \ddot{G}(t) + 2\beta \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt\, \dot{G}(t) + \omega_0^2 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt\, G(t) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt\, \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \delta(t) = 1$$

Newton-L.:

$$\int f'(x)\, dx = f(x) + c$$

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a)$$

korlátos fv. 

↑ ha $\varepsilon \to 0$, $\int \to 0$

$\varepsilon \to 0$

$$\dot{G}(\varepsilon) - \dot{G}(-\varepsilon) + 2\beta \underbrace{\left[G(\varepsilon) - G(-\varepsilon)\right]}_{\to 0} + \omega_0^2 \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dt\, G(t)}_{\to 0} = 1$$

folytonos fv.:

~~lim~~ bal és jobb oldali h.é. ∃ és megegyeznek

$$\dot{G}(+0) - \dot{G}(-0) = 1$$

$\dot{G}(+0)$: jobbról tartunk ide; $\dot{G}(-0)$: balról tartunk ide

→ a jobb és bal oldali h.é. nem egyezik meg

↓

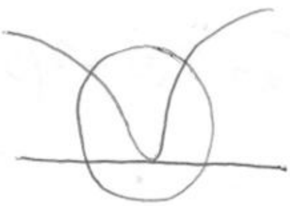
törés van benne.

→ hirtelen ~~imp.~~ erő hatására
~~Ad~~ imp. átadás

valójában nincs ilyen törés: véges kicsi idő alatt véges impulzust adunk

⇕

a Dirac-delta egy közelítés



⇓

mik az egyenlet megoldásai: $(\propto \delta)$

ahol a ~~(...)~~ Dirac-delta van, ~~itt~~ van törés,

egyébként a –||– 0 → itt a homogén megoldás érvényesül → csillapított rezgés

⇒ sok ilyen megoldás van.

↓

ez ~~a~~ 1 δ-ra adott válasz volt

$\int d\tau \to$ több rúgás is van

↓

az ezekre adott válaszok összeadódnak

(↳ linearitás miatt)

DE

ha $\tau > t$ → a jövőbeli megoldás is érződik most?

↓

ez sértené a kauzalitást

5. óra

0) Ism.:

$$f(t) \longrightarrow \boxed{L(D)} \longrightarrow u(t)$$

$$L(D)\,u(t) = f(t)$$

$$f(t) = \sum_k c_k \varphi_k(t)$$

$$\varphi_k(t) \longrightarrow \boxed{L(D)} \longrightarrow \xi_k(t)$$

$$L(D)\,\xi_k(t) = \varphi_k(t)$$

$$u(t) = \sum c_k \xi_k(t)$$

$$Lu = L\left(\sum c_k \xi_k\right) = \sum_k c_k \left(L\xi_k\right) = \sum_k c_k \varphi_k = f$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-T)\,dt = f(T)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dT\, f(T)\,\delta(t-T)$$

A kül. Dirac-deltákra adott válaszok azonosak lesznek (csak az ampl. más)

$\Downarrow$

elég 1 Dirac-deltára megnézni

$$L(D)\,G(t) = \delta(t)$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dT\, f(T)\, G(t)$$

~~f(t)~~

- törés van a fv.-ben, ha van Dirac-delta

↓

1 Dirac-delta megoldása

homogén egyenlet

↓

de ennek ∞ sok megoldása van $\leftarrow$ inhomogén egyenlet

mo = homogén + part. mo.

($\ominus$ értékekre)

~~de ha~~ fizikailag az a jó, ha $T > t$-ben nincs mo.

$\ominus$ értékekre 0 a fv. $\rightarrow$ kauzális Green fv.

$G(t-T)$

már csak integrálni kell

↑

mi a megoldás 1 Dirac-deltára

(alulcsillapított eset)

↗ már tudjuk

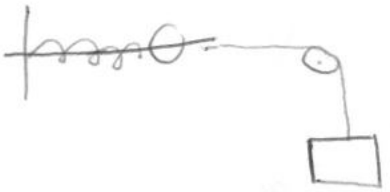
$$G(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\beta t} \cdot \dfrac{\sin \Omega t}{\Omega} & t \geq 0 \end{cases}$$

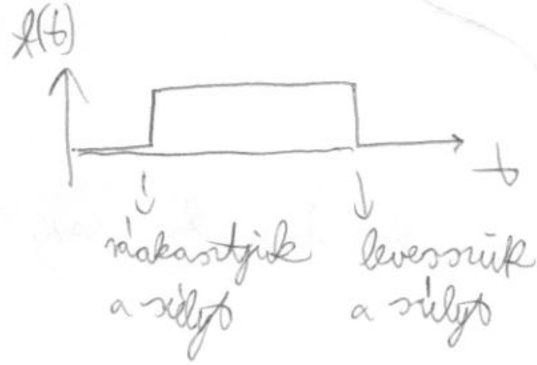
$\leftarrow$ homogén mo.

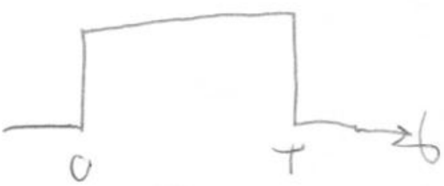
utána úgyis 0 a megoldás

$\uparrow$ $\parallel$

$$\int_{-\infty}^{t} G$$







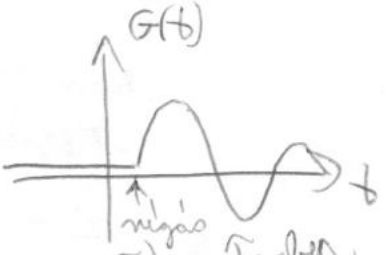
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & 0<t<T \\ 0 & t>T \end{cases}$$

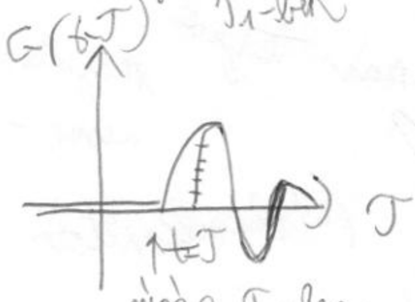
$$G(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ e^{-\beta t}\,\dfrac{\sin \Omega t}{\Omega} & t>0 \end{cases}$$

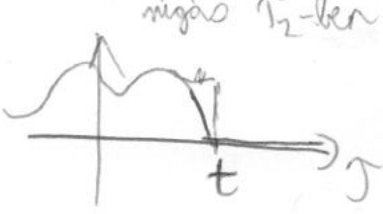
$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, f(\tau)\, G(t-\tau)$$

$\downarrow$

ha kapcsos → több intervallumra osztjuk az $\int$-t és diszkutáljuk







$\Downarrow$

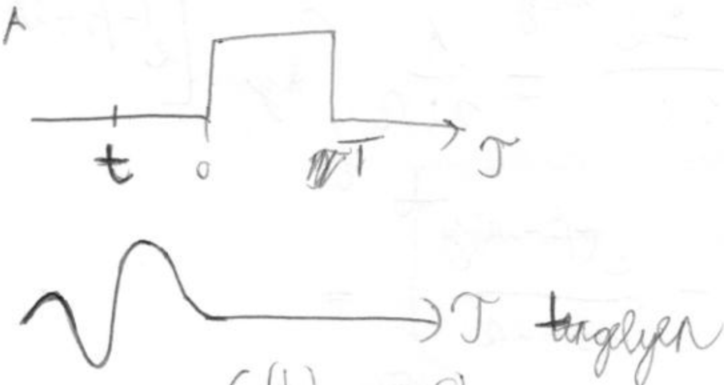
A) $t<0$

B) $0<t<T$

C) $t>T$

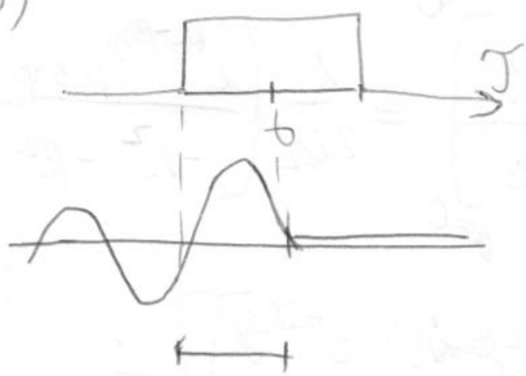
$$\beta^2+\Omega^2=\omega_0^2$$

A



$G(t)_{\tau} = 0$

B)



$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \; f(\tau) \; G(t-\tau) = \int_{0}^{t} d\tau \; \underbrace{f(\tau)}_{1} \; G(t-\tau) = \int_{\tau=0}^{t} d\tau \; G(t-\tau) =$$

Változócsere: $t-\tau = y$

$(t-y = \tau)$

$dy = -d\tau$

Határok:

$\tau = 0 \to y = t$

$\tau = t \to y = 0$

$$= \int_{y=t}^{0} (-) dy \cdot G(y) = \int_{0}^{t} dy \; G(y) = \int_{y=0}^{t} e^{-\beta y} \frac{\sin \Omega y}{y} \, dy$$

↓

Trükk: sint-t exponenciálissal fejezzük ki!!

$$= \frac{1}{\Omega}\int_{y=0}^{t} dy\, e^{-\beta y}\,\frac{e^{i\Omega y}-e^{-i\Omega y}}{2i} = \frac{1}{2i\Omega}\int_0^t dy\,\left[e^{(-\beta+i\Omega)y}-e^{(-\beta-i\Omega)y}\right] =$$

$$= \frac{1}{2i\Omega}\left[\frac{e^{(-\beta+i\Omega)y}}{-\beta+i\Omega}-\frac{e^{(-\beta-i\Omega)y}}{-\beta-i\Omega}\right]_{y=0}^{t} =$$

(mn: $\int e^{cy}dy = \frac{e^{cy}}{c}$

$$= \frac{1}{2i\Omega}\left(\frac{e^{(-\beta+i\Omega)y}}{i\Omega-\beta}+\frac{e^{(-\beta-i\Omega)y}}{i\Omega+\beta}\right]_{y=0}^{t} = \frac{1}{2i\Omega}\left(\frac{e^{(i\Omega-\beta)y}\cdot(i\Omega+\beta)+e^{(-\beta-i\Omega)y}\cdot(i\Omega-\beta)}{-\Omega^2-\beta^2}\right)_0^t =$$

$$= \frac{1}{2i\Omega}\left[\frac{e^{-\beta y}\left[(\beta+i\Omega)\;e^{i\Omega y}+(-\beta+i\Omega)\;e^{-i\Omega y}\right]}{-\Omega^2-\beta^2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2i\Omega}\cdot\underbrace{\frac{1}{\beta^2+\Omega^2}}_{w_0^2}\left[e^{-\beta y}\,\beta\underbrace{\left(e^{i\Omega y}-e^{-i\Omega y}\right)}_{2i\sin(\Omega y)}+i\Omega\underbrace{\left(e^{i\Omega y}+e^{-i\Omega y}\right)}_{2\cos(\Omega y)}\right]_0^t =$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2i}\Omega}\cdot\frac{1}{w_0^2}\left[e^{-\beta y}\left(\beta\cdot\cancel{2}\cancel{i}\sin(\Omega y)+\cancel{i}\Omega\cancel{2}\cos(\Omega y)\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{\Omega}\,\frac{1}{w_0^2}\left[e^{-\beta y}\left(\beta\sin(\Omega y)+\Omega\cos(\Omega y)\right)\right]_0^t =$$

határokat

$$= \frac{1}{\Omega w_0^2}\left[\Omega - e^{-\beta t}\left(\beta\sin(\Omega t)+\Omega\cos(\Omega t)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\omega_0^2}\left[1 - e^{-\beta t}\left(\cos\Omega t + \frac{\beta}{\Omega}\sin\Omega t\right)\right]$$

Golyó kitérése "csengetés" körben

c)

$G(t-\tau)$

→ a határok változnak

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, f(\tau)\, G(t-\tau) = \int^{T} d\tau\, f(\tau)\, G(t-\tau) =$$

$$= \int_{\tau=0}^{T} d\tau\, G(t-\tau) = \int_{y=t-T}^{y=t} (-dy)\, G(y) = \int_{y=t}^{t-T} dy\, G(y) \ldots$$

$$\ldots = -\frac{1}{\Omega}\frac{1}{\omega_0^2}\left(e^{-\beta y}\left(\beta\sin\Omega y + \Omega\cos\Omega y\right)\right]_{y=t}^{y=t-T} =$$

$$= -\frac{1}{\Omega\omega_0^2}\left(e^{-\beta t}(\beta\sin\Omega t + \Omega\cos\Omega t) - \underbrace{e^{-\beta(t-T)}}_{e^{-\beta t}e^{\beta T}}\left(\beta\sin(\Omega(t-T)) + \Omega\cos(\Omega(t-T))\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{\Omega}\frac{1}{\omega_0}\cdot e^{-\beta t}\left[\beta\sin\Omega t + \Omega\cos\Omega t - e^{\beta T}\left(\beta(\sin(\Omega t)\cos\Omega T - \cos(\Omega t)\sin(\Omega T)\right)\right] +$$

$$+\Omega\left(\cos(\Omega t)\cos(\Omega T)+\sin(\Omega t)\sin(\Omega T)\right)\Big]=$$

$$=-\frac{e^{-\beta t}}{\Omega\omega_0^2}\Big(\cos(\Omega t)\left(\Omega+e^{\beta T}\sin(\Omega T)-e^{\beta T}\Omega\cos(\Omega T)\right)+\sin(\Omega t)\cdot$$

$$\cdot\left(\beta-\beta e^{\beta T}\cos(\Omega T)-\Omega e^{\beta T}\sin(\Omega T)\right)\Big]=$$

$$=e^{-\beta t}\Big[\cos\Omega t\underbrace{\left(\frac{\Omega+e^{\beta T}\beta\sin\Omega T-e^{\beta T}\Omega\cos\Omega T}{-\Omega\omega_0^2}\right)}_{A}+\sin\Omega t\cdot$$

$$\cdot\underbrace{\left(\frac{\beta-\beta e^{\beta T}\cos\Omega T-\Omega e^{\beta T}\sin\Omega T}{-\Omega\omega_0^2}\right)}_{B}\Big]=$$

$$=e^{-\beta t}\left(A\cos\Omega t+B\sin\Omega t\right)$$

$\downarrow$

csillapított rezgés

((már nem bántják a rendszert)

$\downarrow$

csak A és B más, mert a múltban ~~sokat~~ máshogy piszkálták

$\Downarrow$

ilyen esetben (csillapítás rezg.) A, B konstans, de

A, B együttható tartalmazza a múltat

Ha a gerjesztést nem hagyják abba:

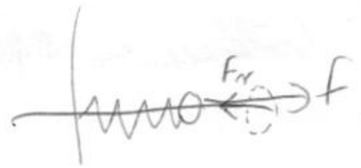
$T \to \infty$

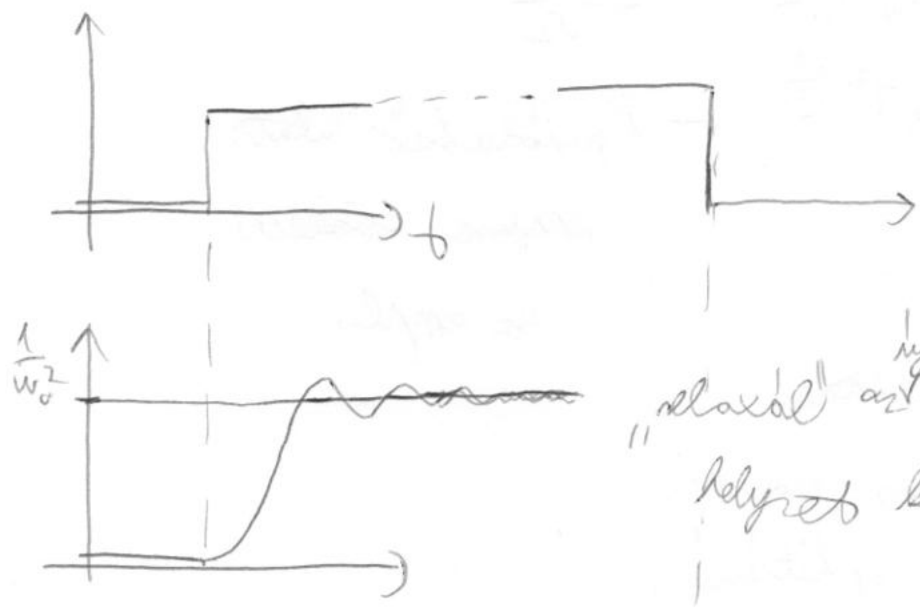
de $u_{(B)} = \frac{1}{\omega_0^2}\left[1 - e^{-\beta t}\left(\cos\Omega t + \frac{\beta}{\Omega}\sin\Omega t\right)\right]$, ahol $e^{-\beta t} \to 0$

$$u_{(B)} = \frac{1}{\omega_0^2}$$

↓

eltolódott az egyensúlyi helyzet (u=0-ban volt)

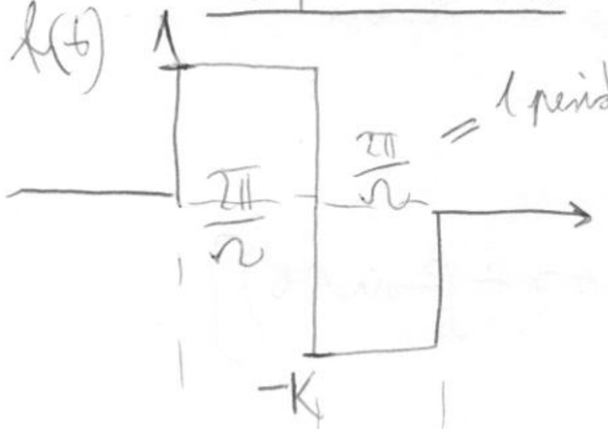




„relaxál" az új egyensúlyi helyzet körül"

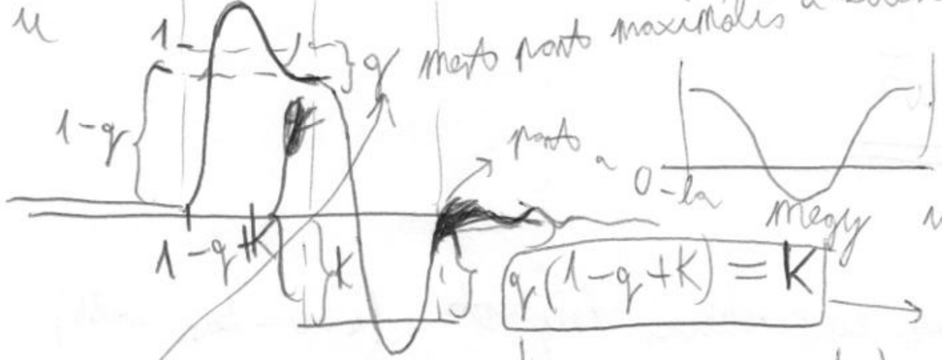
ha abbamarad, megint
→ visszaáll az eredeti egy.
helyzethez

ZH példa volt:



$\frac{2\pi}{\Omega}$ = 1 periódusidő!!

→ K = ?, hogy pont a 0-ba menjen vissza



q mert pont maximális a kitérés

pont a 0-ba megy vissza

$\boxed{q(1-q+K) = K}$ → K = ...

↓ megint q-ad részére csökken az ampl.

pont 1 periódust rezeg

$e^{-\beta t}\cdot\cos\Omega t \qquad t = \frac{2\pi}{\Omega}$

$q = e^{-\beta\cdot\frac{2\pi}{\Omega}}$ ← 1 periódusidő alatt ennyire csökken az ampl.

↓

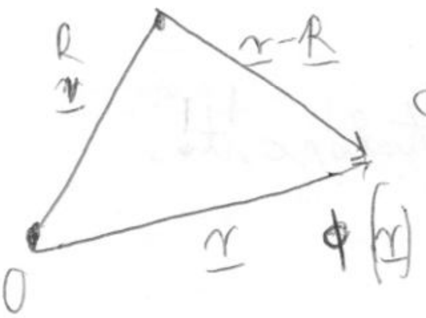
az első jel után pont megint maximális az aplitúdó, csak azóta $\frac{1}{q}$-ad részére csökken

Felhasználás → 3D-s általánosítás

1) elektromosság

$$\Delta\phi = \rho(\underline{r})\,\Delta V$$

$$r = |\underline{r}|$$



$$\phi = \sum_R \frac{k\,Q(\underline{R})}{|(\underline{r}-\underline{R})|} = \sum_R \frac{k\,\rho(\underline{R})\,\Delta V}{|\underline{r}-\underline{R}|} =$$

$$= \int dV \frac{k\,\rho(\underline{R})}{|\underline{r}-\underline{R}|} =$$

$$\phi = \int dV\, \rho(\underline{R}) \underbrace{\left(\frac{k}{|\underline{r}-\underline{R}|}\right)}_{G(\underline{r}-\underline{R})}$$

DE ennek nem kell kauzálisnak lennie ←

$$\approx u(t) = \int dT\, f(T)\, G(t-T)$$

$\underline{r}$-ben érdekel az összes $\underline{R}$-beli ponttöltésből származó potenciál

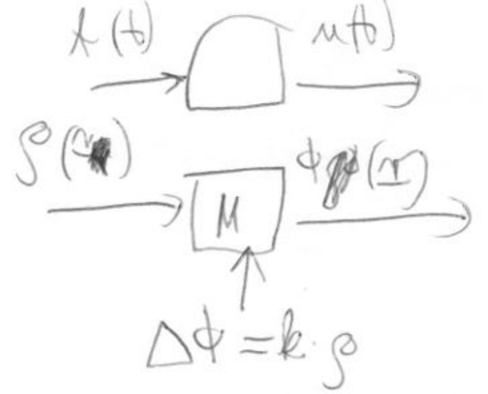
↓

t-ben érdekel az összes (eltelt) T időbeli impulzus hatása

ponttöltés = Dirac-delta → ilyen a töltéssűrűsége

az erre fellépő!! hatás a potenciál

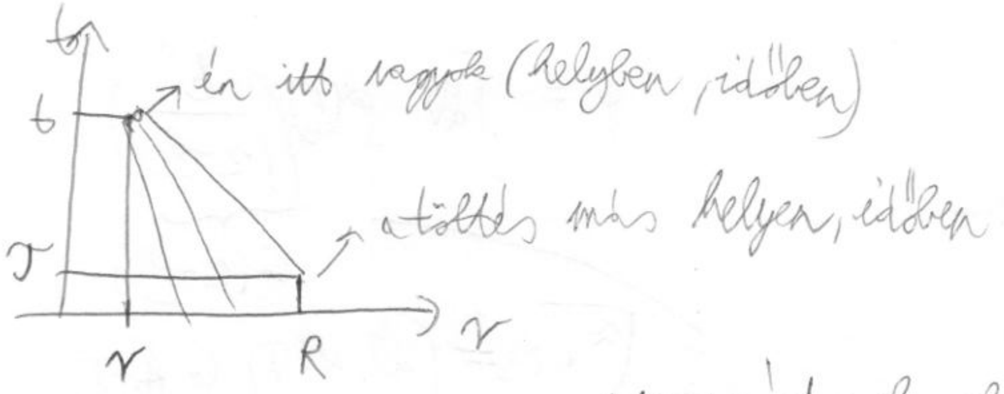
$\rightarrow \quad L(D)\, u(t) = f(t)$



2) <u>Időfüggő eset:</u> → 4D-s általánosítás

$$\phi(\underline{r}, t) = \phi(x, y, z, t)$$

$$\Box \phi = \rho$$



„propagátor fv-ek"

$$\phi(\underline{r}, t) = \int d\tau \int d^3\underline{R}\; \rho(\underline{R}, \tau)\, G(\underline{r}, \underline{R}, t, \tau)$$

a különböző térből és időből jövő hatásokat kell a mostani pontban összegezni

↓

- kauzalitás most is kell

+ fénysebességnél gyorsabban nem haladhat a hatás (= lineáris egyenleteknél ez működik)

6. óra

$L(D)u(t) = f(t)$ inhomogén

$f(t) \longrightarrow \boxed{L(D)} \xrightarrow{u(t)}$

1) $f(t) = \sum_k c_k \varphi_k(t)$

2) $\xrightarrow{\varphi_k(t)} \boxed{\quad\quad} \xrightarrow{\xi_k(t)}$

3) $u(t) = \sum_k c_k \xi_k(t)$

(Fourier)

$f(t) = \int d\tau \; f(t) \; \underline{\underline{\delta(t-\tau)}}$

$\delta(t-\tau) \longrightarrow \boxed{\quad\quad} \longrightarrow G(t-\tau)$ ← homogén mo.

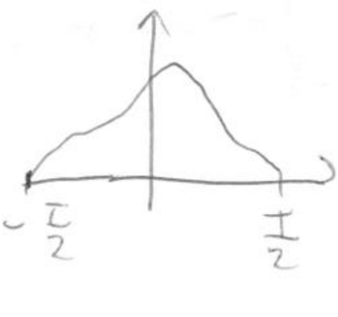
$u(t) = \int d\tau \; f(\tau) \; G(t-\tau)$

(Green)

Fourier-módszer

1) Periodikus fv-ek:

$\exists T \; \forall t \quad f(t+T) = f(t)$



$\sin \omega_1 t$

$$\sin \omega_1 (t+T) = \sin (\omega_1 t + \underbrace{\omega_1 T}_{2\pi}) = \sin(\omega_1 t + 2\pi) = \sin \omega_1 t$$

$\sin 2\omega_1 (t+T)$

$\sin (n\omega_1 t)$ $\quad n \in \mathbb{Z}$ $\quad$ is periodikus

$\cos (n\omega_1 t)$

$\downarrow$

ezek lineárkombinációjaként írjuk fel a fv-t ~ bázisvektorokra bontás

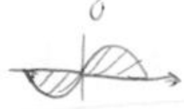
$$\boxed{f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos (k\omega_1 t) + b_k \sin (k\omega_1 t) \right]}$$

(fv-ek is lineáris teret alkotnak)

$\downarrow$

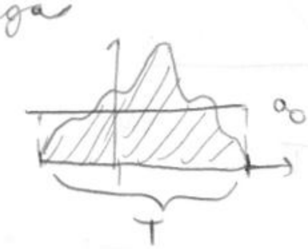
függvénysor (trigonometrikus sor)

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} dt\, f(t) = a_0 \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} dt}_{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} dt \cos(k\omega_1 t)}_{0} + b_k \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \sin (k\omega_1 t)}_{0} \right]$$



$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\, dt}$$

$\rightarrow$ ez a fv. átlaga



$$a_0 T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, dt$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} dt\, f(t) \cos (n\omega_1 t) = a_0 \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos (n\omega_1 t)\, dt}_{0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} dt \cos(k\omega_1 t) \cos(n\omega_1 t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-T/2}^{T/2} dt \sin (k\omega_1 t) \cos (n\omega_1 t)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt\,\cos(k\omega_1 t)\cos(n\omega_1 t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt\,\frac{1}{2}\left[\cos(k+n)\omega_1 t + \cos(k-n)\omega_1 t\right] = \frac{T}{2}\delta_{kn}$$

$$\int dt\,\sin(k\omega_1 t)\cos(n\omega_1 t) = \int dt\,\frac{1}{2}\left[\sin(k+n)\omega_1 t + \sin(k-n)\omega_1 t\right] = 0$$

$$\downarrow$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} dt\,f(t)\cos(n\omega_1 t) = a_0\cdot 0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{T}{2}\delta_{kn} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\cdot 0 = \frac{T}{2}\sum_k a_k\delta_{kn} = \frac{T}{2}\cdot a_n$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} dt\,f(t)\cdot\cos(n\omega_1 t)}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt\, f(t)\sin(n\omega_1 t) = a_0 \cdot \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt\, f(t)\sin(n\omega_1 t)}_{0} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[a_k \underbrace{\int dt \cos(k\omega_1 t)\sin(n\omega_1 t)}_{0} +$$

$$+ b_k \cdot \int dt \sin(k\omega_1 t)\sin(n\omega_1 t)\Big]$$

$$\int dt \sin(k\omega_1 t)\cdot\sin(n\omega_1 t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2}\Big[\cos(k-n)\,\omega_1 t - \cos(k+n)\,\omega_1 t\Big] = \frac{T}{2}\delta_{kn}$$

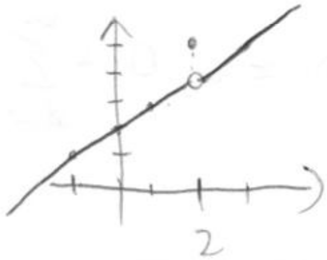
$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt\, f(t)\sin(n\omega_1 t) = 0 + 0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{T}{2}\delta_{kn} b_k = \frac{T}{2} b_n$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt\, f(t)\sin(\omega_1 t n)}$$

$\downarrow$

Előállítja-e ez a sor az eredeti fv.-t minden tartományon?

pl. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} = x+2 & x \neq 2 \\ 5 & x = 2 \end{cases}$



$x+2$

$f(x)$ és $x+2$ majdnem mindenhol egyenlőek ~~(majdnem mindenhol)~~.

Ha megszámlálhatóan véges sok helyen van szakadás, akkor a 2 fv. integrálja megegyezik.

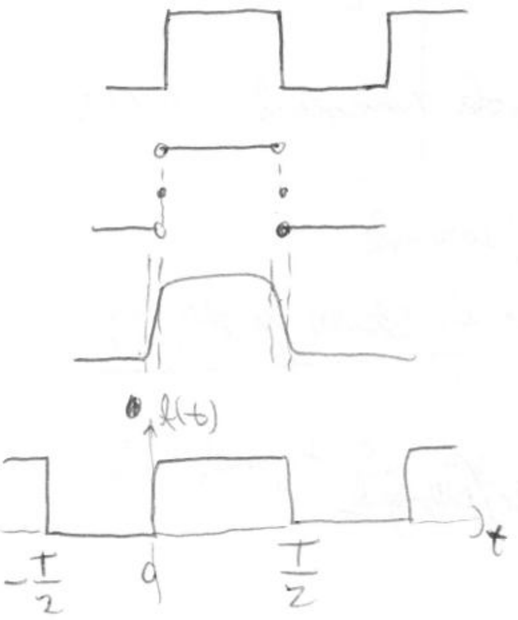
A Fourier-sorról:

ha a fv-nek periodikus intervallumon véges sok szakadás van,

~~ha akkor~~ és

a kiterjesztés a 2 szakadási pont átlagánál van (felezőpont), akkor a Fourier-sor előállítja.

példa: négyszögimpulzus



$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} dt\, f(t) = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} dt \cdot 1 = \frac{1}{T}\cdot\frac{T}{2} = \frac{1}{2}$$

$-\frac{T}{2} \to 0$-ig 0

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} dt\, f(t)\cos(n\omega_1 t) = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} dt\, f(t)\cos(n\omega_1 t) = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} dt\, \cos(n\omega_1 t)$$

helyettesítés:

$y = n\omega_1 t$ $\qquad t=0 \to y=0$

$\frac{dy}{dt} = n\omega_1$ $\qquad t=\frac{T}{2} \to y = n\omega_1 \frac{T}{2} = n \frac{2\pi}{\cancel{T}} \cdot \frac{\cancel{T}}{\cancel{2}} = n\pi$ $\qquad \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

$dy = n\omega_1 dt$

$dt = \frac{1}{n\omega_1} dy$

$$= \frac{2}{T} \int_{y=0}^{n\pi} dy \, \frac{1}{n\omega_1} \cos y = \frac{2}{n\omega_1 T} \int_0^{n\pi} dy \cos y = \frac{1}{n\pi} \int_0^{n\pi} dy \cos y = 0$$

$a_n = 0 \to$ páratlan fv., ezért párosok nincsenek benne

(páros fv.-ben csak cos-ok (párosak) vannak
ha se nem páros, se nem páratlan $\to$ sin és cos vegyesen)

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \, f(t) \sin \omega_1 t = \frac{2}{T} \int_{t=0}^{T/2} dt \, 1 \sin(n\omega_1 t) =$$

$y = n\omega_1 t$

$dt = \frac{1}{n\omega_1} dy$

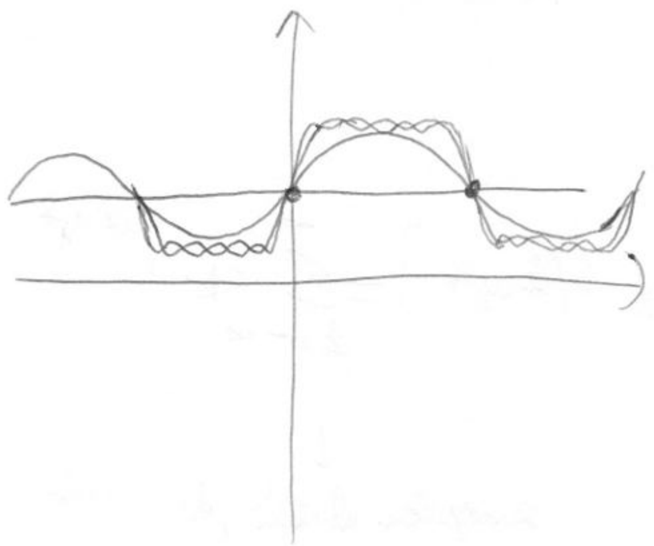
$t=0 \to y=0$

$t=\frac{T}{2} \to y = n\pi$

$$= \frac{2}{T} \int_{y=0}^{n\pi} dy \cdot \frac{1}{n\omega_1} \cdot \sin y = \frac{\cancel{2}}{n \frac{2\pi}{\cancel{T}} \cancel{T}} \int_{y=0}^{n\pi} dy \sin y = \frac{1}{n\pi} \left[-\cos y \right]_0^{n\pi} =$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left(\overset{1}{\cos 0} - \cos n\pi \right) = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\omega_1 t + \frac{2}{3\pi}\sin(3\omega_1 t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5\omega_1 t) + \frac{2}{7\pi}\sin(7\omega_1 t) + \dots$$



Komplex alak:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \underbrace{\frac{e^{ik\omega_1 t} + e^{-ik\omega_1 t}}{2}}_{\cos\varphi} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \underbrace{\frac{e^{ik\omega_1 t} - e^{-ik\omega_1 t}}{2i}}_{\sin\varphi} =$$

$$= \underbrace{a_0}_{1 = e^{i0\omega_1 t}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega_1 t} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega_1 t}}_{\sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} e^{+ik\omega_1 t}}$$

↓

ez ugyanaz (ha $k = -5 \rightarrow -k = 5$!)

- $c_0 = a_0$
- ha $k > 0$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$$

- ha $k < 0$

$$c_k = \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2}$$

$$= c_0 \cdot e^{i 0 \omega_1 t} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{ik\omega_1 t} + \sum_{-\infty}^{-1} c_k \cdot e^{ik\omega_1 t} =$$

$$= \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ik\omega_1 t}}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ik\omega_1 t}$$

↓

komplex alakú, de valós

mert → értékű fv.

c_{-k} és c_{+k}

komplex konjugáltak

Hogyan adjuk meg c_k-kat? ← a_k, b_k képletek

$k > 0$

$$c_k = \frac{a_k - i b_k}{2} = \frac{1}{T} \int dt\, f(t) \cos(k\omega_1 t) - \frac{i}{T} \int dt\, f(t) \sin k\omega_1 t =$$

$$= \frac{1}{T} \int dt\, f(t) \left[\cos(k\omega_1 t) - i \sin(k\omega_1 t) \right] = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt\, f(t) \cdot e^{-ik\omega_1 t}$$

$k < 0$

$$c_k = \frac{a_{-k} + i b_{-k}}{2} = \frac{1}{T} \int dt\, f(t) \cdot \underbrace{\cos(-k\omega_1 t)}_{\cos(k\omega_1 t)} + \frac{i}{T} \int dt\, f(t) \underbrace{\sin(-k\omega_1 t)}_{-\sin(k\omega_1 t)}$$

$k = 0$ $$c_k = c_0 = a_0 = \frac{1}{T} \int dt\, f(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt\, f(t)\, e^{-i \overset{k}{0} \omega_1 t}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{ik\omega_1 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt\, f(t)\, e^{-ik\omega_1 t}$$

} ugyanaz, más jelölésben

↓

látszik az oda-vissza kapcsolat: az együtthatókat a fv.-ből állítjuk elő → reprezentáció → szoros összefüggés

7. óra

jan. 4 : csoportelmélet ZH de. 10^{00}

jan. 5 : rezgések ZH

$$L(D)\, u(t) = f(t)$$

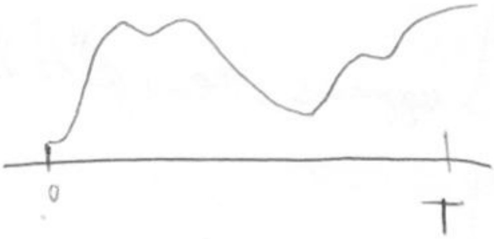
$$f(t) \longrightarrow \boxed{L} \longrightarrow u(t)$$

$$f(t) = \sum_k c_k \varphi_k(t)$$

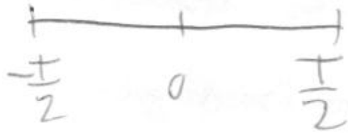
$$\varphi_k(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow \xi_k(t)$$

$$u(t) = \sum_k c_k \xi_k(t)$$

Fourier-módszer:



$$f(t+T) = f(t)$$



$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin(n\omega_1 t)\\ \cos(n\omega_1 t)\end{array}\right. \quad n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)\right]$$

~ vektorok

$$\vec{v} = \sum_k c_k \vec{e}^{(k)}$$

$$c_k = (\vec{e}^{(k)} \vec{v})$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\,dt \\ a_k &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\cos(k\omega_1 t)\,dt \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} f(t)\sin(k\omega_1 t)\,dt \end{aligned}}$$

Komplex alak:

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_1 t} \\ c_k &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\cdot e^{-ik\omega_1 t} \end{aligned}}$$

$c_0 = a_0$

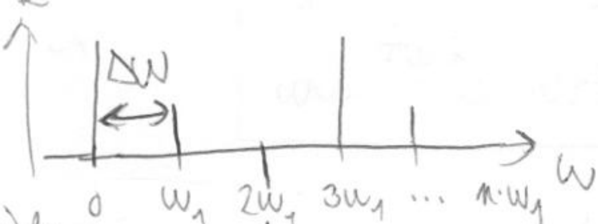
$k > 0$

$$c_k = \frac{a_k - i b_k}{2}$$

$k < 0$

$$c_k = \frac{a_k + i b_k}{2}$$

(periodikus fv-re)



ábrázolás ω térben!

~~(folytonos fv-ekre)~~

másik ábrázolás

véges frekvenciaértékek jelennek meg

<u>Kiterjesztés folyt. fv-ekre</u>

$$\Delta\omega = \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

ha $T \to \infty$ $\quad \Delta\omega \to 0$

$$f(t) = \sum_k \frac{c_k}{\Delta\omega} e^{ik\omega_1 t}\Delta\omega$$

→ k-nak már nincs értelme, mert nem tudom, hanyadik (folytonos sok van)

$$\frac{c_k}{\Delta\omega} = \frac{1}{\underbrace{T\Delta\omega}_{2\pi}}\int_{-T/2}^{T/2} dt\, f(t)\, e^{-ik\omega_1 t}$$

⇓

$k\omega_1 = \omega$ lesz

$\frac{c_k}{\Delta\omega} \to F(\omega)$

$k\omega_1 \to \omega$

$$\boxed{F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, e^{-i\omega t}} \sim F_\omega = \sum_t \mathcal{E}_{\omega t} f_t$$

$\Delta\omega \to 0$

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega} \sim \underbrace{f_t = \sum_\omega \mathcal{E}^*_{t\omega} F_\omega}$$

→ ez olyan mint egy mátrix és egy vektor szorzata

integráltranszformáció

~~$F(\omega) = \sum_t$~~

2 változós mátrix

~ 2 -||- fv $e^{i\omega t}$ vagy $e^{-i\omega t}$

$f(t) \to t$ fv-e

a fenti trafó átírni

($F(\omega) \to \omega$ fv-e) egy másik változó fv-ébe

Jel: → átszámítjuk frekvenciatartományba időtartományból

↳ az érdekel minket, hogy adott frekvenciával mit csinál az eszköz

Minden frekvencia előfordul most!

Fodor György: Laplace transzformáció alkalmazásai lineáris rendszerek analízisére

$$v_k' = \sum_l U_{kl} v_l$$

$$v_k = \sum_l V_{kl} v_l'$$

Ezek egymás inverzei. Biz.:

$$v_l' = \sum_m U_{lm} v_m$$

$$v_k = \sum_l V_{kl} \sum_m U_{lm} v_m = \sum_l \sum_m V_{kl} U_{lm} v_m =$$

$$= \sum_m \underbrace{\left(\sum_l V_{kl} U_{lm}\right)}_{(\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{U}})_{km}} v_m = \sum_m (VU)_{km} v_m = v_k$$

$$(VU)_{km} = \delta_{km} \qquad \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{I}} \qquad \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{U}}^{-1}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, e^{-i\omega t} = \frac{1}{2\pi} \int d\tau\, f(\tau)\, e^{-i\omega\tau}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int d\omega \left(\frac{1}{2\pi} \int d\tau\, f(\tau)\, e^{-i\omega\tau} \right) e^{i\omega t} =$$

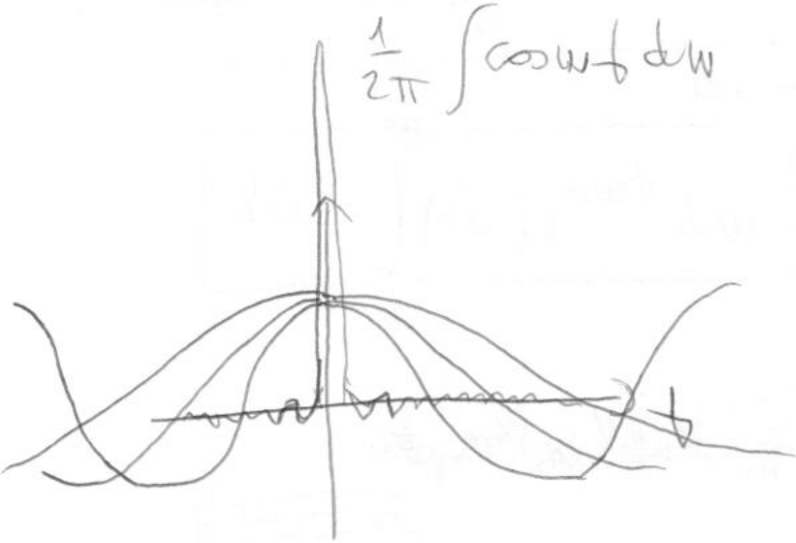
$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, f(\tau) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\omega(t-\tau)} \cdot \frac{1}{2\pi}}_{\delta(t-\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, f(\tau)\, \delta(t-\tau) = f(t)$$

$$f(t)=\int d\tau\, f(\tau)\,\delta(t-\tau) \sim f_t=\sum_\tau \delta_{t\tau} f_\tau$$

A Dirac-delta, a Kronecker-delta általánosítása

$$\boxed{\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int e^{i\omega t}\,d\omega}$$

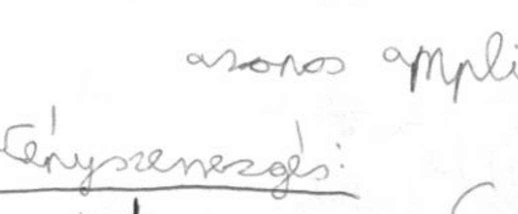
$$\frac{1}{2\pi}\int \cos\omega t\, d\omega$$



$\delta(t)$ Fourier transzformáltja konstans (1)

$\tilde{\delta}(\omega)=\mathcal{F}(\delta(t))=1$ → minden frekvenciájú rezgést azonos amplitudóval adunk össze!

Kényszerrezgés:



$C\cdot e^{i\omega t}$ → kap egy komplex amplitúdót

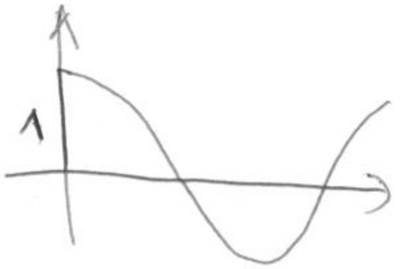
↓ a kimenő jel is ω frekvenciájú lesz,

tranziensek → lecsengő rezgések

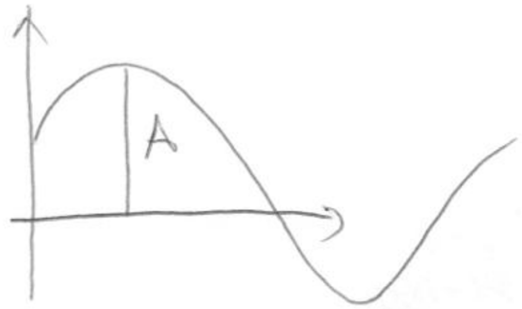
mert „ésszerű kutya rángat” → átveszi a frekv.-ját a tranziensek lecsengése után

$C\cdot e^{i\omega t}=Ae^{-i\varphi}\cdot e^{i\omega t}=Ae^{i(\omega t-\varphi)}$

$C=A\cdot e^{-i\varphi}$ $\quad A\cdot\cos(\omega t-\varphi)$ → kap egy fáziskésést is



← ~~kimenő~~



$$\underbrace{L(D)(Ce^{i\omega t})}_{\text{kimenő jel}} = e^{i\omega t}$$ ← bejövő jel

inhomogén → inhomogén egyenletr. ~~akkor sajátérték probléma~~

det $\neq 0$ → van inverz

$$C\cdot L(D)\, e^{i\omega t} = e^{i\omega t}$$

$$C\cdot L(i\omega) = 1$$

$$C(\omega) = C = \frac{1}{L(i\omega)}$$ → az a jó ha $L(i\omega)\neq 0$

átviteli fv. $(C(\omega))$

homogén eset:

$$L(D)\,u(t) = 0$$

~ homogén egyenletrendszer akkor van nem triv megoldás, ha det $= 0$

tfh. $u(t) = e^{i\omega t}$

$$L(D)e^{i\omega t} \overset{!}{=} 0$$

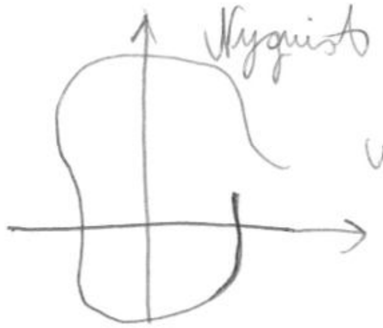
$$L(i\omega)e^{i\omega t} \overset{!}{=} 0$$

$$L(i\omega) = 0$$

$$C(\omega) = A(\omega) \cdot e^{-i\varphi(\omega)}$$

$\downarrow$

$\left.\begin{matrix} A(\omega) \\ \varphi(\omega) \end{matrix}\right\}$ ábrázolása



Nyquist-diagram

ω valós param. fv-ében

$C(\omega)$ leírása

Spec. eset

$$\ddot{u} + 2\beta\dot{u} + \omega_0^2 u = f(t)$$

$$L(D) = D^2 + 2\beta D + \omega_0^2$$

$$L(i\omega) = (i\omega)^2 + 2\beta(i\omega) + \omega_0^2 = -\omega^2 + \omega_0^2 + i2\beta\omega = a + ib$$

$$C(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\beta\omega} = Ae^{-i\varphi} \qquad a = \omega_0^2 - \omega^2$$

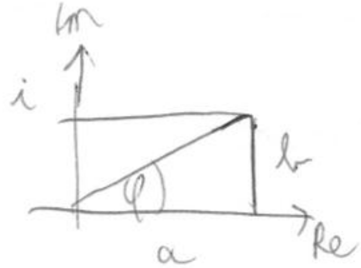
$$b = 2\beta\omega$$

$$\frac{1}{a+ib}$$

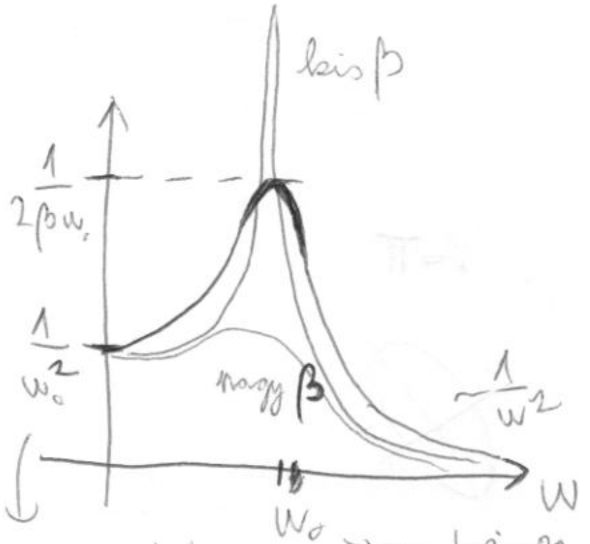
$$z = a + ib$$

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \qquad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

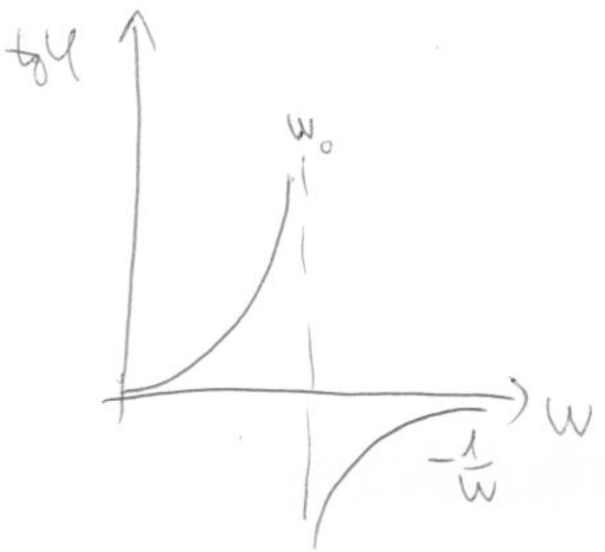


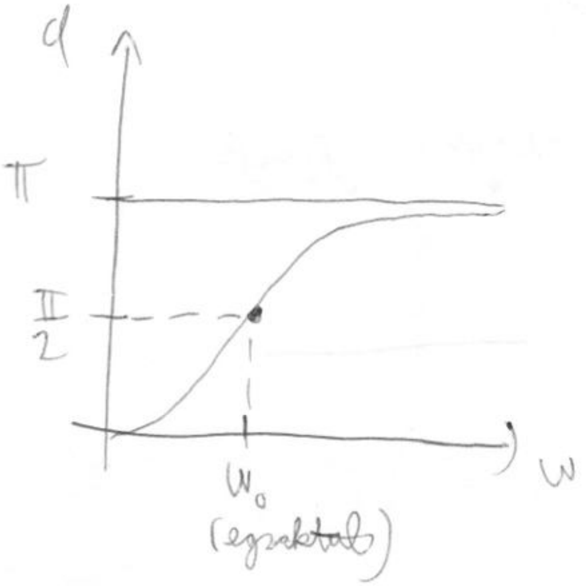
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a} = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

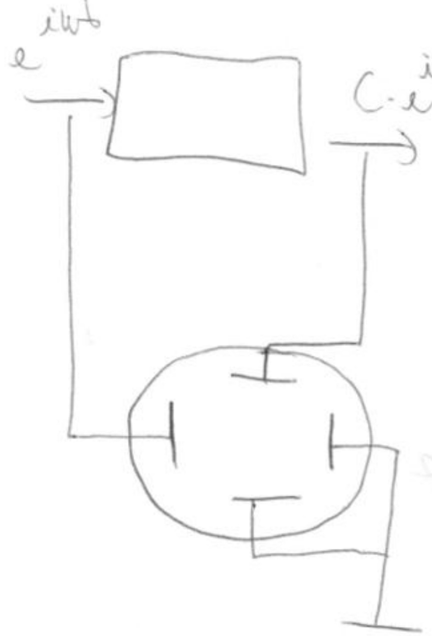


ω_0 → nem teljesen itt van a maximum

0 frekvenciájú jelet kapcsolunk rá → konstans jel
~~[illegible]~~ ↓
eltolódik az egyensúlyi helyzet



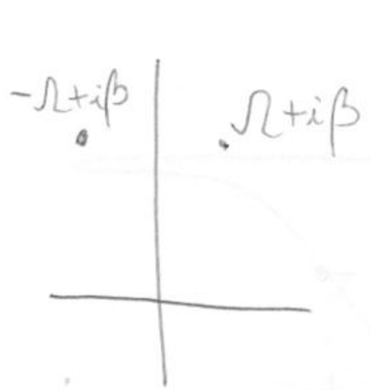


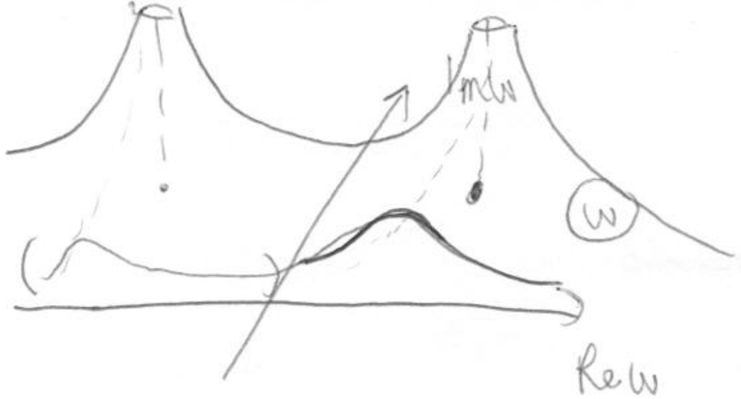


Miért ilyen a rezonanciagörbe?

$$C(\omega)=\frac{1}{\omega_0^2+\omega+i2\beta\omega} \to \frac{1}{\text{polinom}} \to \text{pólusai vannak}$$

$$= \frac{1}{L(i\omega)}$$

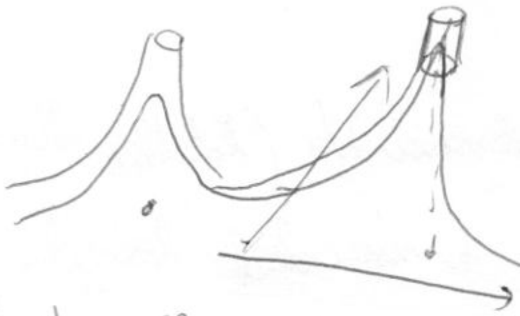




a valós w tengely mentén megyünk végig (~~...~~)

β-t változtatjuk
↓
a krátert tologatjuk ↙↗ irányban

(a szingularitás hat. meg (kráter) a valós tengelyen való haladást)

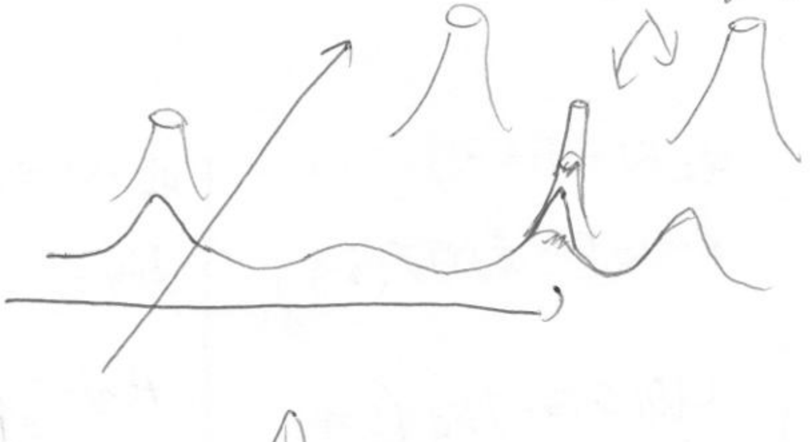


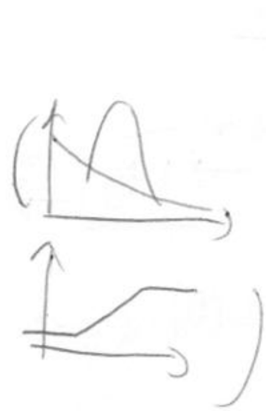
<u>általánosabb eset:</u>

parc. tört. bontás

$$\frac{1}{L(w)} = \frac{1}{w^4 + \dots} = \frac{1}{(w-w_1)(w-w_2)\dots(\;)} \stackrel{\downarrow}{=} \frac{k_1}{w-w_1} + \frac{k_2}{w-w_2} + \dots$$

∞ magasak





→ minden kráternél van egy π-s ugrás

$E \sim \hbar\omega$ (~~...~~)

Schrödinger-egyenlet: lineáris

itt az energia a komplex változó!

↓

itt is vannak vulkánok

vulkán ~ homogén egyenlet megoldása

↓

részecskéknél a szabadrezgések frekvenciáit (kötetlen állapot) lehet kimérni → megvizsgálhatjuk a részecskék belsejében lévő dolgokat

8. óra

Ism.

$f(t) \to \boxed{L(D)} \to u(t)$

$L(D)\,u(t) = f(t)$

$f(t) = \sum_k c_k \varphi_k(t)$

$\varphi_k(t) \to \boxed{L} \to \xi_k(t)$

$L(D)\,\xi_k(t) = \varphi_k(t)$

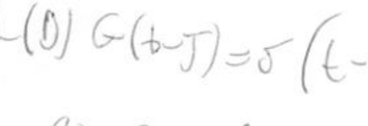
$u(t) = \sum_k c_k \xi_k(t)$

$\varphi_k(t) \to \delta(t-\tau)$

$f(t) = \int d\tau\, f(\tau)\,\delta(t-\tau)$

$L(D)\,G(t-\tau) = \delta(t-\tau)$

$u(t) = \int d\tau\, f(\tau)\, G(t-\tau)$



$\varphi_k(t) \to e^{i\omega t}$

$f(t) = \int d\omega\, F(\omega)\, e^{i\omega t}$

$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int dt\, f(t)\, e^{-i\omega t}$

$L(D)\left(C(\omega)e^{i\omega t}\right) = e^{i\omega t}$

$C(\omega) = \frac{1}{L(i\omega)}$

$u(t) = \int d\omega\, F(\omega)\, C(\omega)\, e^{i\omega t}$

$L(D)\,u(t) = f(t)$

$f(t) = \int d\omega\, F(\omega) e^{i\omega t}$

$u(t) = \int d\omega\, U(\omega) e^{i\omega t}$ → a kitérést is felbonthatjuk

$\downarrow$ Fourier komp.-ekre

$U(\omega)$-t keresem!

$$L(D)\,u(t) = L(D) \int d\omega\, U(\omega)\, e^{i\omega t} =$$
$$= \int d\omega\, U(\omega)\left(L(D) e^{i\omega t}\right) = \int d\omega \cdot U(\omega)\, L(i\omega) e^{i\omega t} = f(t) =$$
$$= \int d\omega\, F(\omega)\, e^{i\omega t}$$

$$\boxed{U(\omega)\, L(i\omega) = F(\omega)}$$

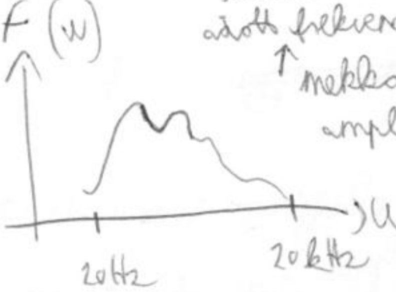
Fourier-térben oldjuk meg a problémát !!

$L(D)\,u(t) = f(t)$

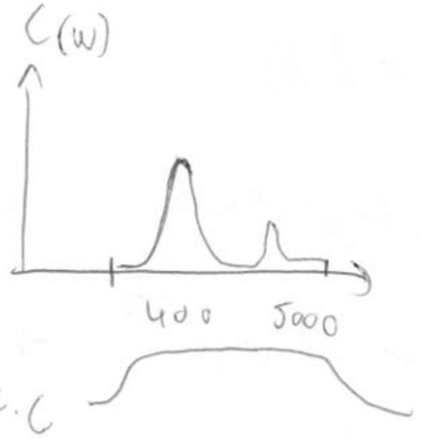
$L(i\omega)\, U(\omega) = F(\omega)$

$$U(\omega) = \frac{F(\omega)}{L(i\omega)} = F(\omega)\, G(\omega)$$

$$u(t) = \int d\omega\, \frac{F(\omega)}{L(i\omega)}\, e^{i\omega t}$$



Fourier-tér: adott frekvenciák ↑ mekkora amplitúdóval szerepelnek



$U = F \cdot C$

Fourier-analízis: megnézzük, hogy a rendszer az egyes frekv.-ra hogyan válaszol

↓

ezek összege lesz a mo.

a Fourier-spektrum érdekes, mert az erősítés a frekvenciától függ

↓

a villanymérnököknek a Fourier-kép fontosabb

fül

csiga

→ a szőrszálak különböző frekvencián rezegnek

↓

lényegében ez is egy Fourier-analizátor

$$u(t)=\int d\omega\, f(\omega)\, C(\omega)e^{i\omega t}=\int d\omega\left(\frac{1}{2\pi}\int d\tau\, f(\tau)e^{-i\omega\tau}\right)C(\omega)e^{i\omega t}$$

$$=\int d\tau\, f(\tau)\Bigg(\underbrace{\int d\omega\,\frac{1}{2\pi}C(\omega)\,e^{i\omega(t-\tau)}}_{G(t-\tau)}\Bigg)$$

$\Downarrow$

$$\boxed{G(t)=\frac{1}{2\pi}\int d\omega\, C(\omega)e^{i\omega t}}$$

$\downarrow$

a Green-fv. (~~az átviteli fv. Fou~~ Fourier-~~transzformáltja~~ az átviteli fv.

$$G(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ e^{-\beta t}\cdot\dfrac{\sin\Omega t}{\Omega} & t>0\end{cases}$$

~~homogén~~ szabad rezgések → homogén eset

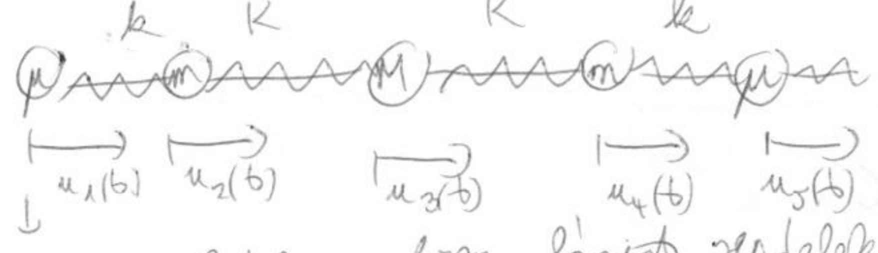
~~...~~ gerjesztett rezgések → inhom. eset

DE ~~az~~ a tisztán inhomogén megoldások lecsengenek → tranziensek

↳ maradnak a sajátfrekvenciák (szabad rezgés frekvenciái)

Több testes rezgő rendszerek

1)



minden golyóhoz külön bázist rendelek!

1D -ben

ha $u_2 > u_1$ → jobbra húz → ⊕ erő

$$\mu \ddot{u}_1(t) = k\left(u_2(t) - u_1(t)\right)$$

Ellenerő

$$m \cdot \ddot{u}_2(t) = k\left(u_1(t) - u_2(t)\right) + K\left(u_3(t) - u_2(t)\right)$$

ökölszabály → ami deriválva van, az mindig ⊖ előjelű, mert vissza akarják nyomni az egyensúlyi helyzetébe

$$M \cdot \ddot{u}_3(t) = K\left(u_2(t) - u_3(t)\right) + K\left(u_4(t) - u_3(t)\right)$$

$$m \ddot{u}_4(t) = K\left(u_3(t) - u_4(t)\right) + k\left(u_5(t) - u_4(t)\right)$$

$$\mu \ddot{u}_5(t) = k\left(u_4(t) - u_5(t)\right)$$

↳ diff. egy. rendszer:

lineáris, áll. együtthatós, homogén

↓

nincs külső gerjesztés

nincs „súrlódás" → azért, mert ez a modell a molekulákat szemlélteti

$$\underline{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \\ u_5(t) \end{pmatrix}$$

↓

~~sz~~ nem „nyilas", geom. vektor,

hanem egy „számötös"

itt a dimenziók száma a „szabadsági fokok" száma

a koordináták írása tetszőleges → nincs kitüntetett sorrend, tetszőleges betehetem egy vektorba

$$\ddot{\underline{u}} = \begin{pmatrix} \ddot u_1 \\ \ddot u_2 \\ \ddot u_3 \\ \ddot u_4 \\ \ddot u_5 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} M & & & & \\ & m & & & \\ & & M & & \\ & & & m & \\ & & & & \mu \end{pmatrix}}_{\text{tömegeket egy diagonális mátrixként is felfoghatom}} \begin{pmatrix} \ddot u_1 \\ \ddot u_2 \\ \ddot u_3 \\ \ddot u_4 \\ \ddot u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & k & 0 & 0 & 0 \\ k & -(k+K) & K & 0 & 0 \\ 0 & K & -2K & K & 0 \\ 0 & 0 & K & -(K+k) & k \\ 0 & 0 & 0 & k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{u}} = \underbrace{\underline{\underline{Q}}}_{-\underline{\underline{K}}}\,\underline{u} \quad \longleftrightarrow \quad \overset{1\text{ golyó}}{m\ddot u = -ku}$$

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{u}} = -\underline{\underline{K}}\,\underline{u}$$

$$\boxed{\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{u}}(t) = -\underline{\underline{K}}\,\underline{u}(t)}$$

ahol

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \mu & & & & \\ & m & & & \\ & & M & & \\ & & & m & \\ & & & & \mu \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 & 0 & 0 \\ -k & k+K & -K & 0 & 0 \\ 0 & -K & 2K & -K & 0 \\ 0 & 0 & -K & K+k & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & k \end{pmatrix}$$

Megj.: a főátlóban csak (+) mennyiségek vannak

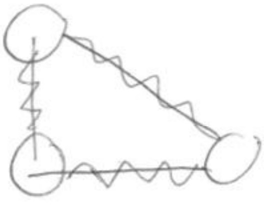
$$\underline{\ddot{u}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{u} = -\frac{k}{m}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{u}$$

- írjuk be ilyen alakba, DE a dimenziós mennyiségeket emeljük ki a mátrixból (~~hogy a mátrix ne legyen~~

$$\boxed{\underline{\ddot{u}} = -\omega_0^2\,\underline{\underline{B}}\,\underline{u}}$$

(az alapállapotnak van szimmetriája (tükr.)
↳ csoportelméleti leírás
de a mozgás közben elveszíti a szimm.-t)

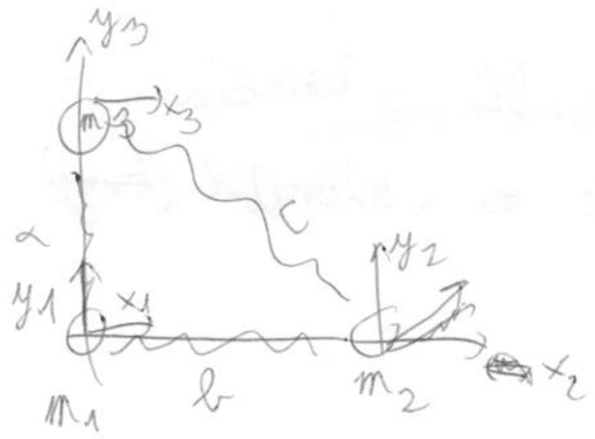
2) Sibbeli probléma:

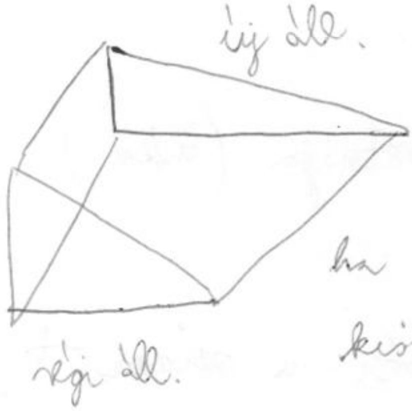


Az előző példában nem használtuk ki a nyugalmi hosszakat, mert feltételeztük, hogy az elmozdulás nem nyomja 0 hosszúra a rugókat.

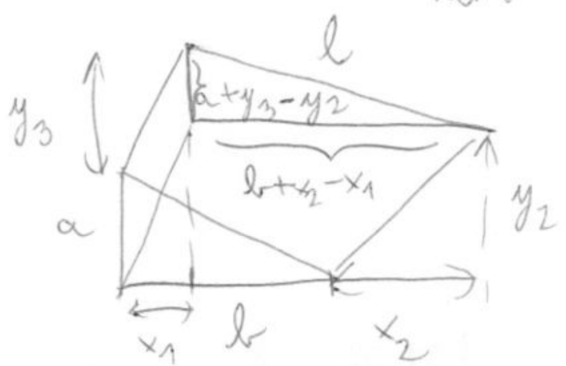
De most fontos a nyugalmi hossz!, mert ezzel tudjuk pontosan megadni a kezdeti állapotot

$c^2 = a^2 + b^2$





ha az elmozdulásokat kiszámoljuk $x_1, x_2, \dots$ -tal, nem lesz lineáris a probléma



$$\ell = \sqrt{(a+y_3-y_2)^2+(b+x_2-x_1)^2}$$

$\Delta \ell = \ell - c$ → c a nyugalmi hossz

$F = k_1 \Delta \ell$

$F_x = \dfrac{b+x_2-x_1}{\ell} \cdot F$ → összesen 3 golyóra ×2 ilyen egyenlet

↓

-ból 6 egyenlet → DE nem lineáris

LINEARIZÁLUNK

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots$$

↓

sorfejtés 1 tagig

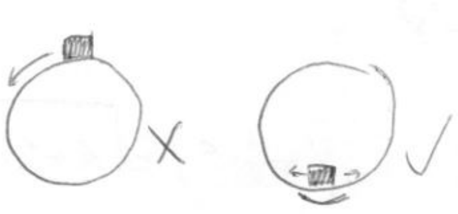
a linearizálás akkor jó, ha kicsik a kitérések

↳ stabilitásvizsgálat → ~~...~~ stabil fix pont körül kicsik a kitérések

↓

↓

ezt mindig fizikailag meg kell vizsgálni, hogy jó-e (és jó marad-e) a közelítés



Most:

- x, y-ok kicsik az eredeti méretekhez (a, b, c) képest → molekulák esetén ez jó közelítés

$$\Delta l = \sqrt{(a+y_3-y_2)^2+(b+x_2-x_3)^2} - c = \sqrt{a^2+2a(y_3-y_2)+(y_3-y_2)^2+}$$

$$\overline{+b^2+2b(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2} - c = \sqrt{c^2+2a(y_3-y_2)+2b(x_2-x_3)+}$$

$$\overline{+(y_3-y_2)^2+(x_2-x_3)^2} - c = c\left[\sqrt{1+2\frac{a}{c}\frac{y_3-y_2}{c}+2\frac{b}{c}\frac{x_2-x_3}{c}+\cancel{\left(\frac{y_3-y_2}{c}\right)^2}+}\right.$$

$$\left.\overline{+\cancel{\left(\frac{x_2-x_3}{c}\right)^2}} - 1\right]$$

elhanyagolás

elhanyagolás: a négyzetes tag elhanyagolható a sima kicsihez képest

$(1+\varepsilon)^n = 1+n\varepsilon \rightarrow$ tetsz. n-re igaz

$\frac{1}{1+\varepsilon} = (1+\varepsilon)^{-1} \sim 1-\varepsilon$

$\hookrightarrow$ell.: $(1+\varepsilon)(1-\varepsilon) = 1-\cancel{\varepsilon^2}$

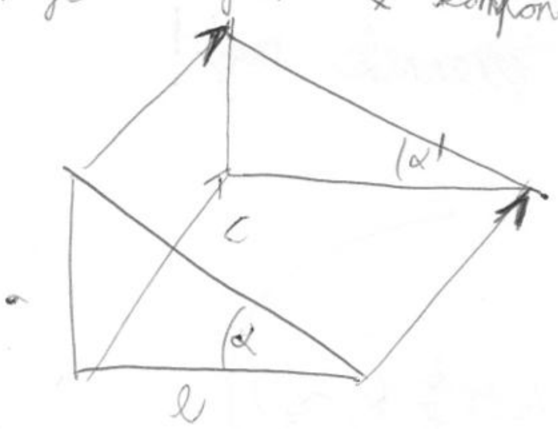
$\sqrt{1+\varepsilon} = (1+\varepsilon)^{1/2} \sim 1+\frac{1}{2}\varepsilon \quad \rightarrow \left(1+\frac{1}{2}\varepsilon\right) = \sqrt{1+2\cdot\frac{1}{2}\varepsilon+\cancel{\frac{\varepsilon^2}{4}}} \approx \sqrt{1+\varepsilon}$

$$\approx c\left[\left(\cancel{1}+\frac{a}{c}\frac{y_3-y_2}{c}+\frac{b}{c}\frac{x_2-x_3}{c}\right)\cancel{-1}\right] = \Delta l$$

a konstansok mindig kiesnek! ilyen egy. helyzet körüli sorfejtésnél, mert ha nincs kitérés ($x, y = 0$), akkor nem nyúlik meg a rugó ($\Delta l = 0$)

$$\Delta l = \frac{a}{c}(y_3 - y_2) + \frac{b}{c}(x_2 - x_3) \to \text{lineáris}$$

Mennyi a rugóerő x komponense?

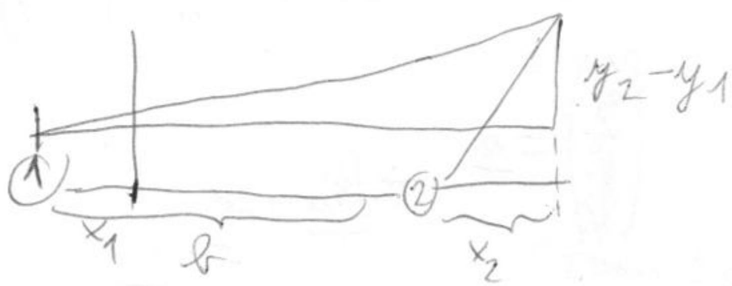


$\alpha' \sim \alpha +$

$$\cos\alpha' = \cos(\alpha + \delta) = \cos\alpha \underbrace{\cos\delta}_{\approx 1} - \sin\alpha \cdot \underbrace{\sin\delta}_{\approx\delta} \approx \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \delta$$

$$F_x = \cos\alpha' \cdot F = \cos\alpha' \cdot k_1 \Delta l$$

$$F_x \approx F \cdot \cos\alpha = \frac{b}{c} k_1 \Delta l$$

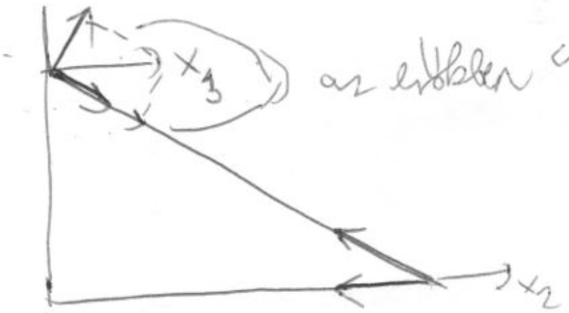


$(b + x_2 - x_1)$

$$l = \sqrt{(b + x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{b^2 + 2b(x_2 - x_1) + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\Delta l = l - b = b\left[\sqrt{1 + 2\frac{x_2 - x_1}{b} + \cancel{\left(\frac{x_2 - x_1}{b}\right)^2} + \cancel{\left(\frac{y_2 - y_1}{b}\right)^2}} - 1\right] \approx$$

$$\approx b\left[\cancel{1} + \frac{x_2 - x_1}{b} - \cancel{1}\right] = x_2 - x_1$$



az előbben csak ezek a vetületek jelennek meg!

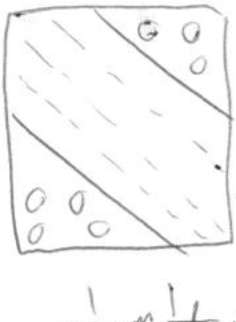
$$\Delta l = \sin\alpha\,(y_3 - y_2) + (x_2 - x_3)\cos\alpha = \frac{a}{c}(y_3 - y_2) + \frac{b}{c}(x_2 - x_3)$$

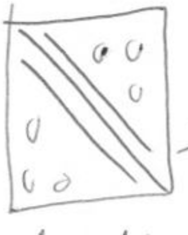
$$\cancel{\left(\frac{a}{c}(y_3 - y_2) + \frac{b}{c}(x_2 - x_3)\cos\alpha\right)}$$

ha máshogy vesszük fel a koordinátarendszert, a rendszer szimm.-nak megfelelően, itt is az alábbi alakú lesz az egyenlet:

$$m_2 \ddot{x}_1 = (\quad)x_1 + (\quad)x_2 + (\quad)x_3 + (\quad)y_1 + (\quad)y_2 + (\quad)y_3$$

↓ a probl. ezáltal is visszavezethető mátrixos alakra





→ 3 sávos sávmátrix

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underline{u} \qquad + \underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{u}} = -\underline{\underline{K}} \cdot \underline{u}$$

sávmátrix → kontinuás mátrix, ennek saját elmélete van

↓

!! ha csak a szomszédokkal hatnak kölcsön az elemek, a Newton egyenletek kontinuás mátrixokra vezetnek.

9. óra

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{pmatrix} = \underline{u}(t)$$ → kis kitérések az egyensúlyi helyzet körül → a rendszer paramétereihez képest kicsi

$$\ddot{\underline{u}} = A\underline{u}$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$\boxed{\ddot{\underline{u}} = -\omega_0^2 \underline{\underline{B}}\,\underline{u}}$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{u}(t=0) &= \underline{u}_0 \\ \dot{\underline{u}}(t=0) &= \underline{v}_0 \end{aligned}\right\}$$ kezdeti feltételek is kellenek

$$\ddot{u} = -\omega_0^2 u \sim \ddot{\underline{u}} = -\omega_0^2 \underline{\underline{B}}\,\underline{u}$$

↓ $e^{\lambda t}$ alakban keressük a mo.-t ∼ ↓ $\underline{u} = \underline{a} \cdot e^{\lambda t} = \underline{a}\, e^{i\omega t}$ alakban keressük a megoldást

(valójában $\mathrm{Re}(\underline{a}\, e^{i\omega t})$)

$\underline{u}$ → ezek lineárkombinációja lesz a megoldás

↳ ezt már tudom KF-hez illeszteni

$$u(t) = \underline{a}\, e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\underline{u}}(t) = \underline{a}(-\omega^2) e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 \underline{a}\, \cancel{e^{i\omega t}} = -\omega_0^2 \underline{\underline{B}}\,\underline{a}\, \cancel{e^{i\omega t}} \neq 0$$

↓ algebrai egyenlet~~et~~ rendszert kapunk

$\underline{\underline{B}}\,\underline{a} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\underline{a}$ $\rightarrow$ $\omega_0 = \frac{k}{m} \neq \omega$ $\rightarrow$ a sajátértékek által meghat. sajátfrekvenciák (ha $\forall k$ egyenlő, akkor $\omega_0 = \omega$) egyébként nem)

áll $\underline{\underline{B}}$ sose csúnya

ω lehet$_{\text{Re}}$ komplex is,
↳ ha van súrlódás → az is lehet

áll: λ valós → szimm. mátrix esetén biztos
↓
ügyes trükkel szimm.-á lehet alakítani

pl.

$m\ddot{u}_1 = k(u_2 - u_1)$

$M\ddot{u}_2 = k(u_1 - u_2) + k(u_3 - u_2)$

$m\ddot{u}_3 = k(u_2 - u_3)$

$\ddot{u}_1 = -\frac{k}{m}u_1 + \frac{k}{m}u_2 + 0 \cdot u_3$

$\ddot{u}_2 = \frac{k}{M}u_1 - \frac{2k}{m}u_2 + \frac{k}{M}u_3$

$\ddot{u}_3 = 0\, m_1 + \frac{k}{m}u_2 - \frac{k}{m}u_3$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & 0 \\ \frac{k}{M} & -\frac{2k}{M} & \frac{k}{m} \\ 0 & \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \neq \tilde{A}$$

↓
nem szimm

Osszuk le $\sqrt{m}$-el m helyett !!

$$\sqrt{m}\,\ddot{u}_1 = -\frac{k}{\sqrt{m}} u_1 + \frac{k}{\sqrt{m}} u_2$$

$$\sqrt{M}\,\ddot{u}_2 = \frac{k}{\sqrt{M}} u_1 - \frac{2k}{\sqrt{M}} u_2 + \frac{k}{\sqrt{M}} u_3$$

$$\sqrt{m}\,\ddot{u}_3 = 0 u_1 + \frac{k}{\sqrt{m}} u_2 - \frac{k}{\sqrt{m}} u_3$$

$z_1 = \sqrt{m}\, u_1$

$z_2 = \sqrt{M}\, u_2$

$z_3 = \sqrt{m}\, u_3$

$$\ddot{z}_1 = -\frac{k}{\sqrt{m}} \frac{z_1}{\sqrt{m}} + \frac{k}{\sqrt{m}} \frac{z_2}{\sqrt{M}} + 0 \cdot z_3$$

$$\ddot{z}_2 = \frac{k}{\sqrt{M}} \cdot \frac{z_1}{\sqrt{m}} - \frac{2k}{\sqrt{M}} \cdot \frac{z_2}{\sqrt{M}} + \frac{k}{\sqrt{M}} \cdot \frac{z_3}{\sqrt{m}}$$

$\cancel{z_3}$

$$\ddot{z}_3 = 0 \cdot z_1 + \frac{k}{\sqrt{m}} \frac{z_2}{\sqrt{M}} - \frac{k}{\sqrt{m}} \frac{z_3}{\sqrt{m}}$$

$$\ddot{z}_1 = -\frac{k}{m} z_1 + \frac{k}{\sqrt{mM}} z_2 + 0 \cdot z_3$$

$$\ddot{z}_2 = \frac{k}{\sqrt{mM}} z_1 - \frac{2k}{M} z_2 + \frac{k}{\sqrt{mM}} z_3$$

$$\ddot{z}_3 = 0 \cdot z_1 + \frac{k}{\sqrt{mM}} z_2 - \frac{k}{m} z_3$$

$$\rightarrow \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & \frac{k}{\sqrt{mM}} & 0 \\ \frac{k}{\sqrt{mM}} & -\frac{2k}{M} & \frac{k}{\sqrt{mM}} \\ 0 & \frac{k}{\sqrt{mM}} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} = \underline{\underline{C}}$$

$$\underline{\ddot{z}} = \underline{\underline{C}}\, \underline{z}$$

$\underline{\underline{C}}$ sajátértékei megegyeznek $\underline{\underline{B}}$ s.é.-ivel.

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{m} & & \\ & \sqrt{M} & \\ & & \sqrt{m} \end{pmatrix}}^{\underline{\underline{F}}^{-1}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{F}}^{-1}$$

$\Downarrow$

λ-k valósak (de nem igaz, hogy mindig $\oplus$-ak)

$\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_N \in \mathbb{R}$

$\underline{a}^{(1)}\ \underline{a}^{(2)} \ldots \underline{a}^{(N)}$ $\rightarrow$ ha mind különbözőek, bázist alkotnak

- ha van elfajulás $\leftarrow$ szimmetriák vannak $\rightarrow$ csoportelm.
  $\leftarrow$ véletlen $\rightarrow$ perturbáció feloldja a degenerációt $\rightarrow$ kis légy

$$\underline{u}^{(1)}(t) = \underline{a}^{(1)} e^{i\omega_1 t} \qquad \leftarrow \text{legyen } \omega_k = \omega_0 \sqrt{\lambda_k}$$

$$\cancel{(\omega_k = \omega_0 \sqrt{\lambda_k})}$$

$\vdots$

$$\underline{u}^{(N)} t = \underline{a}^{(N)} e^{i\omega_N t}$$

de mivel $-\omega$ és ω is megjelenik, keressük így a lineárkombinációt, hogy

$$\boxed{\underline{u}(t)=\sum_{k=1}^{N}\underline{a}^{(k)}\left(A_k\cos(\omega_k t)+B_k\sin(\omega_k t)\right)}\quad A_k, B_k\in\mathbb{R}$$

általános mo.

$$\underline{\dot{u}}(t)=\sum_{k=1}^{N}\underline{a}^{k}\left(-A_k\omega_k\sin(\omega_k t)+B_k\omega_k\cos(\omega_k t)\right)$$

Kf-ek: $\underline{u}(0)=\sum_k \underline{a}^k A_k \overset{!}{=} \underline{u}_0$ → így adjuk meg a Kf-t

$$\sum_k a^{(k)}_l A_k=(u_0)_l$$

inhomogén lineáris egy. rendszer

$\underline{\dot{u}}(0)=\sum_k \underline{a}^{(k)} B_k\omega_k \overset{!}{=} \underline{v}_0$ → Kf

→ ezt így hosszú megoldani

$B\underline{a}=\lambda\underline{a}$

$\underline{b}B=\lambda\underline{b}$

$\tilde{B}\underline{b}=\lambda\underline{b}$

$b^{(k)}\underline{a}^{(l)}=\delta_{kl}$ → a $\overset{\text{kül. indexű}}{\text{bal}}$ és jobb oldali s.v.-ok $\perp$-ek

$$\underline{u}(0)=\sum_k \underline{a}^{(k)} A_k=\underline{u}_0 \quad / \cdot \underline{b}^{(l)} \rightarrow$$

$$\sum_k (\underline{b}^{(l)} \underline{a}^{(k)}) A_k = \underline{b}^{(l)} \underline{u}_0$$

$$\sum_k \delta_{kl} A_k = \boxed{A_l = \underline{b}^{(l)} \cdot \underline{u}_0}$$

$$\dot{\underline{u}}(0)=\sum_k \underline{a}^{(k)} B_k w_k = \underline{v}_0 \quad / \cdot \underline{b}^{(l)}$$

$$\sum_k \underbrace{\underline{b}^{(l)} \underline{a}^{(k)}}_{\delta_{kl}} \cdot B_k w_k = \underline{b}^{(l)} \underline{v}_0 \quad l. \text{ baloldali sajátvektor}$$

$$B_l w_l = \underline{b}^{(l)} \underline{v}_0$$

$$\boxed{B_l = \frac{\underline{b}^{(l)} \underline{v}_0}{w_l}}$$

$\downarrow$

paraméterek egyenlete ~~[...]~~ adott KF-ek mellett, ~~[...]~~ ahol $\underline{b}^{(l)}$-ek a baloldali s.v.-ok.

$\downarrow$

~ sima csillapítatlan oszcillátor

$$u(t) = u_0 \cdot \cos w_0 t + \frac{v_0}{w_0} \sin w_0 t$$

eredmény:

a bal és jobboldali s.v.-okkal és a vektor formában megadott KF-ekkel így kifejezhetem a megoldást

$$\boxed{\underline{u}(t) = \sum_k \underline{a}^{(k)} \left(\underline{b}^{(k)} \underline{u}_0 \cos \omega_k t + \frac{\underline{b}^{(k)} \underline{v}_0}{\omega_k} \sin \omega_k t \right)}$$

$\underline{a}_k$-k bázisok → ezekben írom le a vizsgált

a vizsgált rendszert felbontottam oszcillátorokra

ez nem a 3D-s tér, hanem az N D-s tér

(N a golyók száma)

DE

$$a \cdot (b \cdot u) = (a \circ b) u$$

$$\underline{u}(t) = \sum_k \underbrace{\left(\underline{a}^{(k)} \circ \underline{b}^{(k)} \right)}_{P^{(k)}} \underbrace{\left(\underline{u}_0 \cos \omega_k t + \underline{v}_0 \frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k} \right)}_{f(\lambda_k)}$$

$$\underline{\underline{B}} = \sum \lambda_k \underline{\underline{P}}^k$$

$$f(B) = \sum_k f(\lambda_k) P^{(k)}$$

$$\underline{u}(t) = \left[\sum_k \underline{\underline{P}}^k \cos(\omega_0 \sqrt{\lambda_k} t) \right] \underline{u}_0 + \left(\sum_k \underline{\underline{P}}^k \frac{\sin \omega_0 \sqrt{\lambda_k} t}{\omega_0 \sqrt{\lambda_k}} \right) \cdot \underline{v}_0 =$$

$$= \cos(\omega_0 \cdot \sqrt{\underline{\underline{B}}}\, t) \cdot \underline{u}_0 + \left(\frac{\sin(\omega_0 \cdot \sqrt{\underline{\underline{B}}}\, t)}{\omega_0 \sqrt{B}} \right) \underline{v}_0$$

$$\ddot{u} = -\omega_0^2 u \qquad \underline{\ddot{u}} = -\omega_0^2 \underline{\underline{B}}\, u$$

$$-\omega_0^2 \rightarrow -\omega_0^2 \underline{\underline{B}}$$

$$u(t) = u_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin\omega_0 t \sim u(t) =$$

Mi van, ha egy $\omega_k = 0$?

⇓

s.é. $= 0$ → ez akkor lehet, ha $\det \underline{\underline{B}} = 0$

nem függetlenek az egyenletek

$$\ddot{u}_1 = -\frac{k}{m} u_1 + \frac{k}{m} u_2$$

$$\ddot{u}_2 = \frac{k}{M} u_1 - \frac{2k}{M} u_2 + \frac{k}{M} u_3$$

$$\ddot{u}_3 = \frac{k}{m} u_2 - \frac{k}{m} u_3$$

$$m\ddot{u}_1 = -ku_1 + ku_2$$

$$M\ddot{u}_2 = -ku_2 + \dots$$

⇓

ez akkor lehet, ha zárt a rendszer → külső erők összege 0

↓

ilyenkor lesz egy $\omega = 0$ megoldása

pl. o O o : az egész rendszert 1 cm-el
$\underset{1cm}{\rightarrow}$ $\underset{1cm}{\rightarrow}$ $\underset{1cm}{\rightarrow}$ arrébb ~~tolom~~
↓
nem lép fel erő
↓
nem lesz
rezgés
↓
~~szimmetria~~ → zérusmódus

$\underline{a}$: polarizációs (módus~~konfigurációs~~ vektor)

akkor van <u>zérusmódus</u> $(\omega = 0)$
ha a rendszernek szimmetriája
van

↓
3D-esetben ↗ 3 eltolás, ↘ 3 forgatás } $f=6$ → merev ~~testnek~~ is
annyi a szab. fokainak
száma
↓
degenerált gyökök (λ-k)

(sima λ-k : <u>normálmódusok</u>)

pl. Metánmolekula

karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^6 \big(\underbrace{\qquad\qquad}_{9\text{-edfokú}} \big) = 0$$

↓
szab. fokok

↕

a merev ~~testszerű~~ elmozdulásokat / forgatásokat
megkülönböztetjük → ~~szabad~~ egy nem merev
test is biztosan ~~tartalmaz~~ ilyen szabadsági fokokat
(+ még vannak saját szab. fokai is)

ha $\lambda \to 0$

$$\left(\frac{\sin(\omega_0\sqrt{\lambda}t)}{\omega\sqrt{\lambda}t}\right)t \xrightarrow[0]{\lambda} t \qquad \cos(\omega_0\sqrt{\lambda_k}t) \xrightarrow[0]{\lambda} 1$$

$\Downarrow$

megoldás: $u_t = u_0 + v_0 t$

$\downarrow$

egyenes vonalú egyenletes mozgás

Példa

$$\begin{pmatrix}\ddot{u}_1\\ \ddot{u}_2\\ \ddot{u}_3\end{pmatrix} = -\frac{k}{m}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -\frac{m}{M} & \frac{2m}{M} & -\frac{m}{M}\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}}_{B}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}$$

$c = \frac{m}{M}$

$$B = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -c & 2c & -c\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\lambda^3 - (2+2c)\lambda^2 + (c+1+c)\lambda - 0 = 0$$

$$\lambda\left(\lambda^2 - (2+2c)\lambda + (2c+1)\right) = 0 \to \lambda = 0 \to \text{van zérusmódus}$$

$$\lambda_{2,3}=\frac{2+2c\pm\sqrt{(2+2c)^2-4(2c+1)}}{2}=1+c\pm\sqrt{(1+c)^2-(2c+1)}=$$

$$=1+c\pm\sqrt{1+2c+c^2-2c-1}=1+c\pm\sqrt{c^2}\quad \begin{cases}\lambda_2=1\\ \lambda_3=1+2c\end{cases}$$

$$\lambda_1=0\qquad \lambda_2=1\qquad \lambda_3=1+2c$$

- $\lambda_1=0$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -c & 2c & -c\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\underline{a}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad\rightarrow$$

- $\lambda_2=1$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -c & 2c-1 & -c\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\qquad a^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\omega_2=\omega_0\sqrt{\lambda_2}=\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\rightarrow$$ nem jelenik meg benne M ✓ ez nem is játszik szerepet az egyenletben

- $\lambda_3=2c+1$

$$\begin{pmatrix}-2c & -1 & 0\\ -c & -1 & -c\\ 0 & -1 & 2c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2c\\1\end{pmatrix}\qquad \underline{a}^{(3)}=\begin{pmatrix}1\\-2c\\1\end{pmatrix}$$

ebben már van M →

a tömegközéppont egy helyben marad

A rendszer $\forall$ rezgése felbontható ezeknek a rezgéseknek a lineárkombinációjára.

$\downarrow$

de más-más amplitudóval és frekvenciával mozognak

és ez egy bonyolult mozgást eredményez

~ ez hasonló ahhoz, hogy Fourier-komponensekre bontom a rezgést, csak most véges módus van

$$\begin{pmatrix} 1 & -c & 0 \\ -1 & 2c & -1 \\ 0 & -c & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ c \end{pmatrix} \frac{1}{2c+1} = \underline{\underline{b}}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} c & -c & 0 \\ -1 & 2c-1 & -1 \\ 0 & -c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} = \underline{\underline{b}}^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} -2c & c & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -c & 2c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2+4c} = \underline{\underline{b}}^{(3)}$$

baloldali s. v.-ok

Kf: $\underline{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{v}_0 = v_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \overset{v_0}{\longrightarrow}$

$A_k = 0 \quad b^1 v_0 = \dfrac{c}{2c+1}$

$B_k \quad \dfrac{c}{2c+1} v_0 t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ez volt a c

$$\frac{m v_0}{2m+M} = \frac{\frac{m}{M}}{2\frac{m}{M}+1} \cdot v_0$$

← ha $m v_0$ impulzust adtunk a rendszernek, az fog szétoszlani a golyók között!

$$\underline{u}(t)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\frac{c}{2c+1}v_0 t+\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\frac{v_0}{2}\frac{\sin w_0 t}{w_0}+\begin{pmatrix}1\\-2c\\1\end{pmatrix}\frac{v_0}{2+4c}\frac{\sin\left(w_0\sqrt{1+2c}\,t\right)}{\left(w_0\sqrt{1+2c}\right)}$$

$\underline{b}^{(2)}\underline{v}_0=\frac{v_0}{2}$ $\lambda=0$ $\lambda=1$ $\lambda=\dots$

$\underline{b}^{(3)}\underline{v}^{(0)}=\frac{v_0}{2+4c}$

a 3. golyó mozgását pl. ennek a 3. sora adja meg (ez egy vektor)

10. óra

Ism:

$\ddot{\underline{u}}=-w_0^2\,\underline{\underline{B}}\,\underline{u}$

$\underline{u}(t)=\underline{a}\cdot e^{iwt}$

$\underline{\underline{B}}\,\underline{a}=\lambda\underline{a}$

$\lambda=\frac{w^2}{w_0^2}$

→ 5 sajátérték van, DE a szimmetriákból lehet ~~(mit)~~ következtetni bizonyos sajátértékekre

pl. eltolás → ilyenkor nem ereg → $\lambda_1=0$ (← ha az egyik vége pl. falhoz lenne kötve, már nem lenne eltolási szimm.ja)

(mindegyiket egyik sem u-val)

szimmetriák:

a szimmetriacsoportja 2 elemből áll → tükrözés, egység

↳ C_2

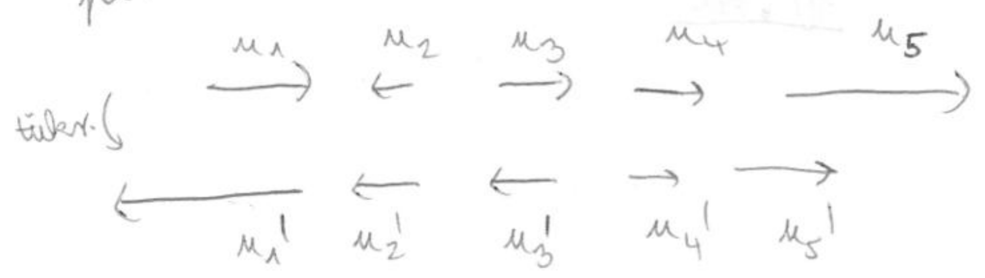
	I	T
I	I	T
T	T	I

ha elkezd rezegni → már nem sz., DE

a mozgás tükrözöttje is megoldása a rendszernek!!!

(ha nem lenne szimm. → a mozgás tükrözöttje már más rendszernek (a tükr. rendszernek) a megoldása)

pl.



$$u_1' = -u_5$$
$$u_2' = -u_4$$
$$u_3' = -u_3$$
$$u_4' = -u_2$$
$$u_5' = -u_1$$

→ lineáris trafó ↓

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \\ u_4' \\ u_5' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & & -1 \\ & & & -1 & \\ & & -1 & & \\ & -1 & & & 0 \\ -1 & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{T}}$$

$$\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}$ $\qquad 1 \cdot 1 = 1$

$\underline{\underline{I}}\ \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}$ $\qquad T \cdot T = 1$

$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{T}}$ $\qquad T \cdot 1 = T$

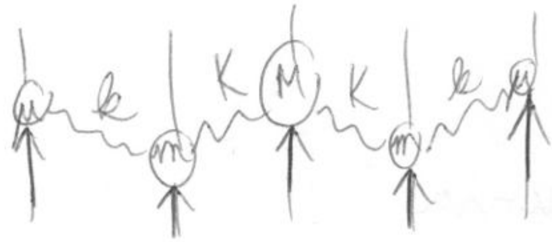
$\underline{\underline{1}} \cdot \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}$ $\qquad 1\, T = T$

$\Downarrow$

ezek a mátrixok a szimmetriacsoport reprezentációi

ábr. elm. alaptétele:

(a rendsz. ált. lin. trafók szimm. csoportot alkotnak)



ez is tükr. szimm.

$u_1' = u_5$

$u_2' = u_4$

$u_3' = u_3$

$u_4' = u_2$

$u_5' = u_1$

$$T = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

máskepp ábrázolódik

ugyanaz a szimm. csoport

(mert más a rendszer)

$$\omega_0^2 \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}$$

$$\boxed{\ddot{\underline{u}}(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{u}(t)}$$

$$\underline{u}'(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{u}'(t)$$ $\underline{u}'$ is ~~tudja~~ az egyenletet

ez $\forall\, \underline{u}(t)$ megoldásra igaz, ha $\underline{u}'(t) = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{u}(t)$

$$\left(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{u}(t)\right)^{\cdot\cdot} = A\left(\underline{\underline{T}}\, u(t)\right)$$

$$\underline{\underline{T}} \cdot \ddot{\underline{u}}(t) = A \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{u}(t)$$

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{A}}\, \underline{u}(t) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{u}(t) \quad \forall u\text{-ra}$$

$$\underline{\underline{T}}\, \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{T}}$$

~~$A\ \underline{\underline{T}}$ kom~~ $\left[\underline{\underline{T}}, \underline{\underline{A}}\right] = 0$

a szimmetriát ábrázoló (minden) mátrix kommutál a dinamikát leíró mátrix-al.

Schur + csoportelmélet

ez kvantumm.-ban is igaz

• kitérés: vektorszámítás

Legyen:

↳ $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$,

~~(ekkor)~~

$\underline{\underline{B}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v}$,

és $\underline{u} = \underline{\underline{A}}\,\underline{v}$

ekkor: $\underline{\underline{B}}\,\underline{u} = \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{A}}\,\underline{v}) = (\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}})\underline{v} = (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\underline{v} = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{v}) = \underline{\underline{A}}(\lambda\underline{v}) = \lambda\overbrace{(\underline{\underline{A}}\,\underline{v})}^{\underline{u}} = \lambda\underline{u}$

⇓

$\underline{u}$ is s. vektor

– Ha 2 operátor kommutál, az egyik op. sv.-át a másik op.-al eltranszformálva is az előző op. s. ~~értékét~~ vektorát kaptuk.

↳ u. abban az altérben maradunk

– ha egyszeresek a sajátértékek ~~($\lambda=1$)~~ → $\underline{u} = \underline{v}$ (mert ugyanabban az altérben marad)

⇓

!!! $\underline{v}$ $\underline{\underline{A}}$-nak is ~~s. értéke~~ s. vektora

⇓

közösek a s. vektorok

~~(ha nem egysz., ...)~~

~~Ha~~ Mivel a ~~me~~ rezgési példában T kommutál A-val: T sajátaltereit megkeresve következtethetünk A s.v.-aira (egyszeres gyökök esetén s. vektoraik megegyeznek)

Visszatérve:

$$T\underline{v} = \lambda \underline{v} \qquad \text{ahol} \qquad T = \begin{pmatrix} & & & & -1 \\ & & & -1 & \\ & & -1 & & \\ & -1 & & & \\ -1 & & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = f(\lambda)$$

$$f(A) = 0$$

↑

Caley-Hamilton-tétel: mátrix kielégíti a karakt. egyenletet

~~def~~: legalacsonyabb fokú egyenlet, amit a mátrix kielégít → minimálegyenlet

tétel: karakter. egyenlet megegyezik a minimálegyenlettel, ha egyszeresek a gyökök.

$$f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\dots(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$$

↓

ha többszörösek a gyökök, akkor a minimálegyenlet alacsonyabb fokú, mint a kar. egyenlet

↳ csúnya mátrixok!!

~~pl.~~ $m(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdot\dots(\lambda-\lambda_n)$ minimálegy.

pl. $\boxed{T^2 = 1}$ $\qquad$ ~~T^2~~ $\underline{\underline{T}}\,\underline{v} = \tau\,\underline{v}$

↓

ez egy minimálegyenlet!

$$\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{T}}\,\underline{v} = \underline{\underline{T}}\,\tau\underline{v} = \tau\,\underline{\underline{T}}\,\underline{v} = \tau\tau\underline{v} = \tau^2\cdot\underline{v}$$

$$\underline{\underline{1}}\,\underline{v} \qquad \boxed{\tau^2 = 1}$$

pl. forgatás~~szimmetriák~~i szimm. (120°-os)

$R^3 = 1$

komplex egységgyökök

definiáló relációk ~~minimálegyenletek → ezekből következnek egyenletek a sajátértékekre, amiket egyszerű megoldani → ~~a rendszer~~ mivel $\underline{\underline{A}}$ kommutál a szimm. ~~traf~~ó-val, a sajátér~~té~~kek megegyeznek, ha egyszeresek

$J_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ -\beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg\} \text{2D-s altér}$$

$J_2 = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \\ \delta \\ +\gamma \end{pmatrix} \qquad \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg\} \text{3D-s altér}$$

$\Downarrow$

5 db ortogonális vektor

ezek bázist alkotnak

T $J_1 = 1$-es s.v.-ai a 2D-s altérben vannak
-||- $J_1 = -1$ -||- 3D-s -||-

$\Downarrow$

$\underline{\underline{A}}$ s.v.-ai is ugyane~~bben~~ zekben az alté~~rben~~ ekben vannak

$\Downarrow$

külön az egyik és másik altérben (~~vizsgálhatom~~ kereshetem) a megoldásokat

$\Downarrow$

az alterekben egyszerűbb megkeresni a megoldásokat

Σ szimm. → szimm. csoport. → def. relációk

szimm. → szimm. op. → s.v.-ok és sajátalterek

az egyes alterekben keressük a mo.-t ← $\underline{\underline{A}}$ sajátalterei

pl.

$$\begin{aligned}
\mu \ddot{u}_1 &= k(u_2 - u_1) \\
m \ddot{u}_2 &= k(u_1 - u_2) + K(u_3 - u_2) \\
M \ddot{u}_3 &= K(u_2 - u_3) + K(u_4 - u_3) \\
m \ddot{u}_4 &= K(u_3 - u_4) + k(u_5 - u_4) \\
\mu \ddot{u}_5 &= k(u_4 - u_5)
\end{aligned}$$

Legyen:

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ $\quad \frac{\mu}{m} = \beta$ $\quad \frac{\mu}{M} = \gamma$

$\frac{K}{k} = c$

$\frac{k}{m} = \frac{k}{\mu} \cdot \frac{\mu}{m} = \omega_0^2 \beta$

$\frac{K}{m} = \frac{K}{k} \cdot \frac{k}{m} = c \cdot \beta \omega_0^2$

$$\ddot{u}_1 = \omega_0^2 (u_2 - u_1)$$

$$\frac{K}{\mu} = \frac{K}{k} \cdot \frac{k}{M} = c \cdot \frac{k}{\mu} \cdot \frac{\mu}{M} = c \cdot \gamma \cdot \omega_0^2$$

$$\ddot{u}_2 = \beta\omega_0^2 (u_1 - u_2) + c\beta\omega_0^2 (u_3 - u_2)$$

$$\ddot{u}_3 = c\gamma\omega_0^2 \left[(u_2 - u_3) + (u_4 - u_3) \right]$$

$$\ddot{u}_4 = c\beta\omega_0^2 (u_5 - u_4) + \omega_0^2 \beta \left[u_4 - u_3 \right)$$

$$\ddot{u}_5 = \omega_0^2 (u_4 - u_5)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \\ \ddot{u}_5 \end{pmatrix} = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & (1+c)\beta & -c\beta & 0 & 0 \\ 0 & -c\gamma & 2c\gamma & -c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & -c\beta & (1+c)\beta & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\ddot{u}} = -\omega_0^2 \underline{\underline{B}}\, \underline{u} \qquad \lambda = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

$$\underline{\underline{B}}\, \underline{a} = \lambda \underline{a}$$

! A szimm. -ból:

$$\underline{u}' = \underline{T}\underline{u} \qquad T\,\mathfrak{I} = T\,\mathfrak{I}$$

$$T = 1 \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ -\beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \qquad T = -1 \quad \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \\ \delta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

ilyen vektorok alakjában keresem a megoldást!

TFH
$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ -b \\ -a \end{pmatrix}$$

a sajátértékei $\underline{\underline{B}}$-nek más

mások lesznek!!,

csak a s. vektorok

lesznek ~~azonos~~ azonos

altérben

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & (1+c)\beta & -c\beta & 0 & 0 \\ 0 & -c\gamma & 2c\gamma & -c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & -c\beta & (1+c)\beta & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ -b \\ -a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ -b \\ -a \end{pmatrix}$$

$$a - b = \lambda a$$
$$-\beta a + (1+c)\beta b = \lambda b$$
$$0 = 0$$
$$-\beta(1+c) b + \beta a = -\lambda b$$
$$b - a = \cancel{\lambda(a)} - \lambda a$$

= az 5 egyenletből csak 2 lineárisan független

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\beta & (1+c)\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

↳ 2D-s altérben 2D-s problémát kell megoldani

(de a sv.-k 5D-sek lesznek)

↳ 2 db λ

$\leftarrow \quad \leftarrow \quad \cdot \quad \rightarrow \quad \longrightarrow$

$\longleftarrow \quad \rightarrow \quad \cdot \quad \leftarrow \quad \longrightarrow$ → ennél nagyobb ω, mert nagyobbak a feszültségek

$T = -1$ $\qquad a = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \\ e \\ d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & (1+c)\beta & -c\beta & 0 & 0 \\ 0 & -c\gamma & 2c\gamma & -c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & -c\beta & (1+c)\beta & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \\ e \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \\ e \\ d \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} d - e &= \lambda d \\ -\beta d + (1+c)\,\beta \cdot e - c\beta f &= \lambda e \\ -c\gamma e + 2c\gamma f - c\gamma e &= \lambda f \end{aligned}}$$

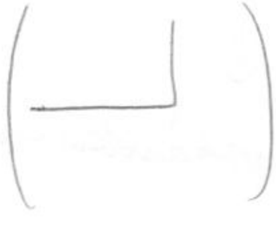
$$-c\beta f + (1+c)\beta e - \beta d = \lambda \cdot e$$

$$-e + d = \lambda \cdot d$$

3 db lin. független egyenlet

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\beta & (1+c)\beta & -c\beta \\ 0 & -2c\gamma & 2c\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

→ Vigyázat! ez nem a kötetlenül mátrix



része

→ 3 db λ, de tudjuk, hogy:

$\lambda = 0$ sajátérték → $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ s.v.

↓

translációs

$$\lambda(\lambda^2 + \dots) = 0$$

⇓

= az 5. egyenlet helyett a szimm. segítségével alacsonyabb fokú egy.-ek szorzatára bontottam

$$\lambda(\lambda^2 \dots)(\lambda^2 \dots) = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\det A} & 0 \\ 0 & \boxed{\det B} \end{pmatrix}}_{\text{mozgásmátrix}}$$

← csoportelmélet

$$\det A \cdot \det B = 0$$

$\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \\ e \\ d \end{pmatrix}$ $(\sigma = -1)$

→ → → → → $\lambda = 0$

$\underline{\underline{B}}$ s.v.-ai

← ← → ← ←

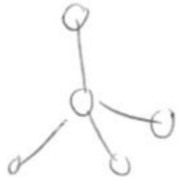
← → ← → ←

⇓

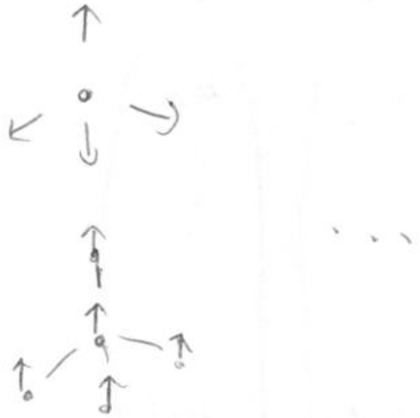
a megoldások a tükr. ~~... szimm.~~ trafó ~~s.é.~~ s. vektorai megfelelő s.é.-el.

↓
ezek a megoldások szimm.-ak

DE ezek szuperpozíciója lesz egy ált. mo., ami már nem szimm.

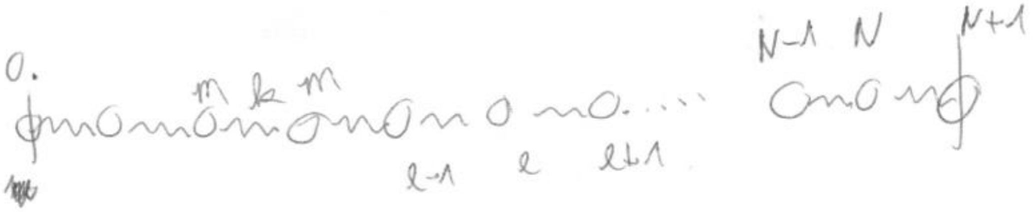


$5\times 3=15$ D-s probléma



~~szimm.~~
~~→ 15 db~~
→ 15 db s. módus

szimmetriából kitalálható sok minden



$$m\ddot{u}_l(t) = k(u_{l-1}-u_l) + k(u_{l+1}-u_l)$$

$l\in\{2,3,\dots N-1\}$
↑
a szélsőkre ez nem igaz

$$m\ddot{u}_1(t) = -ku_1 + k(u_2-u_1)$$

$$m\ddot{u}_N(t) = k(u_{N-1}-u_N) - ku_N$$

↓
nem szimm.
↓
vezessünk be <u>fiktív</u> golyókat!

$u_0 = 0 \qquad u_{N+1} = 0$

$\Downarrow$

$$m\,\ddot{u}_1(t) = k\cdot(\overset{0}{\overset{\parallel}{u_0}} - u_1) + k(u_2 - u_1)$$

$$m\,\ddot{u}_N(t) = k(u_{N+1} - u_N) - k(u_N - \overset{0}{\overset{\parallel}{u_{N+1}}})$$

$\Downarrow$

~~ez is~~ $l \in \{1, 2, \ldots N\}$

$$\begin{pmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{pmatrix} = -\omega_0^2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & & \\ & \ddots & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

$B - \lambda I$

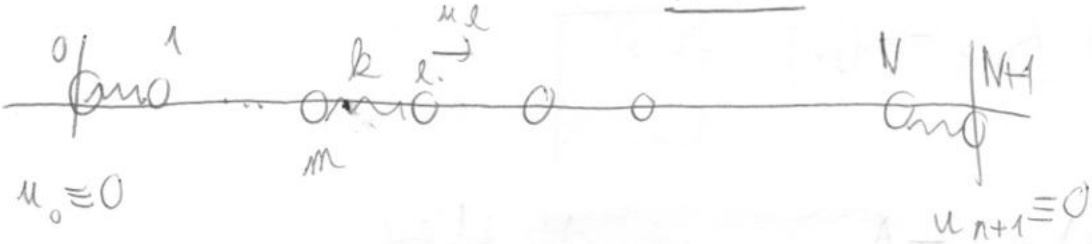
$$A_N(\lambda) = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & -1 & & \\ -1 & (2-\lambda) & -1 & \\ & & \ddots & -1 \\ & & -1 & (2-\lambda) \end{vmatrix}$$

Trükk

$2 - \lambda := 2\cos\alpha$

$$A_N = 2\cos\alpha \cdot A_{N-1} - A_{N-2}$$

$$A_N = \frac{\sin(N+1)\alpha}{\sin\alpha} \rightarrow \text{N-edfokú polinom} \rightarrow \text{ennek kell a zérushelyeit megmondani}$$



$$m\ddot{u}_l = k(u_{l-1} - u_l) + k(u_{l+1} - u_l)$$

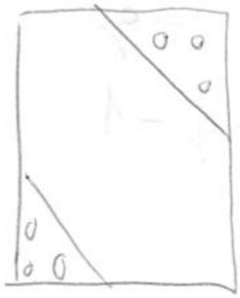
$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\ddot{u}_l = -\omega_0^2\left(-u_{l-1} + 2u_l - u_{l+1}\right) \qquad l = 1, 2 \ldots N$$

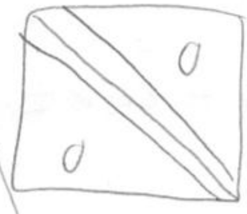
$$\underline{\ddot{u}} = -\omega_0^2 \underline{\underline{B}}\,\underline{u}$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & & \\ & & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & & \\ -1 & 2-\lambda & & \\ & & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$



sávmátrix



kontinuás

homogén kont.

$$\begin{vmatrix} a & b & & 0 \\ b & a & b & \\ & b & a & b \\ 0 & & & \ddots \; a \end{vmatrix} =$$

$$= (-b)^N \begin{vmatrix} -\frac{a}{b} & -1 & \\ -1 & -\frac{a}{b} & -1 \\ & & \ddots \end{vmatrix}$$

$$-\frac{a}{b} = 2 - \lambda$$

$$A_N = (2-\lambda)\, A_{N-1} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & \\ & \boxed{2-\lambda} & \\ & & \end{vmatrix}$$

$$A_N = (2-\lambda)\, A_{N-1} - A_{N-2}$$ rekurziós képlet

(lineáris, másodrendű) állandó eh.os.

$\downarrow$ hasonlít egy diffegyenlethez

legyen

$$2-\lambda = 2\cdot\cos\alpha$$

$$\lambda = 2 - 2\cos\alpha = 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \in (0,4]$$

$A_N(\lambda) \stackrel{?}{=} 0$ $\rightarrow$ milyen λ-kra lesz 0?

$$A_N(\alpha) = 2\cos\alpha\, A_{N-1}(\alpha) - A_{N-2}(\alpha)$$

TFH $\quad A_N = q^N$

$$q^N = 2\cos\alpha\, q^{N-1} - q^{N-2}$$

$$q^2 = 2\cos\alpha \cdot q - 1$$

$$q^2 - 2\cos\alpha\, q + 1 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{(2\cos\alpha)^2 - 4}}{2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\underbrace{\cos^2\alpha - 1}_{-\sin^2\alpha}} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha = \boxed{e^{\pm i\alpha}}$$

$e^{iN\alpha} \qquad e^{-iN\alpha}$

$$A_N(\alpha) = C\cdot e^{iN\alpha} + D\, e^{-iN\alpha}$$

Kezdőfelt. - ekhez illesztés

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & -1 \\ -1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = 4\cos^2\alpha - 1$$

- $A_1 = 2\cos\alpha$

$$A_2 = 2\cos\alpha\, A_1 - A_0$$

$$4\cos^2\alpha - 1 = 2\cos\alpha \cdot 2\cos\alpha \cdot A_0 - A_0$$

$$A_0 = 1$$

$$\boxed{\begin{matrix} A_{-1} = 0 \\ A_0 = 1 \\ A_1 = 2\cos\alpha \end{matrix}}$$

- $A_1 = 2\cos\alpha\, A_0 - A_{-1}$

$$2\cos\alpha = 2\cos\alpha \, 1 - A_{-1}$$

$$A_{-1} = 0$$

$$A_0 = C + D = 1$$

$$A_1 = Ce^{i\alpha} + De^{-i\alpha} = 2\cos\alpha$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\alpha} & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\ominus \begin{cases} Ce^{-i\alpha} + De^{-i\alpha} = e^{-i\alpha} \\ Ce^{i\alpha} + De^{-i\alpha} = 2\cos\alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} \end{cases}$$

$$C(\underbrace{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}_{2i\sin\alpha}) = e^{i\alpha}$$

$$C = \frac{e^{i\alpha}}{2i\sin\alpha}$$

$$\ominus \begin{cases} Ce^{i\alpha} + De^{i\alpha} = e^{i\alpha} \\ Ce^{i\alpha} + De^{-i\alpha} = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} \end{cases}$$

$$D(\underbrace{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}_{2i\sin\alpha}) = -e^{-i\alpha} \qquad D = -\frac{e^{-i\alpha}}{2i\sin\alpha}$$

$$\underline{\underline{\lambda_N(\alpha)}} = C\cdot e^{iN\alpha} + D\, e^{-iN\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{2i\sin\alpha}\cdot e^{iN\alpha} + \left(-\frac{e^{-i\alpha}}{2i\sin\alpha}\right)e^{-iN\alpha} =$$

$$= \frac{e^{i(N+1)\alpha} - e^{-i(N+1)\alpha}}{2i\sin\alpha} = \underline{\underline{\frac{\sin\left((N+1)\alpha\right)}{\sin\alpha}}}$$

<u>sajátértékek</u> A

$$\sin\left[(N+1)\alpha\right] = 0$$

$$(N+1)\alpha = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\alpha_k = \frac{k\pi}{N+1}$ → látszólag végtelen mo.

$$\lambda = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

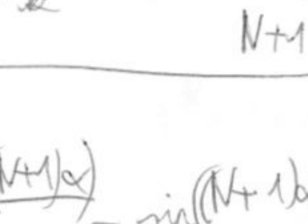
$$\boxed{\lambda_k = 4\sin^2\frac{k\pi/2}{N+1}}$$

de ha

$$\frac{\sin\left((N+1)\alpha\right)}{\sin\alpha} = \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\frac{\sin\left((N+1)\alpha\right)}{(N+1)\alpha}} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\frac{\alpha}{\sin\alpha}} \cdot (N+1) \to N+1 \neq 0$$

$$k \in \{1, 2, \dots N\}$$

csak N db egymástól független zérushely van



$$\boxed{\omega_k = \omega_0 \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{k\pi/2}{N+1}\right)} \qquad k \in \{1, 2 \dots N\}$$

$$u_l(t) = a_l \cdot e^{i\omega t}$$

$$-a_{l-1} + 2\cos\alpha_k \cdot a_l - a_{l+1} = 0 \rightarrow \text{az amplitúdók egyenlete}$$

<u>Áll.:</u> $a_l = \sin(l \cdot \alpha_k)$ megoldás

<u>ell.:</u>

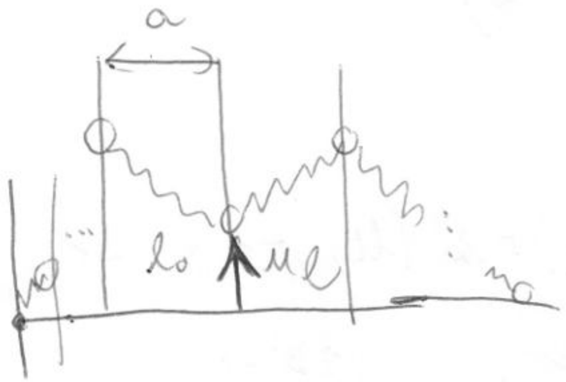
$$-\sin((l-1)\alpha_k) + 2\cos\alpha_k \sin(l\alpha_k) - \sin((l+1)\alpha_k) =$$

$$= -[\sin(l\alpha_k - \alpha_k) + \sin(l\alpha_k + \alpha_k)] + 2\cos\alpha_k \sin(l\alpha_k) =$$

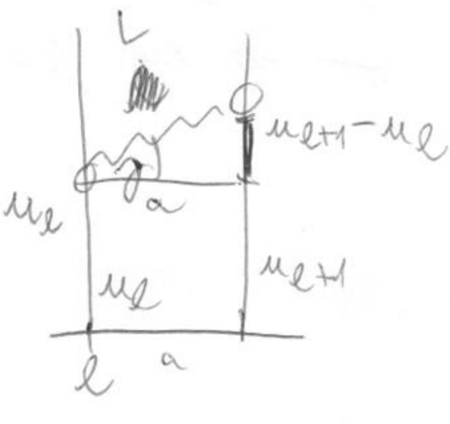
$$= -(\cancel{\sin(l\alpha_k)\cos\alpha_k} - \cancel{\cos(l\alpha_k)\sin\alpha_k} + \cancel{\sin l\alpha_k \cdot \cos\alpha_k} + \cancel{\cos(l\alpha_k)\sin\alpha_k})$$

$$= 0 \checkmark$$

$$\underline{a_l^{(k)} = \sin(l\alpha_k) = \sin\left(\frac{lk\pi}{N+1}\right)}$$



$l_0 < a$



$$L = \sqrt{a^2 + (u_{l+1} - u_l)^2}$$

$$\Delta L = L - L_0 = \sqrt{a^2 + (u_{l+1} - u_l)^2} - L_0 =$$

$$= a\sqrt{1 + \left(\frac{u_{l+1} - u_l}{a}\right)^2} - L_0 =$$

$$= a\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{u_{l+1} - u_l}{a}\right)^2\right) - L_0 =$$

$$= a - l_0 + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{(u_{l+1}-u_l)^2}{a}}_{\text{kicsi}} \sim a - l_0$$

$$F_0 = k(a - l_0)$$

$\downarrow$

most az erőt csak ~~a nyújtatlan~~ az l_0 hossz miatti feszültség okozza,

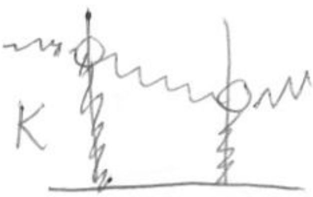
DE a függ. komponens:

$$F = F_0 \cdot \sin\gamma = F_0 \cdot \frac{u_{l+1}-u_l}{L} = F_0 \cdot \frac{u_{l+1}-u_l}{\sqrt{a^2+(u_{l+1}-u_l)^2}} \approx \frac{F_0}{a}(u_{l+1}-u_l) =$$

$$= \underbrace{k \cdot \frac{a-l_0}{a}}_{k'}(u_{l+1}-u_l)$$

$$m\ddot{u}_l = k'(u_{l-1}-u_l) + k'(u_{l+1}-u_l)$$

$\vdots$



$$m\ddot{u}_l = k'(u_{l-1}-u_l) + k'(u_{l+1}-u_l) - Ku_l$$

$$\ddot{u}_l = \frac{k'}{m}u_{l-1} + \frac{k'}{m}u_{l+1} - \frac{2k'+K}{m}u_l$$

$\downarrow$ $\leftarrow$ itt nem $2k'$ szerepel

kicsit más a ~~megoldás~~ számolás, de hasonló.

$$\omega_0^2 := \frac{k'}{m}$$

$$\ddot{u}_l = -\omega_0^2 \begin{pmatrix} -1 & \left(2+\frac{K}{k'}\right) & -1 & \\ & -1 & \ddots & \end{pmatrix}$$

$$b := \frac{K}{k'}$$

$$\begin{pmatrix} 2+b & -1 & & \\ -1 & 2+b & -1 & \\ & & \ddots & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overbrace{2+b-\lambda}^{2-(\lambda-b)} & -1 & \\ -1 & 2+b-\lambda & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

most $\lambda'' = \lambda - b$

$$\lambda_k = 4\sin^2\left(\frac{k\pi/2}{N+1}\right) + b$$

Ábrázolás

k hányadik rezgési módus

l hányadik golyó

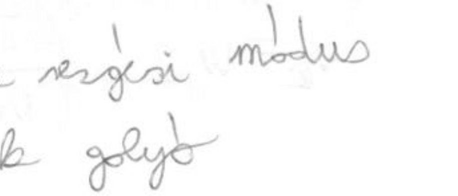
tekintsük l-t folytonosnak

$k=1$

$\sin \frac{l\pi}{N+1}$

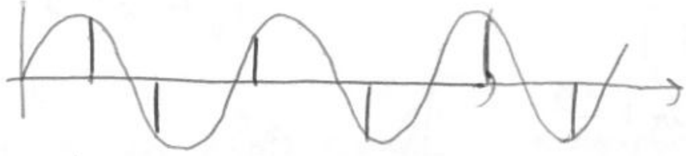
$k=2$

$\sin \frac{2l\pi}{N+1}$



$k=3$ 

Minél nagyobb a rugóerő, annál nagyobb a freki

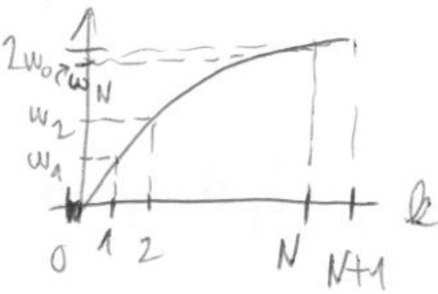
$k=N$ 

↓

mindenki a szomszédjával ellentétes irányba megy
(de nem u. akkora amplitúdóval)

⇓

(atomoknál ez már nem reális, mert nagyon nagy freki kéne ehhez).



→ a módusok frekvenciái

$$\omega_k = \omega_0 2 \sin\left(\frac{k\pi/2}{N+1}\right)$$

Folytonos határátmenet $N \to \infty$

$$m\ddot{u}_l = k(u_{l+1} - 2u_l + u_{l-1})$$

$\vdash a \dashv$ → golyók táv. – a

$$\frac{M}{N}\ddot{u}_l = k(\dots)$$

$M = mN$ rendszer teljes töm.

$\frac{M \cdot a}{L} = m = \frac{M}{N}$ ✓

$L \approx aN$ (a(N+1) valójában)

↓

$N = \frac{L}{a}$

$$\frac{M}{L} a \ddot{u}_l = k(\dots) \quad /:a$$

↓

$$\frac{M}{L}\ddot{u}_l = \underbrace{(ka)}_{B}\ \frac{(\dots)}{a^2} \qquad ka := B$$

$$c^2 = \frac{BL}{M} \quad \surd!$$ adott állandó

$$\ddot{u}_l = \left(\frac{BL}{M}\right)\cdot \frac{u_{l+1} - 2u_l + u_{l-1}}{a^2}$$

$$\ddot{u}_l = c^2 \cdot \frac{\frac{u_{l+1}-u_l}{a} - \frac{u_l - u_{l-1}}{a}}{a}$$

$N \to \infty$

$a \to 0$

de $M = \text{konst}$

$L = \text{konst}$

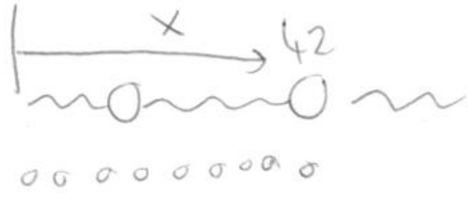
$B = \text{konst}$

$k \to \infty$

Már nem lehet számmal jellemezni a golyót, mert folyt. sok van

$\downarrow$

a faltól való táv-al jellemezzük



$u_l(t) \qquad u_{l+1}(t)$

$\downarrow$

$u(x,t) \qquad u(x+a,t)$

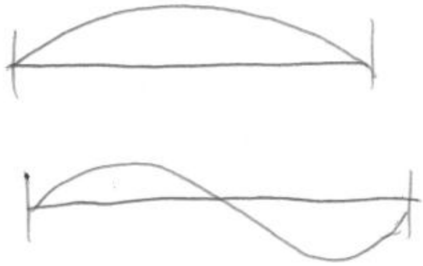
$$\frac{u_{l+1}-u_l}{a} = \frac{u(x+a,t) - u(x,t)}{a} \to \frac{\partial u(x+\frac{a}{2},t)}{\partial x}$$

$$\frac{u_l - u_{l-1}}{a} = \frac{u(x,t) - u(x-a,t)}{a} \to \frac{\partial u(x-\frac{a}{2},t)}{\partial x}$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\left(x+\frac{a}{2},t\right)-\frac{\partial u}{\partial x}\left(x-\frac{a}{2},t\right)}{a} \to \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\ddot{u}_e = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}$$ hullámegyenlet

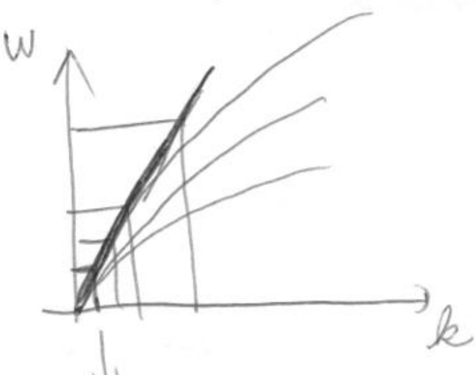


} a kitérés fv-ek itt ~~tényleg~~ folytonosak lesznek

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{B/a}{M/N}} = \sqrt{\frac{B}{M}\frac{Na}{a^2}} = \sqrt{\frac{BL}{M}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{c}{a}$$

ha $a \to 0$ $\omega_0 \to \infty$

$k \to \infty$, $\omega_0 \to \infty$



~~diszperzió~~

↓

kül. k-ra kül. ω-kat kapunk ω_0 egész számú többszörösei az ekvipartíció miatt ha $k = \infty$ → ∞ sok

↓

részre oszlik az energia

↳ adott hőmérséklet eléréséhez ∞ sok energia kell

↓ ↳ ∞ fajhő!!

ez nem jó!, valójában mégiscsak atomokból áll

↓

(de használható ez a közelítés, ha a parc. diff. egy. -el könnyen le tudjuk írni a jelenségeket)

DE a fény nem atomokból áll

↳ itt ∞ kis ~~...~~ hullámhossz előfordulhat

↓ ↓

UV katasztrófa

⇓

Planck: kvantumhipotézis

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

↳ hullámegyenlet legegyszerűbb változata