# Relativitáselmélet tételsor

1. Téridő alapfogalmai. Ívhossz, sajátidő. Lorentz-transzformáció. Sebességek összeadása
2. Négyes formalizmus. Kontra- és kovariáns komponensek, metrikus tenzor. Lorentz transzformáció mátrixa. Négyes vektorok és tenzorok. Differenciáloperátorok.
3. Kinematika. Négyessebesség, négyesgyorsulás, egyenletesen gyorsuló mozgás.
4. Tömegpont relativisztikus leírása. Hatás, Lagrange- és Hamilton fügvény. Négyesimpulzus, mozgásegyenlet kovariáns alakja.
5. Részecskék bomlása, ütközése. Rugalmas szórás. Rugalmatlan ütközés.
6. Impulzusmomentum. Tömegközéppont relativisztikus definíciója.
7. Nulla tömegű részecskék. Doppler-effektus.
8. Töltött részecske mozgása elektromágneses térben. Hatás, Lagrange- és Hamilton függvény. Kovariáns mozgásegyenletek.
9. Térerősség tenzor. Térerősségek transzformációja, invariánsai.
10. Maxwell egyenletek kovariáns alakja. Mértékszabadság. Mozgó töltés elektromágneses tere.
11. Klasszikus térelmélet. Lagrange-sűrűség fogalma, téregyenletek. Energia-impulzus tenzor.
12. Elektromágneses mező hatásintegrálja, Lagrange-sűrűsége, energia-impulzus tenzora. Megmaradási törvények.
13. Klein-Gordon egyenlet és síkhullám megoldásai. Dirac egyenlet szabad részecskére.
14. Dirac egyenlet síkhullám megoldásai. Helicitás sajátállapotok.
15. Dirac egyenlet megoldása centrális potenciál esetén. Hidrogénszerű atomok spektruma.

Javasolt irodalom:

- Landau-Lifsitz: Eléleti Fizika II. Klasszikus erőterek
- Jackson: Klasszikus elektrodinamika
- Greiner: Relativistic Quantum Mechanics

RELATIVITÁSELMÉLET 09.07.

Katz Sándor H $12^{15}$ - $13^{45}$

Landau II.: Klasszikus erőterek

Jackson: Klasszikus elektrodinamika

Greiner: Relativistic Quantum Mechanics

<u>Relativitás elve</u>: Minden inerciarendszerben a fizika tv.-ei ugyanazok. A különböző K koordináta-rendszerekben az ottani $(x, y, z, t)$ koordinátákkal felírt egyenletek alakja azonos.

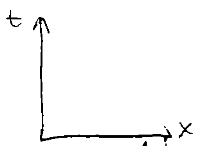
<u>Tapasztalat</u>: A fény sebessége minden (koordináta) rendszerben azonos.

$\Rightarrow$ speciális relativitáselmélet

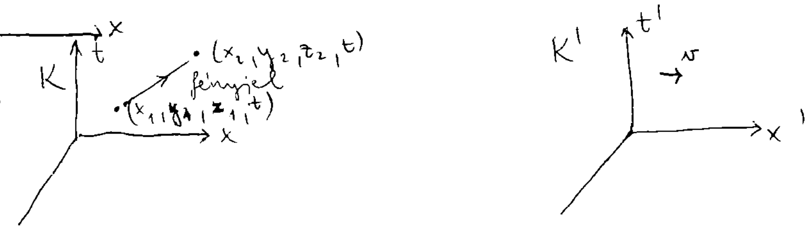
<u>Téridő</u>: Események halmaza

adott K rendszerben az $(x, y, z, t)$ pontok összessége

1+1D:




<u>ívhossz</u>:




a fény által megtett út $\quad l = c(t_2 - t_1)$

másrészt $\quad l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0$$

$$c^2(t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2 = 0$$

ezek alapján az ívhossz: $s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}$

c állandósága $\Rightarrow$ $s_{12} = 0$ egy K rendszerben, akkor $s_{12}' = 0$ $\forall$ K' rendszerben

<u>ívelem négyzet</u>: $t_2 - t_1, \; x_2 - x_1, \; y_2 - y_1, \; z_2 - z_1$ kicsik

$dt \quad dx \quad dy \quad dz$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

ívhossz, ívelem a távolsághoz hasonló

4D Minkowski geometriában ez a távolság

Hogy viszonyul egymáshoz $ds^2$ és $ds'^2$ ?

sorfejtés: $ds'^2 = a\,ds^2 +$ magasa~~bb~~ rendek

mitől függhet az a ?

→ téridő homogenitása ⇒ a nem függhet $x, y, z, t$ -től

→ csak a $v$ sebességtől függhet

→ $v$ irányától nem függ (izotrópia)

$a(|v|)$ 3 rendszer :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "v_1"'] \arrow[rr, bend left, "v_2"] & K_1 \arrow[r, "v_{12}"'] & K_2 \end{tikzcd}$$

$$ds_1^2 = a(|v_1|)\,ds^2$$
$$ds_2^2 = a(|v_2|)\,ds^2$$
$$ds_2^2 = a(|v_{12}|)\,ds_1^2$$

$$a(|v_{12}|) = \frac{a(|v_1|)}{a(|v_2|)}$$

mivel $|v_{12}|$ nem csak $|v_1|$ és $|v_2|$ fv.-e (irányok) ⇒ a konstans = 1

$ds^2$ invariáns $ds'^2 = ds^2$ ívelem k.rendszerfüggetlen

⇒ $s'^2 = s^2$ ⇒ $s' = s$ ívhossz invariáns

speciális ívhosszak:

→ legyen $(x_1, y_1, z_1, t_1)$ és $(x_2, y_2, z_2, t_2)$ két esemény K-ban

**a)** ∃-e olyan K', melyben a két esemény egy helyen történik ?

**b)** ∃-e olyan K', melyben a két esemény egyidejű ?

legyen $t_{12} = t_2 - t_1$

$$l_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$t_{12} \neq 0$
$l_{12} \neq 0$

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 \qquad s'^2_{12} = c^2 t'^2_{12} - l'^2_{12}$$

$$s_{12}^2 = s'^2_{12}$$

**a)** $l'^2_{12} \overset{!}{=} 0$ ⇒ $s_{12}^2 = s'^2_{12} = c^2 t'^2_{12} > 0$

$s^2 > 0$ ívhosszak időszerűek

eltelt idő K'-ben
$$t'_{12} = \frac{1}{c} s_{12} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}$$

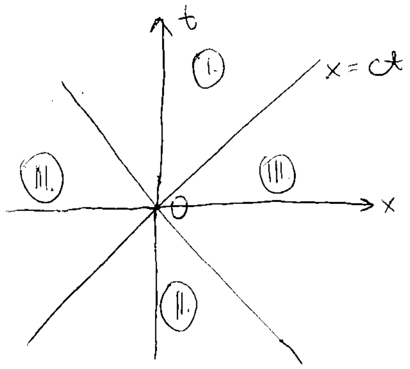
**b)** $t'^2_{12} = 0$ $s_{12}^2 = s'^2_{12} = -l'^2_{12} < 0$

$s^2 < 0$ térszerű

távolság
$$l'_{12} = \sqrt{-s_{12}^2} = |i s_{12}| = \sqrt{l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2}$$

09.07.

# RELATIVITÁSELMÉLET




fénykúp

origóhoz képest

időszerű pontok: (I) $ct^2 - x^2 > 0$

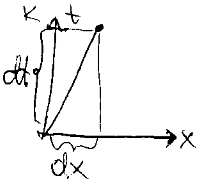
nincs olyan K' ahol egyidejű lenne O-val a tartomány egy pontja $t' > 0$

abszolút jövő $\Leftarrow$

(II) abszolút múlt

(III) $ds^2 < 0$ egyidejűség K' függő → múlt és jövő is lehet egy adott pont, de nem lehetnek egy helyen O-val semmilyen K'-ben → semmilyen hatás nem juthat el ide az O-ból → térszerűen szeparált pontok

Sajátidő:




$dt' = ?$ az együttmozgó rendszerben

K rendszerben dt idő alatt $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ távolságot tesz meg

K' együttmozgó rendszerben $dx' = 0$ $dy' = 0$ $dz' = 0$ $dt' = ?$

$$ds^2 = ds'^2 \to c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt'^2$$

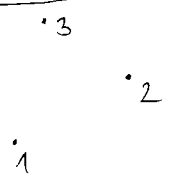
$$dt' = \frac{ds}{c} \qquad dt' = dt\sqrt{1-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2dt^2}} = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$ ← K-ban

egy teljes mozgásra: $t_2' - t_1' = \int dt' = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \leq t_2 - t_1$

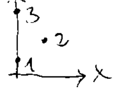
a mozgó óra mindig kevesebbet mér

sajátidő: $\tau = \int dt' = \frac{1}{c}\int ds$ sajátidő = ívhossz$\left(\frac{1}{c}\right)$

(anti) Δ egyenlőtlenség:




$O_1$ $O_2$ $O_3$ 3 esemény úgy, hogy $s_{12}$, $s_{13}$, $s_{23}$ időszerű és $t_1 < t_2 < t_3$




Létezik K' ahol $O_1$ és $O_3$ egy helyen van

$$\tau_{13} = \int ds_{13} = t_3 - t_1$$

$$\tau_{12} + \tau_{23} = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1-\frac{v_{12}^2}{c^2}} + \int_{t_2}^{t_3} dt\sqrt{1-\frac{v_{23}^2}{c^2}} < \int_{t_1}^{t_3} dt = t_3 - t_1$$

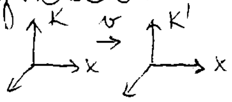
RELATIVITÁSELMÉLET 09.07.

$\tau_{13} > \tau_{12} + \tau_{23}$

„Két pont között a leghosszabb út az egyenes" $\rightarrow$ ikerparadoxon

<u>Lorentz transzformáció:</u>

milyen kapcsolat van a K és K' rendszerbeli koordináták között $\Rightarrow$ Galilei klasszikusban: $x = x' + vt'$ $y = y'$ $z = z'$ $t = t'$




$\Rightarrow$ ez nem tartja meg az ívhosszt $\Rightarrow$ sérti a fénysebesség állandóságát

$\Rightarrow$ olyan transzformációt keresünk, ami megtartja az ívhosszt

ívhossz olyan, mint egy távolság 4D-ben $\Rightarrow$ eltolások, tükrözéset, forgatásokat ezt választjuk és nézzük meg mert a többi trivi

6 db elemi forgatás $\rightarrow$ $xy$, $xz$, $xt$, $yz$, $yt$, $zt$ síkokban

$\rightarrow$ szokásos $\leftarrow$ térbeli ✓

nézzük az $xt$ forgatást

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

feltétel: $(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2$

$$(\alpha ct' + \beta x')^2 - (\gamma ct' + \delta x')^2 = (ct')^2 - x'^2 \qquad \forall t', x'$$

$$\cancel{(\alpha^2 - \gamma^2 c^2)(ct')^2 + 2c(\alpha\beta - \gamma\delta)t'x' + (\delta^2 - \beta^2)x'^2 = (ct')^2 - x'^2}$$

$$(\alpha^2 - \gamma^2)(ct')^2 + 2c(\alpha\beta - \gamma\delta)t'x' - (\delta^2 - \beta^2)x'^2 = (ct')^2 - x^2$$

$$\alpha^2 - \gamma^2 = 1 \qquad \alpha\beta - \gamma\delta = 0 \qquad \delta^2 - \beta^2 = 1$$

$\gamma = \operatorname{sh}\chi$ $\quad \alpha = \pm \operatorname{ch}\chi$ $\quad$ $+$: nincs időtükrözés

$\beta = \operatorname{sh}\chi'$ $\quad \delta = \pm \operatorname{ch}\chi'$ $\quad$ $+$: nincs tértükrözés

$\operatorname{ch}\chi \operatorname{sh}\chi' - \operatorname{ch}\chi' \operatorname{sh}\chi = 0 \qquad \chi' = \chi$

mátrix $\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & \operatorname{sh}\chi \\ \operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$

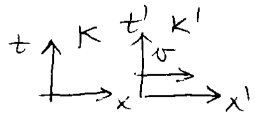
$\chi$ = rapiditás

# RELATIVITÁSELMÉLET

nézzük K-ban K' origójának mozgását $(x' = 0)$

$$ct = \operatorname{ch}\chi \cdot ct' \qquad \frac{x}{ct} = \operatorname{th}\chi = \frac{v}{c}$$

$$x = \operatorname{sh}\chi \cdot ct'$$



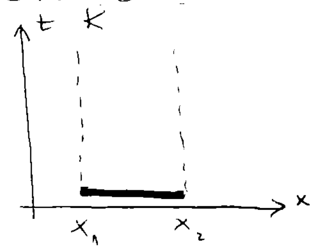

$$\operatorname{sh}\chi = \frac{\operatorname{th}\chi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\chi}} \qquad \operatorname{ch}\chi = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\chi}}$$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad x = \frac{vt' + x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{a Lorentz-transzformáció}$$

inverz transzformációban $v \to -v$

Példák:

1) Lorentz-kontrakció:

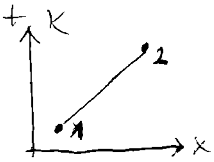



a K rendszerben $\Delta x = x_2 - x_1$ hosszú rúd milyen hosszú K'-ben? adott $t'$-nél hol van a két vége? $(x'_1, x'_2)$

$$x_1 = \frac{vt' + x'_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad x_2 = \frac{vt' + x'_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta x = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{mozgóban rövidebb}$$

2) Sajátidő: 2 esemény $(t_1, x_1)$, $(t_2, x_2)$




$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

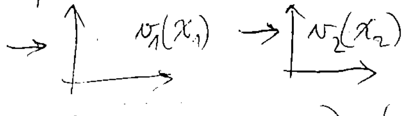
$$t_2 = \frac{t'_2 - \frac{v}{c^2}x'_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

együttmozgó K' $\quad x'_2 = x'_1$

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$ (ó jee, megint kijött)

## Sebességek összeadása 1D




$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi_1 & \operatorname{sh}\chi_1 \\ \operatorname{sh}\chi_1 & \operatorname{ch}\chi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi_2 & \operatorname{sh}\chi_2 \\ \operatorname{sh}\chi_2 & \operatorname{ch}\chi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}$$

# RELATIVITÁSELMÉLET

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi_1 & \operatorname{sh}\chi_1 \\ \operatorname{sh}\chi_1 & \operatorname{ch}\chi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi_2 & \operatorname{sh}\chi_2 \\ \operatorname{sh}\chi_2 & \operatorname{ch}\chi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix} =$$ HF

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\chi_1+\chi_2) & \operatorname{sh}(\chi_1+\chi_2) \\ \operatorname{sh}(\chi_1+\chi_2) & \operatorname{ch}(\chi_1+\chi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}$$

$\chi$ additív 1D-ban

sebességekkel $\frac{v_1}{c} = \operatorname{th}\chi_1$ $\frac{v_2}{c} = \operatorname{th}\chi_2$ $\frac{v}{c} = \operatorname{th}(\chi_1+\chi_2) =$

$$= \frac{\operatorname{sh}(\chi_1+\chi_2)}{\operatorname{ch}(\chi_1+\chi_2)} = \frac{\operatorname{ch}\chi_1 \operatorname{sh}\chi_2 + \operatorname{sh}\chi_1 \operatorname{ch}\chi_2}{\operatorname{ch}\chi_1 \operatorname{ch}\chi_2 + \operatorname{sh}\chi_1 \operatorname{sh}\chi_2} =$$

$$= \frac{\operatorname{th}\chi_2 + \operatorname{th}\chi_1}{1 + \operatorname{th}\chi_1 \operatorname{th}\chi_2} = \frac{v_2/c + v_1/c}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

$$v = \frac{v_2 + v_1}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

Lorentz transzformáció 3D-ben $(v = v_x)$

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad x = \frac{vt' + x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad y = y' \quad z = z'$$

Sebességek transzformációja általánosan

K rendszerben mozogjon egy részecske $\underline{v}$ sebességgel

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

K' K-hoz képest V sebességgel mozog x irányban

$\underline{v}'$ és $\underline{v}$ között mi a kapcsolat?

$$dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad dx = \frac{V dt' + dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad dy = dy' \quad dz = dz'$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{V dt' + dx'}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'} = \frac{V + v_x'}{1 + \frac{V v_x'}{c^2}}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V}{c^2}dx'} = \frac{v_y'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V v_x'}{c^2}} \qquad v_z = \frac{v_z'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V v_x'}{c^2}}$$

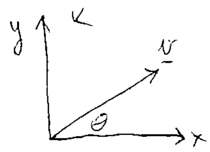
a merőleges sebességek is változnak

nem szimmetrikus V és $v_x'$ cseréjére

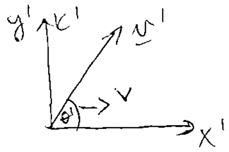
Lorentz transzformációk nem felcserélhetők

# RELATIVITÁSELMÉLET

09.14.




$\underline{v}$ az $x,y$ síkban




Sebesség irányának változása

$$v_x = v\cos\theta \qquad v_x' = v'\cos\theta'$$

$$v_y = v\sin\theta \qquad v_y' = v'\sin\theta'$$

$$\frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg}\theta = \frac{v_y'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{v_x' + V} = \frac{v'\sqrt{1-V^2/c^2}\,\sin\theta'}{v'\cos\theta' + V}$$

határesetben: legyen $v = c \Rightarrow v' = c$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\cos\theta' + \frac{V}{c}}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}\sin\theta' \qquad \cos\theta = \frac{\cos\theta' + \frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'}$$

tovi határeset: $\frac{V}{c}$ kicsi $\Rightarrow$ sorfejtés

$$\sin\theta = \sin\theta'\left(1-\frac{V}{c}\cos\theta'\right)$$

$$\sin\theta - \sin\theta' = -\frac{V}{c}\cos\theta'\sin\theta'$$

$$\Delta\theta = \theta' - \theta$$

$$\sin\theta' - \sin\theta \approx \cos\theta'\Delta\theta + \mathcal{O}(\Delta\theta^2)$$

$$\cos\theta'\Delta\theta = \frac{V}{c}\sin\theta'\cos\theta'$$

$$\Delta\theta \approx \frac{V}{c}\sin\theta' \qquad \text{fényaberráció}$$

<u>Négyes formalizmus:</u>

Legyen $x^0 := ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$

$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ négyes helyvektor

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & \operatorname{sh}\chi & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}$$

Lorentz-rafó $x$ irányú mozgásra

térbeli forgatások

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}$$

RELATIVITÁSELMÉLET

$x^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu x^{\nu'}$ ...

$\Lambda^\mu{}_\nu$: Lorentz transzformációs mátrixa

összegzési konvenció: azonos alsó-felső indexre automatikusan összegzünk 0-tól 3-ig

$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^{\nu'}$

ívelemnégyzet: $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2} = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ metrikus tenzor

**Kovariáns és kontravariáns komponensek**

$x_\mu := \eta_{\mu\nu} x^\nu$ kovariáns komponensek

$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$ kontravariáns –"–

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

ívelem: $ds^2 = dx_\mu dx^\mu$

$x^\mu = (ct, \underline{x})$ $x_\mu = (ct, -\underline{x})$

ívelem invarianciája

$ds^2 = ds'^2$

$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\varrho\lambda} dx^{\varrho'} dx^{\lambda'}$

$dx^\mu = \Lambda^\mu{}_\kappa dx^{\kappa'}$

$dx^\nu = \Lambda^\nu{}_\sigma dx^{\sigma'}$

$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\kappa dx^{\kappa'} \Lambda^\nu{}_\sigma dx^{\sigma'} = \eta_{\varrho\lambda} dx^{\varrho'} dx^{\lambda'}$

$(\underbrace{\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda^\nu{}_\sigma}) dx^{\kappa'} dx^{\sigma'} = \underbrace{\eta_{\varrho\lambda}} dx^{\varrho'} dx^{\lambda'}$ $\forall$ dx-re

a két mátrixnak kell megegyezni

$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\kappa\sigma}$

$\eta_{\kappa\sigma} \eta^{\sigma\lambda} = \delta_\kappa^\lambda$

$$\boxed{\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda^\nu{}_\sigma \eta^{\sigma\lambda} = \delta_\kappa{}^\lambda}$$

$\det \Lambda^2 = 1$

$\det \Lambda = \pm 1$ $\begin{cases} +1 & \text{nincs tér/idő tükrözés} \\ -1 & \text{van} \end{cases}$

$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^{\nu'}$

kovariáns komponensek transzformációja

$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$ ~~...~~ $= \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma x^{\sigma'} = \underbrace{\eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma \eta^{\sigma\kappa}}_{\Lambda_\mu{}^\kappa} x'_\kappa$

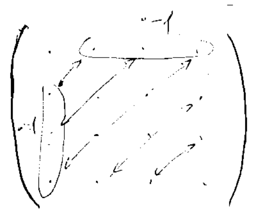
RELATIVITÁSELMÉLET 09.21.

$\Lambda_\mu{}^\kappa := \eta_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\sigma\, \eta^{\sigma\kappa}$

$x_\mu = \Lambda_\mu{}^\kappa\, x'_\kappa$

$\Lambda^\mu{}_\kappa\, \Lambda_\mu{}^\lambda = \delta_\kappa{}^\lambda$

$(\bar\Lambda^T)^\lambda{}_\mu := \Lambda_\mu{}^\lambda$



$(\bar\Lambda^T)^\lambda{}_\mu\, \Lambda^\mu{}_\kappa = \delta_\kappa{}^\lambda$

$\bar\Lambda^T \Lambda = \mathbb{1}$ ez 10 db feltétel → 6 db param

⇒ 3 db forgatás (xy, xz, yz síkokban), 3 db boost (xt, yt, zt síkokban)

Négyesvektorok általánosan:

4 db $A^\mu$ szám négyesvektort alkot, ha úgy transzformálódik, mint a helyvektor, azaz

$$A^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, A^{\nu\prime}$$

$x^\mu$-höz hasonlóan a kovariáns komponenset:

$$A_\mu := \eta_{\mu\nu} A^\nu$$

vektor „hossza", négyzete:

$$A^2 := A_\mu A^\mu = \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$$

skalárszorzat:

$A^\mu, B^\mu$ négyesvektorok

$$AB = A_\mu B^\mu = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$$

Áll: a skalárszorzat invariáns (skalár)

minden Krendszerben ugyanaz az értéke

⇒ $A^2$ invariáns

Tenzorok:

16 db $A^{\mu\nu}$ szám kétindexes négyestenzort alkot, ha mindkét indexében úgy transzformálódik, mint a helyvektor

$$A^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\sigma\, \Lambda^\nu{}_\kappa\, A^{\sigma\kappa\prime}$$

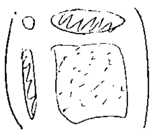
indexek rakosgatása

$A_\mu{}^\nu := \eta_{\mu\sigma} A^{\sigma\nu}$ $A^\mu{}_\nu := \eta_{\nu\sigma} A^{\mu\sigma}$ $A_{\mu\nu} := \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\varrho} A^{\sigma\varrho}$

$A_{00} = A^0{}_0 = A_0{}^0 = A^{00}$

$A_{0i} = +A^0{}_i = -A_0{}^i = -A^{0i}$ $j, i = 1,2,3$ $A_{ij} = -A_i{}^j = -A^i{}_j = A^{ij}$

RELATIVITÁSELMÉLET 

 4 rész máshogy viselkedik

többindexes tenzorok: Az $A^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$ számok összessége egy $n$ indexes négyes-tenzort alkot, ha minden egyes indexben úgy transzformálódik, mint a helyvektor $A^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1}\Lambda^{\mu_2}{}_{\nu_2}\dots\Lambda^{\mu_n}{}_{\nu_n} A^{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}$

Speciális tenzorok:

1, egységtenzor: $\delta^\mu{}_\nu A^\nu = A^\mu$ $\forall A$-ra $\delta^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $\delta_\mu{}^\nu$ is

$\delta_\mu{}^\nu A_\nu = A_\mu$

$(\delta_{\mu\nu}) = \eta_{\mu\sigma}\delta^\sigma{}_\nu = \eta_{\mu\nu}$ $\delta$ és $\eta$ ugyanaz

2, szimmetrikus, ha $A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$ 10 független szám

antiszimmetrikus, ha $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$ 6 független szám

3, Csak 3D forgatásokra $A^i$: vektor $\underline{A}$

tenzoroknál: $\rightarrow A^{0i}$: 3D vektor

$\rightarrow A^{ij}$: 3D tenzor

$\rightarrow A^{00}$: 3D skalár

4, teljesen antiszimmetrikus tenzor: 4 indexes

$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ $\varepsilon^{0123} = 1$ bármely kettő index cseréjére előjelet vált = antiszimmetrikus

24 db nem nulla elem $\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} = -24$

$\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\varepsilon_{\kappa\lambda\varrho\sigma} = -2(\delta^\mu{}_\kappa\delta^\nu{}_\lambda - \delta^\mu{}_\lambda\delta^\nu{}_\kappa)$

$\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\varepsilon_{\kappa\nu\varrho\sigma} = -6\delta^\mu{}_\kappa$

<u>Téttükrözés</u>

skalár / pszeudoskalár

nem vált előjelet / előjelet vált tértükrözésre

vektor → előjelet vált

axiálvektor → nem vált előjelet; $\underline{C} = \underline{A} \times \underline{B}$ ha $\underline{A}, \underline{B}$ vektor ⇒ ⇒ $\underline{C}$ axiálv.

Antiszimmetrikus tenzor 3D forgatásokra $A^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & a_x & a_y & a_z \\ -a_x & 0 & -b_z & b_y \\ -a_y & b_z & 0 & -b_x \\ -a_z & -b_y & b_x & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{a}$: vektor $\underline{b}$: axiálv.

RELATIVITÁSELMÉLET 09.28.

Mezők: téridőpontoktól függő skalár, négyesvektor, négyestenzor értékű fv.-ek.

skalármező $T(0) = T'(0)$

koordinátákkal $T(x) = T'(\Lambda^{-1}x)$

vektormező: $V^\mu(0) = \Lambda^\mu{}_\nu V^{\nu'}(0)$

$$V^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu V^{\nu'}(\Lambda^{-1}x)$$

tenzormező: $A^{\mu\nu}(0) = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma A^{\rho\sigma'}(0)$

$$A^{\mu\nu}(x) = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma A^{\rho\sigma'}(\Lambda^{-1}x)$$

Kovariáns egyenletek: a két oldalon azonosan transzformálódó mennyiségek állnak pl. $A^\mu = B^\mu$ $\quad \cancel{A^{\mu\nu} = B^\mu}$ $\quad \nu = 0$

↳ ezek minden K rendszerben ugyanolyan alakúak

Relativitás elve: minden fizikai tv. felírható kovariáns egyenlettel

Kovariáns differenciáloperátorok:

F legyen skalármező $x^\mu$ megváltozása esetén

$$dF = \sum_\mu \frac{\partial F}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

dF az skalár

$dx^\mu$ négyesvektor $\Rightarrow$ $\frac{\partial F}{\partial x^\mu}$ négyesvektor kovariáns komponensei

elnevezés: $\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ $\quad \rightarrow \quad dF = \partial_\mu F dx^\mu$

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z\right)$$

$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z\right) = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

Hullámoperátor (D'Alambert)

$$(\partial^2 =)\ \partial_\mu\partial^\mu = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta =: \Box \quad \text{skalárop.}$$

Pl. $\phi$ skalármező $\Box\phi = 0$

megoldást keressük $\phi(x) = e^{ik_\mu x^\mu}$ (k: négyesvektor)

ilyen alakban

$$\partial_\mu \phi = (ik_\mu) e^{ik_\mu x^\mu} = (ik_\mu) e^{ik^\mu x_\mu}$$

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi = (ik^\mu)(ik_\mu) e^{ik^\mu x_\mu} = -k_\mu k^\mu e^{ik_\mu x^\mu}$$

$$\Box\phi = 0 \Rightarrow k_\mu k^\mu = 0$$

RELATIVITÁSELMÉLET

09.28.

## Négyessebesség

$\frac{dx^\mu}{dt}$ nem 4-es vektor

$dt \to ds \Rightarrow \frac{dx^\mu}{ds}$ 4es vektor

$u^\mu := \frac{dx^\mu}{ds}$ világvonal érintője

$ds = c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v_x}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v_y}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v_z}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$

ez dimenziótlan mennyiség

$u_\mu u^\mu = \frac{dx_\mu}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dx_\mu dx^\mu}{ds^2} = 1$

## Négyes gyorsulás:

$a^\mu = \frac{d^2x^\mu}{ds^2} = \frac{du^\mu}{ds}$ ez is dimenziótlan

érdekesség: $u_\mu u^\mu = 1 \quad | \frac{d}{ds}$

$$a_\mu u^\mu + u_\mu a^\mu = 0$$

$$2a_\mu u^\mu = 0$$ $a_\mu$ és $u^\mu$ ortogonálisak

## Egyenletesen gyorsuló mozgás

def: a sajátrendszerben legyen konstans $(a)$ a gyorsulás négyesgyorsulás ($x$ tengely irányú mozgás)

saját rsz-ben $ds = c\,dt$

$$a_0 = \frac{1}{c^2}\frac{d^2t}{ds^2} = 0$$

$$a_1 = \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{c^2}a$$

$$a_\mu = \left(0, \frac{a}{c^2}, 0, 0\right)$$

$\Rightarrow a_\mu a^\mu = $ konstans $= -\frac{a^2}{c^4}$

$a^\mu$ laborrendszerben

$$a^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^{\nu\prime} = \begin{pmatrix} ch\,\chi & sh\,\chi & 0 & 0 \\ sh\,\chi & ch\,\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{c^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a}{c^2}\left(\frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, 0, 0\right)$$

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, 0, 0\right)$$

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{ds} = \frac{du^\mu}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt}$$ → ezeknek meg kell egyezni

$a^1$ komponens: $$\frac{a}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = a$$

RELATIVITÁSELMÉLET 

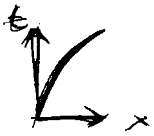
$$\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = at + \cancel{const} \qquad t=0 \quad v=0 \qquad const = 0$$

megoldás $\quad v = \frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}$

$$x = x_0 + \int_0^t v\,dt \overset{H.}{=} x_0 + \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}-1\right) \qquad x_0 \doteq 0$$

átrendezve: $\left(\frac{ax}{c^2}+1\right)^2 = 1+\frac{a^2t^2}{c^2}$ hiperbola

$\sim x^2 - t^2 = const.$ ⇗



sajátidő

$$\tau = \int_0^t dt\,\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \overset{H.}{=} \frac{c}{a}\,\mathrm{arsh}\left(\frac{at}{c}\right)$$

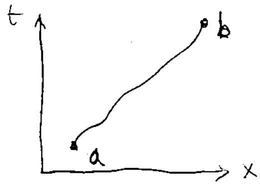
- pl.: $a = g = 10\ \frac{m}{s^2}$ $\qquad x = 100$ fényév $= 9{,}46\cdot 10^{17}$ m

  $t = ?$ $\quad \tau = ?$

  ≈100,95 év ≈5 év

## Relativisztikus mechanika

legkisebb hatás elve



mi a hatás?

szabad részecske, hatás invariáns, legegyszerűbb invariáns az ívhossz $\quad S = -\alpha\int_a^b ds$

ds-nek maximuma van $\quad \Rightarrow \alpha > 0$

Lagrange-fv. $\quad S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$

$$ds = c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad S = -\alpha\int_{t_1}^{t_2} c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$L = -\alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$v \ll c$ határeset $\quad L = -\alpha c\left(1-\frac{v^2}{2c^2}+\mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right)\right) =$

$$= -\alpha c + \frac{\alpha}{2c}v^2 + \mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^3}\right) =$$

$$= const + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2c} = \frac{m}{2} \qquad \alpha = mc\ !$$

$$\boxed{S = -mc\int ds} \qquad \boxed{L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$S = -mc \int ds$

$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{m v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ha $v \ll c$ $p_i = m v_i$

mi a helyzet $F = ma$ -val?

nézzük $p_i$ időderiváltját

a) $|v| =$ áll.
$\frac{dp_i}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{dv_i}{dt}$

b) $\underline{v}$ iránya állandó
$\frac{dp_i}{dt} = m \frac{d}{dt} \frac{v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv_i}{dt}$

a két együttható különböző $\Rightarrow$ $m$ jelentése kérdéses

ami mindig igaz: $\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt} \neq m\underline{a}$

Energia:

$E = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \underline{p}\underline{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mv^2 + mc^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} =$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ szabad esetben

$v = 0 \Rightarrow E_0 = mc^2$ a nyugalmi energia

$E$, $\underline{p}$ megmaradó mennyiséget

összetett rendszerben $mc^2 \neq \sum_i m_i c^2$

$mc^2 = \sum_i m_i c^2 + \sum_{ij} V_{ij}$ $\rightarrow$ kölcsönhatások

$\Rightarrow$ tömeg nem marad meg!

Hamilton-fv.:

$H(q_i, p_i) = \underline{p}\underline{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ ha $v \ll c$ $p \ll mc$

$= mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} \approx mc^2\left(1 + \frac{p^2}{2m^2c^2}\right) =$

$= mc^2 + \frac{p^2}{2m}$

Szabad részecskére: $\underline{p} = \frac{m\underline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

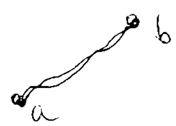
$\Rightarrow \underline{p} = \frac{E\underline{v}}{c^2}$ $v \to c$ $p$ és $E \to \infty$

ha egyúttal $m \to 0$ $p$ és $E$ is $\frac{0}{0}$ alakú lesz

$m = 0$ $v = c$ esetben $E$ és $p$ nem egyértelmű, de $|p| = \frac{E}{c}$

Négyesimpulzus

hatás variációja



$\delta S = -mc\, \delta \int_a^b ds$

$ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu}$

$\delta ds = \frac{dx_\mu \delta dx^\mu}{ds}$

RELATIVITÁSELMÉLET

$$\delta S = -mc \int_a^b \frac{dx_\mu \delta dx^\mu}{ds} = -mc \int_a^b u_\mu \delta dx^\mu =$$

$$= -mc u_\mu \delta x^\mu \Big|_a^b + mc \int_a^b \delta x^\mu \frac{du_\mu}{ds} ds$$

mozgásegyenletet: $\delta x^\mu_a = \delta x^\mu_b = 0$ és $\delta S = 0$

$\Rightarrow \int_a^b \delta x^\mu \frac{du_\mu}{ds} ds = 0 \quad \forall \, \delta x^\mu \quad \Rightarrow \frac{du_\mu}{ds} = 0 \quad \Rightarrow u_\mu$ konst.

határok változtatása: $\delta x^\mu_a = 0 \quad \delta x^\mu_b = \delta x^\mu$ és

mozgásegyenlet teljesül

$$\Rightarrow \delta S = -mc u_\mu \delta x^\mu$$

El. m. $\begin{cases} \delta S = -E\delta t & \text{ha az időt változtatjuk} \\ \delta S = p_i \delta x_i & \text{ha a helyet változtatjuk} \end{cases}$ a végpontban

$\hookrightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = -E \quad \frac{\partial S}{\partial x_i} = p_i$

Def: $p^\mu = -\partial^\mu S = -\frac{\partial S}{\partial x_\mu} \longrightarrow$ négyesimpulzus

szabad esetben $\quad p^\mu = mc u^\mu$

$p^\mu$: négyesvektor $\rightarrow$ komponensei $\left(\frac{E}{c}, \underline{p}\right)$

$p^\mu$ megmaradó mennyiség

transzformációja $\quad p^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^{\nu\prime}$

x irányú mozgásra $\quad p_x = \frac{p_x' + \frac{v}{c^2}E'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad p_y = p_y' \quad p_z = p_z' \quad E = \frac{E' + v p_x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

szabad 4-es impulzus $\quad p^\mu = mc u^\mu = \left( \underbrace{\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{\frac{E}{c}}, \underbrace{\frac{m\underline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{\underline{p}} \right)$

$u_\mu u^\mu = 1 \Rightarrow p_\mu p^\mu = m^2c^2$

$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$ tömeghéjfeltétel

Erő négyesvektora: $\quad \underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt}$

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{ds} \left(= mc \frac{du^\mu}{ds}\right)$$

erő komponensei $\quad F^\mu = \left( \frac{\underline{F}\,\underline{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\underline{F}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$

a 0. komponens az erő által végzett munkával kapcsolatos

Részecskék bomlása $\boxed{c=1}$ innentől kezdve

Tekintsük egy M tömegű részecske bomlását $m_1, m_2$ tömegekre az M nyugalmi rendszerében

Energiamegmaradás:

$$M = E_1 + E_2 \geq m_1 + m_2$$

bomlás feltétele $M > m_1 + m_2$

ha nem teljesül, akkor $\underset{\min}{\vee}$ $m_1 + m_2 - M$ energiát be kell tennünk a rendszerbe

Impulzusmegmaradás:

$$0 = \underline{p}_1 + \underline{p}_2 \qquad p_1^2 = p_2^2$$

$E_1^2 - p_1^2 = m_1^2 \qquad E_2^2 - p_2^2 = m_2^2$ mindkettőnek tömeghéjon kell legyen

$$E_1^2 - m_1^2 = E_2^2 - m_2^2$$

$$\left.\begin{array}{l} E_1^2 - E_2^2 = m_1^2 - m_2^2 \\ E_1 + E_2 = M \\ \hline E_1 - E_2 = \dfrac{m_1^2 - m_2^2}{M} \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} E_1 = \dfrac{m_1^2 - m_2^2 + M^2}{2M} \\ E_2 = \dfrac{m_2^2 - m_1^2 + M^2}{2M} \end{array}\right]$$

Ugyanez fordítva: $\xrightarrow{m_1} \xleftarrow{m_2} \Rightarrow \cdot M$

$m_1$ és $m_2$ ütközéséből keletkezik M tömegű részecske

Tömegközépponti rendszer: az a rendszer, ahol $\Sigma \underline{p} = 0$, vagyis ahol a teljes négyesimpulzus $p^\mu = (E, 0) = (M, 0)$

$E_1, E_2 \to M = ?$

$p_\mu p^\mu = M^2 \qquad (E_1, \underline{p}_1), (E_2, \underline{p}_2) \qquad p_1^2 = E_1^2 - m_1^2 \to |p_1|$

$p^\mu = (E_1 + E_2, \underline{p}_1 + \underline{p}_2) \qquad p_2^2 = E_2^2 - m_2^2 \to |p_2|$

Egyszerű esetek:

1) $m_1 \longrightarrow \qquad \cdot\, p_2 = 0 \qquad \to x$

$E_1 \qquad E_2 = m_2$

$$p^\mu = \left(E_1 + m_2, \sqrt{E_1^2 - m_1^2}, 0, 0\right)$$

$$p_\mu p^\mu = M^2 = (E_1 + m_2)^2 - (E_1^2 - m_1^2) = \cancel{E_1^2} + 2E_1 m_2 + m_2^2 - \cancel{E_1^2} + m_1^2 = \underline{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2}$$

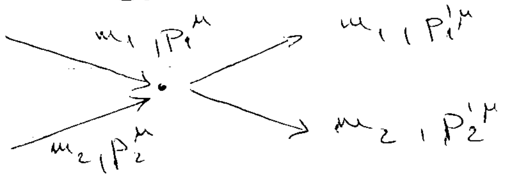
2) $m_1 = m_2 = m \quad E_1 = E_2 = E \quad \underline{p}_1 = -\underline{p}_2 \qquad \longrightarrow\!\!\longleftarrow$

$$p^\mu = (2E, 0, 0, 0) \qquad M = 2E$$

(c=1)

## Rugalmas szórás

= részecskék száma és típusa nem változik




$$p_\mu p^\mu = m^2$$

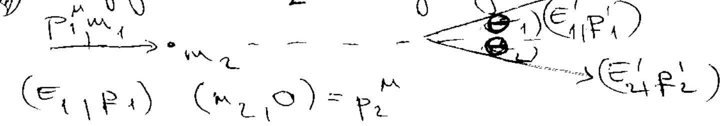
$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu$$

$$p_1^\mu + p_2^\mu - p_1'^\mu = p_2'^\mu \qquad (\ )^2$$

$$2m_1^2 + m_2^2 + 2\left(p_1^\mu p_{2\mu} - p_1^\mu p'_{2\mu} - p_2^\mu p'_{1\mu}\right) = m_2^2$$

$$\left[\begin{array}{l} m_1^2 + p_1^\mu p_{2\mu} - p_1^\mu p'_{1\mu} - p_2^\mu p'_{1\mu} = 0 \\ m_2^2 + p_2^\mu p_{1\mu} - p_2^\mu p'_{2\mu} - p_1^\mu p'_{2\mu} = 0 \end{array}\right]$$ ezek az általánosa

Legyen $m_2$ nyugalomban!




$(E_1, p_1)$ $\quad (m_2, 0) = p_2^\mu$

$$\left.\begin{array}{l} p_1^\mu p_{2\mu} = E_1 m_2 \\ p_1^\mu p'_{1\mu} = E_1 E'_1 - p_1 p'_1 \cos\theta_1 \\ p_2^\mu p'_{1\mu} = m_2 E'_1 \end{array}\right\} \qquad \cos\theta_1 = \frac{E'_1(E_1+m_2) - E_1 m_2 - m_1^2}{p_1 p'_1}$$

~~tömeghéjfeltételek~~:

$$\ldots \qquad \cos\theta_2 = \frac{(E_1+m_2)(E'_2 - m_2)}{p_1 p'_2}$$

$$p_1 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2} \qquad p'_1 = \sqrt{E_1'^2 - m_1^2} \qquad p'_2 = \sqrt{E_2'^2 - m_2^2}$$

$$\Rightarrow \quad E'_2 = m_2 \frac{(E_1+m_2)^2 + (E_1^2 - m_1^2)\cos^2\theta_2}{(E_1+m_2)^2 - (E_1^2 - m_1^2)\cos^2\theta_2}$$

$m_1 = 0$ határeset (Compton-szórás)

$$E_1 = p_1, \quad E'_1 = p'_1$$

$$\cos\theta_1 = \frac{E'_1(E_1+m_2) - E_1 m_2}{E_1 E'_1}$$

$$E_1 E'_1(\cos\theta_1 - 1) - E'_1 m_2 = -E_1 m_2$$

$$E'_1 = \frac{E_1}{\frac{E_1}{m_2}(1 - \cos\theta_1) + 1}$$

Tkp. rendszerben


$$\varepsilon_1^2 - \xi^2 = \varepsilon_1'^2 - \xi'^2 \quad (= m_1^2)$$

$$\varepsilon_2^2 - \xi^2 = \varepsilon_2'^2 - \xi'^2 \quad (= m_2^2)$$

# RELATIVITÁSELMÉLET

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 &= \varepsilon_1'^2 - \varepsilon_2'^2 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= \varepsilon_1' + \varepsilon_2'\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_1' \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_2'\end{aligned} \qquad |\underline{k}| = |\underline{k}'|$$

$$p_1^\mu p'_{1\mu} = \varepsilon_1\varepsilon_1' - \underline{k}\,\underline{k}' = \varepsilon_1\varepsilon_1' - k^2\cos\chi$$

ok: $p_1^\mu p_{2\mu} = E_1 m_2$

$p_2^\mu p'_{1\mu} = m_2 E_1'$

$$m_1^2 + E_1 m_2 - m_2 E_1' \underbrace{- \varepsilon_1\varepsilon_1' + k^2\cos\chi} = 0$$

$$-\varepsilon_1^2 + k^2\cos\chi = $$

$$= \underbrace{-\varepsilon_1^2 + k^2}_{-m_1^2} + k^2(\cos\chi - 1)$$

$$\cancel{m_1^2} + E_1 m_2 - m_2 E_1' - \cancel{m_1^2} - k^2(1-\cos\chi) = 0$$

$$E_1' - E_1 = -\frac{k^2}{m_2}(1-\cos\chi)$$

$k$-t kifejezzük $E, p$-vel

$$p_1^\mu p_{2\mu} = E_1 m_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + k^2$$

$$\varepsilon_1 = \sqrt{m_1^2 + k^2} \qquad \Rightarrow k^2 = \frac{m_2^2(E_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_1}$$

$$\varepsilon_2 = \sqrt{m_2^2 + k^2}$$

$$E_1' = E_1 - \frac{m_2(E_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_1}(1-\cos\chi)$$

$$\underset{\text{energiamegmaradás}}{E_1 + m_2 = E_1' + E_2'} \qquad E_2' = m_2 + \frac{m_2(E_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_1}(-\cos\chi + 1)$$

energiaátadás : $\dfrac{m_2(E_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_1}(1-\cos\chi) = \Delta E$

$\Delta E_{max} = 2\cdot$ $\qquad \chi = \pi \rightarrow$ visszaszórás

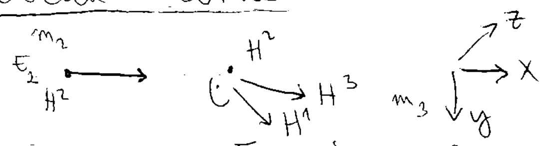
Ha $m_1 \ll m_2$ $\qquad \dfrac{\Delta E_{max}}{E_1} \approx \dfrac{2m_2E_1}{m_2^2 + 2m_2E_1}$

Ha $E_1 \gg m_2$ $\qquad \Delta E_{max}/E_1 \rightarrow 1$

Egy nagyon kicsi tömegű részecske, ha nagyon nagy energiával jön, akkor majdnem az egész energiáját át tudja adni

## Rugalmatlan szórás

kísérlet




$H^2 + H^2 \rightarrow H^1 + H^3$

$E_1, m_1 \rightarrow$ csak ezt detektáljuk

$m_3 = ?$ $H^3$ detektálás nélkül

négyesimpulzus megmaradás + tömeghéjfeltétel

Energiamegmaradás $m_2 + E_2 = E_1 + E_2$

impulzusmegmaradás (x) $p_2 = 0 + p_3^x$ $p_2 = p_3^x$

(y) $0 = p_1 + p_3^y$ $p_3^y = -p_1$

(z) $0 = 0 + p_3^z$ $p_3^z = 0$

tömeghéjfeltétel

$$E_2^2 - p_2^2 = m_2^2$$
$$E_1^2 - p_1^2 = m_1^2$$
$$E_3^2 - p_3^{x2} - p_3^{y2} - p_3^{z2} = m_3^2$$

$$m_3^2 = (m_2 + E_2 - E_1)^2 - p_2^2 - p_1^2 = m_2^2 + m_2^2 + m_1^2 + 2m_2E_2 - 2m_2E_1 - 2E_2E_1 =$$
$$= m_1^2 + 2(m_2 + E_2)(m_2 - E_1) = m_1^2 + 2(2m_2 + T_2)(m_2 - m_1 - T_1)$$

<u>Impulzusmomentum</u>

klasszikusan $J = \sum_i r_i \times p_i$

⇒ hatás megváltozása forgatás esetén

legyen $x^\mu$ 1 db részecske négyeskoordinátája

infinitezimális 4D forgatás (forgatás v. Lorentz-trf.)

$x^{\mu\prime} - x^\mu$ lineáris fv.-e az $x^\mu$-nek

$$x^{\mu\prime} - x^\mu = \delta\Omega^{\mu\nu} x_\nu$$

$\delta\Omega^{\mu\nu}$ antiszimmetrikus ívhossz invarianciája miatt

$$x^{\mu\prime} x_\mu^\prime = x^\mu x_\mu$$
$$(x^\mu + \delta\Omega^{\mu\nu} x_\nu)(x_\mu + \delta\Omega_{\mu\nu} x^\nu) = x^\mu x_\mu$$
$$\delta\Omega^{\mu\nu} x_\nu x_\mu + \delta\Omega_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = 0$$
$$x_\mu x_\nu \delta\Omega^{\mu\nu} = 0 \quad \forall\, x_\mu, x_\nu\text{-re} \quad \Rightarrow \delta\Omega \text{ antiszimm.}$$
$$\delta\Omega^{\mu\nu} = -\delta\Omega^{\nu\mu}$$

Hatás megváltozása: $\delta S = -\sum_i p_i^\mu \delta x_\mu = -\sum_i p_i^\mu \delta\Omega_{\mu\nu} x_i^\nu$

$$= -\delta\Omega_{\mu\nu} \sum_i p_i^\mu x_i^\nu = -\delta\Omega_{\mu\nu} \frac{1}{2} \sum_i (p_i^\mu x^\nu - p_i^\nu x_i^\mu)$$

Impulzusmomentum: $\frac{\delta S}{\delta\Omega_{\mu\nu}}$

Def: $J^{\mu\nu} = \sum_i (x_i^\mu p^\nu - x_i^\nu p_i^\mu)$

$J^{\mu\nu}$ megmaradó mennyiség → összes komponens megmarad

Elemei

$$J^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & J^{01} & J^{02} & J^{03} \\ -J^{01} & 0 & -J_z & J_y \\ -J^{02} & J_z & 0 & -J_x \\ -J^{03} & -J_y & J^x & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^{12} = x^1 p^2 - x^2 p^1 = x p_y - y p_x = J_z$$

$\underline{J}$ 3D imp. mom.

mi a másik 3? (most $c \neq 1$)

$$\underline{I} = \sum_i t p_i - \frac{E_i \underline{r}_i}{c^2} \qquad \sum_i E_i = \text{konst}$$

$$\frac{\underline{I}}{\sum_i E_i} = \text{konst} = t \frac{\sum_i p_i}{\sum_i E_i} - \frac{1}{c^2} \frac{\sum_i E_i \underline{r}_i}{\sum_i E_i}$$

$$c^2 t \frac{\sum_i p_i}{\sum_i E_i} - \frac{\sum_i E_i \underline{r}_i}{\sum_i E_i} = \text{konst.}$$

$$t\underline{V} - \underline{R} = \text{konst.} = -\underline{R}_0$$

$\underline{R}$ helyvektorú pont állandó $\underline{V}$ sebességgel mozog

$\underline{R} = \underline{R}_0 + \underline{V} t$

$\underline{R}$ relativisztikus tömegközéppont definíciója

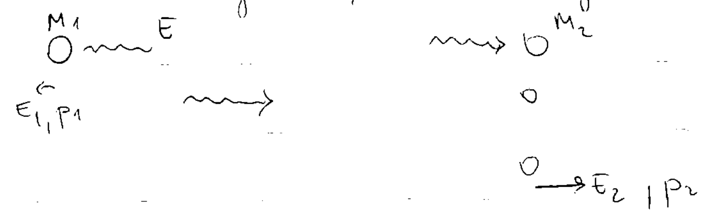
$$\underline{R}_{tkp} = \frac{\sum_i E_i \underline{r}_i}{\sum_i E_i}$$

fontos $\underline{R}$ nem egy négyesvektor hármas része → tkp nem invariáns

0 tömegű részecskék (fotonok) ($c=1$)

$E = |p|$

foton nyugalmi tömege 0, de energiát (így tömeget) szállít




Kibocsátás

$E$ megmaradás $\quad M_1 = E_1 + E$

Imp. -"- $\quad 0 = p_1 - E$

$$M_1'^2 = E_1^2 - p_1^2 = (M_1 - E)^2 - E^2 = M_1^2 - 2M_1 E < M_1^2$$

elvitt tömeget a foton

elnyelés $M_2'^2 > M_2^2$ HF!

Planck hipotézis kovariáns egyenlet-e?

$E = h\nu$ ?

Legyen $K, K' \xrightarrow{v}$ x tengely mentén

foton: $E = |p|$, x tengely mentén terjed

$p^\mu = (E, E, 0, 0)$ $\quad p^{\mu'} = (E', E', 0, 0)$

$p^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, p^{\nu'}$

$E = E' \operatorname{ch}\chi + E' \operatorname{sh}\chi = E' e^\chi$

$\Box \phi = 0 \qquad \phi \sim e^{i k^\mu x_\mu} = e^{i(\omega t - \underline{k}\underline{x})} \qquad k^\mu = (\omega, \underline{k})$

$\Downarrow$

$k^\mu k_\mu = 0$

x tengely mentén terjedő hullám: $k^\mu = (\omega, k, 0, 0)$

$k^\mu k_\mu = 0 \Rightarrow \omega = |k| \Rightarrow k^\mu = (\omega, \omega, 0, 0)$

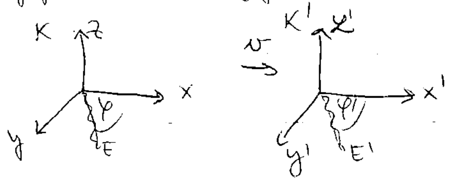
$k^\mu$ transzformációja: $k^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu k^{\nu'}$

$\omega = \omega' \operatorname{ch}\chi + \omega' \operatorname{sh}\chi = \omega' e^\chi \Rightarrow \nu = \nu' e^\chi$

$E$ és $\nu$ azonosan transzformálódik

$\frac{E}{\nu} = h$ skalár

Doppler-effektus:




K-ban $p^\mu = (E, p\cos\varphi, p\sin\varphi, 0)$ $(E=p$

$p^{\mu'} = (E', p'\cos\varphi', p'\sin\varphi', 0)$ $(E'=p$

Lorentz-trafó: $E = E' \operatorname{ch}\chi + p' \cos\varphi' \operatorname{sh}\chi$

$p\cos\varphi = E' \operatorname{sh}\chi + p' \cos\varphi' \operatorname{ch}\chi$

$p\sin\varphi = p' \sin\varphi'$

$E$ transzformációja: $E = E'(\operatorname{ch}\chi + \cos\varphi' \operatorname{sh}\chi) = E' \operatorname{ch}\chi (1 + \cos\varphi' \operatorname{th}\chi$

$= E' \operatorname{ch}\chi \left(1 + \frac{v}{c}\cos\varphi'\right)$

$$E = \frac{1 + \frac{v}{c}\cos\varphi'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} E'$$

ugyanez $\nu$-re $\nu'$-re

$E\cos\varphi = E' \operatorname{ch}\chi (\operatorname{th}\chi + \cos\varphi')$

$$E\cos\varphi = \frac{E}{1 + \cos\varphi' \operatorname{th}\chi} (\operatorname{th}\chi + \cos\varphi')$$

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{th}\chi + \cos\varphi'}{1 + \operatorname{th}\chi \cos\varphi'} = \frac{\frac{v}{c} + \cos\varphi'}{1 + \frac{v}{c}\cos\varphi'}$$

## Eloszlásfv-ek transzformációja:

részecskenyaláb impulzuseloszlása

$f(\mathbf{p})\, d^3p$ db részecske van $[\mathbf{p}, \mathbf{p}+d\mathbf{p}]$ tartományban

hogyan transzformálódik $f$ ill. $d^3p$ ?

$dN = f\, d^3p$ invariáns

→ $d^4p$ invariáns : $\int d^4p\, g(p) = \int d^4p' \underbrace{\det\Lambda}_{1}\, g(p')$

$$d^4p = d^4p'$$

→ integráljunk csak azokra az impulzusokra, melyekre

$p^2 = m^2$ és $p_0 = E > 0$


$d^4p\,\delta(p^2-m^2)\,\Theta(p_0)$ ez is invariáns

$\delta(p^2-m^2) = \delta(p_0^2-\mathbf{p}^2-m^2) = \delta(g(p_0))$ $\qquad g(p_0) = p_0^2-\mathbf{p}^2-m^2$

$\delta(p_0)\, d^4p = d^3p$ -t szeretnénk

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x_i}} \quad \text{ahol } g(x_i)=0$$

$p_0^2 = \mathbf{p}^2+m^2 \qquad p_0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2} \qquad \left|\frac{\partial g}{\partial p_0}\right| = |2p_0| = 2E$

$\delta(p^2-m^2) = \frac{\delta(p_0+E)}{2E} + \frac{\delta(p_0-E)}{2E} \qquad E = +\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$

$d^4p\,\delta(p^2-m^2)\Theta(p_0) = d^4p\left(\frac{\delta(p_0+E)}{2E}+\frac{\delta(p_0-E)}{2E}\right)\Theta(p_0)$ → $p_0$ csak pozitív lehet, $\delta(p_0+E)$ nem ad járulékot

$= d^4p\, \frac{\delta(p_0-E)}{2E} \Rightarrow \frac{d^3p}{2E}$ lesz az invariáns mérték

$$\frac{d^3p}{E} = \frac{d^3p'}{E'}$$

$$f'(\mathbf{p}') = f(\mathbf{p})\frac{E}{E'}$$

### fázistér eloszlás

$dN = f(\mathbf{r},\mathbf{p})\, dV\, d^3p \qquad [\mathbf{r}, \mathbf{r}+d^3\mathbf{r}]$ és $[\mathbf{p}, \mathbf{p}+d^3\mathbf{p}]$

$f$ hogyan transzformálódik ?

$d\tau = dV\, d^3p$ — " — ?

legyen a $\mathbf{p}, \mathbf{p}+d\mathbf{p}$ -be eső m tömegű részecskék

sebessége a K ill. K' rendszerben v ill. v' $\qquad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$E = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad E' = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} \qquad \mathbf{p}' = \frac{m\mathbf{v}'}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}$

$$\frac{d^3p}{E} = \frac{d^3p'}{E} \Rightarrow \left[ d^3p\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = d^3p'\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}} \right.$$

$K_0$ a nyugalmi rendszer, ahol nem mozog a részecske:

Lorentz-kontrakció alapján:

$$dV = dV_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad dV' = dV_0\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}$$

$$\left[ \frac{dV}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dV'}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} \right.$$

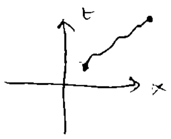
$$d\tau = dV\,d^3p = dV'd^3p' = d\tau' \text{ invariáns} \Rightarrow f(\underline{r},\underline{p}) = f'(\underline{r}',\underline{p}')$$

## Elektrodinamika

$S = S_r + S_{re} + S_e$ kölcsönhatás $\boxed{c=1}$

$S_r$: részecske, $S_e$: erőtér hatás

$S_r = -m\int ds \qquad S_{re} = ?$



<u>skalár tér</u> $\phi(x^\mu)$

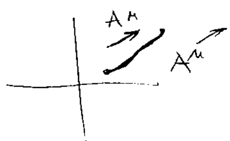
$S_{re} = \alpha\int\phi\, ds$ ilyen klasszikusan nincsen $\phi = \phi_0 + \Delta\phi(x^\mu)$

ha van: $S_{re} = \alpha\int\phi_0\, ds + \alpha\int\Delta\phi\, ds$

$\alpha\phi_0\int ds \rightarrow$ tömeget ad a részecskének

<u>4es vektormező</u>

$$A^\mu = (\phi, \underline{A})$$



$$S_{re} = -Q\int A^\mu dx_\mu$$

konvenció, „töltés”

$$S = S_r + S_{re} = -m\int ds - Q\int A^\mu dx_\mu$$
$$= -m\int ds + Q\int \underline{A}\, d\underline{x} - Q\int\phi\, dt$$
$$= \int L\, dt = \int\left(-m\sqrt{1-v^2} + Q\underline{A}\underline{v} - Q\phi\right) dt$$

$$L = -m\sqrt{1-v^2} + Q\underline{A}\underline{v} - Q\phi$$

Általános (kanonikus) impulzus:

$$\underline{P} = \frac{\partial L}{\partial \underline{v}} = \frac{m\underline{v}}{\sqrt{1-v^2}} + Q\underline{A} = \underline{p}_{szabad} + Q\underline{A}$$

Hamilton-fv.: $H = \underline{v}\frac{\partial L}{\partial \underline{v}} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2}} + Q\underline{A}\underline{v} + m\sqrt{1-v^2} - Q\underline{A}\underline{v} + Q\phi$

$$\mathcal{H} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} + Q\Phi \quad = \text{szabad részecske energiája} + Q\Phi$$

$$(\mathcal{H} - Q\Phi)^2 = \frac{m^2}{1-v^2} = m^2 + \underbrace{\frac{m^2v^2}{1-v^2}}_{(\underline{P}-Q\underline{A})^2} = m^2 + (\underline{P} - Q\underline{A})^2$$

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 + \underbrace{(\underline{P} - Q\underline{A})}_{p_{szabad}}{}^2} + Q\Phi \quad = \text{szabad részecske energiája} + Q\Phi$$

__mozgásegyenletek__

$$\frac{dP_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \qquad \frac{dP_i}{dt} = \frac{dp_{szi}}{dt} + Q\left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = Q\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} v_j - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)$$

$$\frac{dp_{szi}}{dt} = Q\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + Q\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} v_j - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} v_j\right)$$

$$(\partial_i A_j - \partial_j A_i) v_j = \varepsilon_{ijk} v_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m \Rightarrow (\underline{v} \times \mathrm{rot}\,\underline{A})_i$$

$$\frac{d\underline{p}_{sz}}{dt} = Q\Big(\underbrace{-\underline{\nabla}\Phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}}_{\underline{E}} + \underline{v} \times \underbrace{\mathrm{rot}\,\underline{A}}_{\underline{B}}\Big) = Q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$$ Lorentz-erő

mozgásegyenletek 4es formalizmussal

$$S = \int_a^b (-m\,ds - Q A_\mu dx^\mu)$$ a,b-t nem variáljuk

$$\delta S = \delta \int_a^b (-m\,ds - Q A_\mu dx^\mu) =$$ $ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu}$

$$= -\int_a^b m u_\mu \delta dx^\mu + Q A_\mu \delta dx^\mu + Q \delta A_\mu dx^\mu = *$$ $\delta ds = \frac{2\,dx_\mu \delta dx^\mu}{2\sqrt{dx_\mu dx^\mu}} = \frac{dx_\mu}{ds}\delta dx^\mu = u_\mu \delta dx^\mu$ c = 1 esetén

parc. int. $\delta d\ldots = d\delta\ldots$

$$* = -\int m u_\mu d\delta x^\mu + Q A_\mu d\delta x^\mu + Q\delta A_\mu dx^\mu = *$$

$$* = -\underbrace{(m u_\mu \delta x^\mu + Q A_\mu \delta x^\mu)\Big|_a^b}_{\delta x^\mu(a,b) = 0 \Rightarrow 0} + \int m\,du_\mu \delta x^\mu + Q\,dA_\mu \delta x^\mu - \int Q \delta A_\mu dx^\mu$$

$$\delta S = \int m\,\delta x^\mu du_\mu + Q\,\delta x^\mu dA_\mu - Q\,\delta A_\mu dx^\mu$$

$$\delta A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\delta x^\nu \qquad dA_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \qquad du_\mu = \frac{du_\mu}{ds} ds$$

$dx^\mu = u^\mu ds$ helyettesítéssel

$$\delta S = \int\left(m \frac{du_\mu}{ds}\delta x^\mu + Q \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} u^\nu \delta x^\mu - Q \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} u^\mu \delta x^\nu\right) ds =$$

$$= \int\left(m \frac{du_\mu}{ds} + Q \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} u^\nu - Q \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} u^\nu\right) ds\, \delta x^\mu$$

$$\forall\, \delta x^\mu \quad \delta S \overset{!}{=} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad m \frac{du_\mu}{ds} = Q \overbrace{\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\right)}^{F_{\mu\nu}} u^\nu$$ térerősségtenzor

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$ térerősségtenzor

antiszimmetrikus tenzor

mozgásegyenlet: $$m\frac{du_\mu}{ds} = QF_{\mu\nu}u^\nu$$

$$m a_\mu = QF_{\mu\nu}u^\nu$$

4es Lorentz-erő $f_{\mu L} = QF_{\mu\nu}u^\nu$

$F_{\mu\nu}$ komponensei $\qquad A^\mu = (\phi, \underline{A}) \qquad A_\mu = (\phi, -\underline{A})$

$F_{00} = 0 \qquad F_{0i} = \frac{\partial}{\partial t}(-A_i) - \frac{\partial A_0}{\partial x_i} = -\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = E_i$

$F_{ii} = 0 \qquad F_{i0} = -E_i$

$F_{ij}$ pl. $F_{12} = \frac{\partial(-A_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial(-A_1)}{\partial x^2} = \frac{\partial A_1}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1} = -(\text{rot}\,\underline{A})_3 = -B_3$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{E}$ vektor

$\underline{B}$ axiálvektor

ha a határokat változtatjuk és csak a megvalósuló pályákat nézzük $\Rightarrow$

<u>Általános 4es impulzus</u>

$$\delta S = -(mu_\mu + QA_\mu)\,\delta x^\mu$$

$$P_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu} = mu_\mu + QA_\mu$$

$\underline{E}$ és $\underline{B}$ Lorentz-transzformációs szabályai

$$F_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma F'_{\rho\sigma} = (\Lambda F' \Lambda^T)_{\mu\nu}$$

$$\Lambda_\mu{}^\rho = \begin{pmatrix} \text{ch}\,\chi & -\text{sh}\,\chi & 0 & 0 \\ -\text{sh}\,\chi & \text{ch}\,\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}\,\chi & -\text{sh}\,\chi & 0 & 0 \\ -\text{sh}\,\chi & \text{ch}\,\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E'_x & E'_y & E'_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch}\,\chi & -\text{sh}\,\chi & 0 & 0 \\ -\text{sh}\,\chi & \text{ch}\,\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_x = E'_x \qquad E_y = E'_y\,\text{ch}\,\chi + B'_z\,\text{sh}\,\chi \qquad E_z = E'_z\,\text{ch}\,\chi - B'_y\,\text{sh}\,\chi$

$B_x = B'_x \qquad B_y = B'_y\,\text{ch}\,\chi - E'_z\,\text{sh}\,\chi \qquad B_z = B'_z\,\text{ch}\,\chi + E'_y\,\text{sh}\,\chi$

ha $\frac{v}{c} \ll 1$ $ch\,x \simeq 1$ $sh \approx \frac{v}{c}$ • (c = 1 v. nem) ☺

$E_x = E'_x$ $E_y = E'_y + B'_z v$ $E_z = E'_z - B'_y v$

$B_x = B'_x$ $B_y = B'_y$ $B_z = B'_z$

<u>térerősségek invariánsai:</u>

$F_{\mu\nu}$ 4-es tenzor $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ = inv. skalár

$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \cdot F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$ = inv. pszeudoskalár

HF: $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(\underline{B}^2 - \underline{E}^2)$

$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} = -8(\underline{E}\underline{B})$

- ha egy rendszerben $\underline{E} \perp \underline{B}$ $\Rightarrow$ $\forall$ rendszerben $\underline{E}' \perp \underline{B}'$
- ha egy rendszerben $|\underline{E}| = |\underline{B}|$ $\Rightarrow$ $\forall$ rendszerben $|\underline{E}'| = |\underline{B}'|$
- ha legalább az egyik inv $\neq 0$ $\Rightarrow$ $\exists$ olyan koordinátarendsz. ahol $\underline{E}' \parallel \underline{B}'$
- ha $\underline{E}\underline{B} = 0$ $\Rightarrow$ $\exists$ olyan rendszer $E' = 0$ vagy $B' = 0$ ($\underline{B}^2 - \underline{E}^2$ előjelétől függően)

## Az elektromágneses tér egyenletei

Maxwell-egyenletek (vákuumban)

- ezek vezettek el a relativitáselmélethez
- feltételezzük, hogy „helyesek", van kovariáns alakjuk

1) $\mathrm{rot}\,\underline{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$ 2) $\mathrm{div}\,\underline{B} = 0$ $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} = 1$

3) $\mathrm{div}\,\underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$ 4) $\mathrm{rot}\,\underline{B} = \cancel{\mu_0 j} + \cancel{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} j + \frac{\partial E}{\partial t}$

$\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \Rightarrow 1)$ $\underline{B} = \mathrm{rot}\,\underline{A} \Rightarrow 2)$

3), 4) $\Rightarrow$ $\mathrm{div}\,\underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ kontinuitás

írjuk fel 1)-4) egyenleteket $F_{\mu\nu}$-vel

3) $\sum_i \frac{\partial E_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \partial_i F_{0i} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ $F_{00} = 0$ $\partial^\mu = (\partial_t, -\partial_i)$

$$\partial^\mu F_{0\mu} = \underbrace{\partial_t F_{00}}_{0} - \sum_i \partial_i F_{0i} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

3) $\boxed{\partial^\mu F_{\mu 0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho}$

4) x komponens:

$$(\mathrm{rot}\,B)_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_0} j_x + \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial F_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_3} = \frac{1}{\varepsilon_0} j_1 \; \frac{\partial F_{01}}{\partial x_0}$$

$$\frac{\partial F_{01}}{\partial x_0} - \underbrace{\frac{\partial F_{11}}{\partial x_1}}_{0} - \frac{\partial F_{21}}{\partial x_2} - \frac{\partial F_{31}}{\partial x_3} = -\frac{1}{\varepsilon_0} j_1$$

$$4)\left.\begin{cases}\partial^\mu F_{\mu 1} = -\frac{1}{\varepsilon_0} j_1\\ \partial^\mu F_{\mu 2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} j_2\\ \partial^\mu F_{\mu 3} = -\frac{1}{\varepsilon_0} j_3\end{cases}\right\}$$ vonjuk össze egy egyenletbe

$$\partial^\mu F_{\mu 0} = +\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$$

$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{1}{\varepsilon_0} j_\nu \qquad j_\nu = (\varrho, -\underline{j}) \qquad j^\nu = (\varrho, \underline{j})$ 4es áramsűrűség

3) + 4) $\boxed{\partial F_{\mu\nu} = \frac{1}{\varepsilon_0} j_\nu}$

ebből is ki kell jönnie a kontinuitásnak!

$$\underbrace{\partial^\nu \partial^\mu F_{\mu\nu}}_{0 \text{ szimm. antiszimm} = 0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\partial^\nu j_\nu \qquad \partial^\nu j_\nu = 0 \rightarrow \text{kont. egy.}$$

(konzisztencia felt.)

1) - 2) egyenletet $F_{\mu\nu}$-vel

$\mathrm{div}\,\underline{B} = 0$

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\underline{E} + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0$$

x: $\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$

$$\partial_2 F_{03} + \partial_3 F_{20} + \partial_0 F_{32} = 0$$

y: $\partial_1 F_{03} + \partial_3 F_{10} + \partial_0 F_{31} = 0$

z: $\partial_1 F_{02} + \partial_2 F_{10} + \partial_0 F_{21} = 0$

ha felírjuk felcserélt indexekkel és $\ominus$ jelekkel lehet 1 db egyenletet felírni,

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \qquad \forall\, \alpha \neq \beta \neq \gamma$$

legyen $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} F_{\varrho\sigma}$ ($F$ duálisa)

HF: $\tilde{F}$ komponensei, $\boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0}$ ekvivalens ezzel

$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{1}{\varepsilon_0} j_\nu \qquad \partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0 \qquad \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} F_{\varrho\sigma}$ voltak

T.f.h. $\exists A_\mu$, hogy $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, ami rögtön megoldja a másodikat egyenletet ui:

$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \qquad \alpha \neq \beta \neq \gamma$

$\partial_\alpha(\partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma A_\beta) + \partial_\beta(\partial_\gamma A_\alpha - \partial_\alpha A_\gamma) + \partial_\gamma(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = 0$

$\partial^\mu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \frac{1}{\varepsilon_0} j_\nu$

$\Box A_\nu - \partial_\nu(\partial^\mu A_\mu) = \frac{1}{\varepsilon_0} j_\nu$

$A_\mu$ nem egyértelmű $\rightarrow$ mértékszabadság

$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f \qquad f$ tetszőleges skalárfv.

mértéktranszformáció

$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu A_\nu + \partial_\mu\partial_\nu f - \partial_\nu A_\mu - \partial_\nu\partial_\mu f = F_{\mu\nu}$

Legyen $A'_\mu$ olyan, hogy $\partial^\mu A'_\mu = 0$ Lorentz-mérték

Kérdés létezik-e olyan $f$, hogy $\partial^\mu A'_\mu = 0$

$\partial^\mu(A_\mu + \partial_\mu f) = 0$

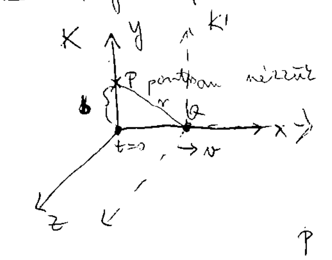
$\Box f = -\partial^\mu A_\mu \quad \rightarrow \exists!$ m.o. (pl. Green-fv. módszer)

Maxwell-egyenletek Lorentz mértékben:

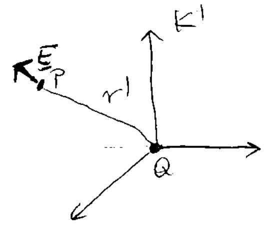
$\Box A_\nu = \frac{1}{\varepsilon_0} j_\nu \rightarrow$ komponensenként megoldható és a megoldás tényleg tudja a Lorentz-feltételt

$\Rightarrow \exists!$ Maxwell-egyenleteknek is megoldása

Mozgó ponttöltés em tere:




$r^2 = b^2 + (vt)^2$




P koordinátái

$K \begin{pmatrix} t \\ x=0 \\ y=b \\ z=0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Lambda} K' \qquad \left( \begin{array}{l} t' = t\,\mathrm{ch}\chi - x\,\mathrm{sh}\chi = t\,\mathrm{ch}\chi \\ x' = -t\,\mathrm{sh}\chi + x\,\mathrm{ch}\chi = -t\,\mathrm{sh}\chi \\ y' = y = b \\ z' = z = 0 \end{array} \right)$

K'-ben statikus tér $\quad |E'| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'^2}$

$r'^2 = x'^2 + y'^2 = b^2 + t^2\,\mathrm{ch}^2\chi$

$E'_x = \frac{x'}{r'}|E'|$ $\quad E'_y = \frac{y'}{r'}|E'| = \quad E'_z = 0 \quad \underline{B}' = 0$

$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x'}{r'^3} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{t\,\mathrm{sh}\,\chi}{(b^2+t^2\mathrm{sh}^2\chi)^{3/2}} \quad \overset{b}{=} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b}{(b^2+t^2\mathrm{sh}^2\chi)^{3/2}}$

visszatranszformáljuk K rendszerbe

$$E_x = E'_x = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{t\,\mathrm{sh}\,\chi}{(b^2+t^2\mathrm{sh}^2\chi)^{3/2}} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{t\,v/\sqrt{1-v^2}}{(b^2+t^2v^2/(1-v^2))^{3/2}}$$

$$E_y = E'_y\,\mathrm{ch}\,\chi + B'_z\,\mathrm{sh}\,\chi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b\,\mathrm{ch}\,\chi}{(b^2+t^2\mathrm{sh}^2\chi)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b/\sqrt{1-v^2}}{(b^2+t^2v^2/(1-v^2))^{3/2}}$$

$$E_z = E'_z\,\mathrm{ch}\,\chi - B'_y\,\mathrm{sh}\,\chi = 0$$

$$B_x = 0$$

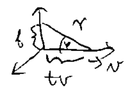
$$B_y = 0$$

$$B_z = B'_z\,\mathrm{ch}\,\chi + E'_y\,\mathrm{sh}\,\chi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b\,\mathrm{sh}\,\chi}{(b^2+t^2\mathrm{sh}^2\chi)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{bv/\sqrt{1-v^2}}{(b^2+t^2v^2/(1-v^2))^{3/2}}$$

határesetben: $v \ll 1$

$\underline{B}$ $\quad r = r' \quad B_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{bv}{r^3}$ $\quad$ c-t visszaírva $B_z = \frac{Q}{4\pi}\mu_0\frac{bv}{r^3}$

$bv = |(\underline{v}\times\underline{r})|_z = vr\sin\varphi$



$\underline{B} = \frac{Q}{4\pi}\mu_0\frac{\underline{v}\times\underline{r}}{r^3}$

K-ban $\frac{E_x}{E_y} = -\frac{t}{b}\,\mathrm{th}\,\chi = -\frac{t}{b}v$

$\Rightarrow \underline{E} \parallel \underline{r}$ $\quad$ b és tv aránya ($\underline{r}$ komponensei), de nem izotróp

HF: $b = r\sin\varphi$ $\quad tv = r\cos\varphi$ behelyettesítéssel kiderül, hogy $|E|$ függ $\varphi$-től

$\Rightarrow$ anizotrópia meghatározható

HF, 2. m.o. erre a problémára: $\quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, $F_{\mu\nu}$ 2 mennyiségtől függhet

$x_i^\mu = x_p^\mu - x_q^\mu$ $\quad u^\mu \rightarrow$ töltés négyessebessége $\quad F_{\mu\nu} = (x_\mu u_\nu - x_\nu u_\mu)\underset{\text{skalár}}{f}(x_\mu u^\mu, x_\mu x^\mu, \cancel{u_\mu u^\mu})$

f-t kell meghatározni K'-ben

## Klasszikus térelmélet

$x(t) \rightarrow \phi_r(x, t)$

$S = \int L\,dt \quad \rightarrow \quad S = \int d^4x\,\mathcal{L}$ $\qquad \mathcal{L}$: Lagrange-sűrűség

$L = \int d^3x\,\mathcal{L}$ $\qquad \mathcal{L}$ legyen skalár mennyiség $\Rightarrow$ S invariáns

feltesszük $\mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu\phi_r, \cancel{\ldots}, \cancel{x_\mu})$ eltolási szimmetria térben, időben

magasabb deriváltaktól nem függ

$$S = \int d^4x\,\mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu\phi_r)$$

mozgásegyenletek: $\quad \delta S \overset{!}{=} 0$

tfh. $\Phi_\varepsilon, \partial_\mu \Phi_\varepsilon \to 0$ végtelenben

$$\delta S = \int d^4x \left( \sum_\varepsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\varepsilon} \delta \Phi_\varepsilon + \sum_\varepsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_\varepsilon)} \delta(\partial_\mu \Phi_\varepsilon) \right)$$

$$\int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_\varepsilon)} \delta(\partial_\mu \Phi_\varepsilon) = \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_\varepsilon)} \partial_\mu(\delta \Phi_\varepsilon) =$$

$$= \underbrace{\int d^4x\, \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_\varepsilon)} \delta \Phi_\varepsilon \right]}_{\text{teljes divergencia}} - \int d^4x\, \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_\varepsilon)} \right) \delta \Phi_\varepsilon =$$

teljes divergencia
→ felületi integrállá alakítható → a végtelenben lecsengő terekre $=0$

$$\delta S = \sum_\varepsilon \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\varepsilon} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_\varepsilon)} \right) \delta \Phi_\varepsilon \qquad \delta S = 0 \quad \forall\, \delta \Phi_\varepsilon \text{-ra}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\varepsilon} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_\varepsilon)}} \qquad \forall\, \varepsilon \text{-ra}$$

Pl: $\mathcal{L} = -\frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ mozgásegyenlete $\qquad \phi(x) \in \mathbb{R}$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi \qquad -m^2\phi = -\partial_\mu \partial^\mu \phi$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = -\partial^\mu \phi \qquad (\Box - m^2)\phi = 0$

$\mathcal{L}$ nem egyértelmű: $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu f^\mu(\Phi_\varepsilon, \partial_\mu \Phi_\varepsilon)$

$\mathcal{L}'$ ugyanazt a hatást adja, ha $\oint f^\mu dF_\mu = 0$

<u>Energia - impulzus tenzor</u>

tömegpontra $\quad p_\varepsilon = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_\varepsilon} \qquad H = \sum_\varepsilon \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}_\varepsilon} \dot{\Phi}_\varepsilon - L \quad$ → ezek helyett akarunk vmi kovariáns átalakítást

pl: $\dot{\phi} \to \partial_\mu \Phi$ → H invariáns lenne, de ez nem jó

**Def**: $T^{\mu\nu} := \sum_\varepsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_\varepsilon)} \partial^\nu \Phi_\varepsilon - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}$ energia-impulzus tenzor

$T^{00} = \sum_\varepsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\Phi}_\varepsilon)} \dot{\Phi}_\varepsilon - \mathcal{L}$ → energiasűrűség

$T^{\mu\nu}$ „megmaradó" mennyiség a mozgásegyenletek megoldására abban az értelemben, hogy $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$
→ kontinuitási egyenlet $\forall\, \nu$ komponensre

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \sum_\varepsilon \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_\varepsilon)} \partial^\nu \Phi_\varepsilon \right) - \partial^\nu \mathcal{L} = \sum_\varepsilon \left( \underbrace{\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_\varepsilon)}}_{\text{mozgásegyenletből } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\varepsilon}} \partial^\nu \Phi_\varepsilon + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_\varepsilon)} \partial_\mu \partial^\nu \Phi_\varepsilon \right) - \partial^\nu \mathcal{L} =$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \sum_\varepsilon \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\varepsilon} \partial^\nu \Phi_\varepsilon + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_\varepsilon)} \partial^\nu \partial_\mu \Phi_\varepsilon \right] - \partial^\nu \mathcal{L} = 0 \qquad :)$$

$$\partial^\nu \mathcal{L} = \sum_\varepsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\varepsilon} \partial^\nu \Phi_\varepsilon + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_\varepsilon)} \partial^\nu(\partial_\mu \Phi_\varepsilon)$$

$\mathcal{L}(\phi_\varepsilon, \partial_\mu \phi_\varepsilon)$

$T^{\mu\nu} = \sum_\varepsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_\varepsilon} \partial^\nu \phi_\varepsilon - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}$

$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$

megmaradás: $0 = \int_{x_0 = konst} \partial_\mu T^{\mu\nu} d^3x = \partial_0 \int_{x_0 = konst} T^{0\nu} d^3x + \underbrace{\int \partial_i T^{i\nu} d^3x}_{\text{3-as divergencia}} =$

$\oint T^{i\nu} dF_i = 0$

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{x_0 = konst} T^{0\nu} d^3x$$

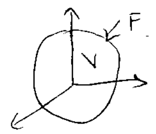
$\int_{x_0 = konst} T^{0\nu} d^3x \Rightarrow konst = p^\nu$

$p^0 = \int T^{00} d^3x = \int \mathcal{H} d^3x \Rightarrow$ teljes energia $\quad p^\nu$ teljes 4es impulzus

$T^{0i}$ : impulzussűrűség

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mathcal{H} & \text{imp. sűrűség} \\ \vdots & \cdots \\ \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Mi a $T^{\mu 0}$ ill. $T^{ij}$ jelentése?




$0 = \int_{x_0 = konst, V} \partial_\mu T^{\mu\nu} d^3x = \frac{d}{dt} \int_{x_0 = konst, V} T^{0\nu} d^3x + \int_V \partial_i T^{i\nu} d^3x =$

$= \frac{d}{dt} \int_V T^{0\nu} d^3x + \oint_{\partial V} T^{i\nu} dF_i$

$\frac{d}{dt} \int_V T^{0\nu} d^3x = - \oint_{\partial V} T^{i\nu} dF_i$

$T^{i\nu}$ : négyesimpulzus áramsűrűség

$T^{i0}$ : energia áramsűrűség $\quad \frac{d}{dt} \int \mathcal{H} d^3x = \oint T^{i0} dF_i$

$T^{ij}$ : impulzus áramsűrűség

Mennyire egyértelmű $T^{\mu\nu}$?

$T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho \Lambda^{\rho\mu\nu}$ ahol $\Lambda^{\rho\mu\nu} = -\Lambda^{\mu\rho\nu}$ $\leftarrow$ $\rho\mu$ indexekben antiszimm.

$\partial_\mu T'^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\rho \Lambda^{\rho\mu\nu} = 0$

eredeti definíció $\quad T^{\mu\nu} \neq T^{\nu\mu}$

elérhető, hogy $\quad T'^{\mu\nu} = T'^{\nu\mu}$

miért kell ez?

impulzusmomentum: $J^{\mu\nu} = \sum_\varepsilon x_\varepsilon^\mu p_\varepsilon^\nu - x_\varepsilon^\nu p_\varepsilon^\mu$ volt

most: $\sum_\varepsilon \to \int d^3x \qquad p_\varepsilon^\mu \to T^{0\mu}$

$J^{\mu\nu} = \int d^3x \underbrace{(x^\mu T^{0\nu} - x^\nu T^{0\mu})}_{}$

ez egy $M^{\alpha\mu\nu}$ tenzor $M^{0\mu\nu}$ komponense

$M^{\alpha\mu\nu} = x^\mu T^{\alpha\nu} - x^\nu T^{\alpha\mu}$

$J^{\mu\nu} = \int d^3x \; M^{0\mu\nu}$

Áll. ha $\partial_\alpha M^{\alpha\mu\nu} = 0 \Rightarrow J^{\mu\nu}$ megmaradó mennyiség

megkövetteljük $\partial_\alpha M^{\alpha\mu\nu} = 0$ -t $\rightarrow$ így lesznek impulzus-momentum-áram-sűrűségek

$\partial_\alpha (x^\mu T^{\alpha\nu} - x^\nu T^{\alpha\mu}) = 0$

$$\delta_\alpha{}^\mu T^{\alpha\nu} + x^\mu \underbrace{\partial_\alpha T^{\alpha\nu}}_{=0} - \delta_\alpha{}^\nu T^{\alpha\mu} - x^\nu \underbrace{\partial_\alpha T^{\alpha\mu}}_{=0} = 0$$

$T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = 0 \Rightarrow$ szimm.

$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \Leftrightarrow \partial_\alpha M^{\alpha\mu\nu} = 0$

Ha $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ és $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, akkor ez olyan anyagi rendszert ír le, ahol megmarad az energia, impulzus és impulzusmom.

<u>EM tér Lagrange-sűrűsége:</u>

Mi a fundamentális tér? $F_{\mu\nu}$ vagy $A_\mu$?

$\rightarrow A_\mu \Rightarrow$ nem <u>kell</u> extra kényszer és forrásmentes egyenleteket megoldja

$\mathcal{L}(A_\mu, \partial_\nu A_\mu)$ legyen mértékinvariáns (legalább a hatás) $(F, \tilde{F}$ a legegyszerűbbek)

lehetőségek: $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ $\quad \tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ $\quad F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$

$= c F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ $\quad$ = teljes divergencia (nem változtatja a hatást)

Tehát legyen $\mathcal{L} = a F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

Kölcsönhatás a töltések és a mező között?

1 töltésre: $\underset{\text{interaction}}{S_{int}} = -Q \int A_\mu dx^\mu \Rightarrow$ általánosítás:

$S_{int} = -\int A_\mu j^\mu d^4x$

nincs 2db kölcsönhatás (mező $\rightarrow$ töltés ill. töltés $\rightarrow$ mező) csak 1 (mező $\leftrightarrow$ töltések)

$\mathcal{L} = a F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu$

mértékinvariancia ?! $\quad A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$

$$\mathcal{L}' = a F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu - \partial_\mu f j^\mu = \mathcal{L} - \underbrace{\partial_\mu (f j^\mu)}_{\text{tel. div}} + \cancel{f \partial_\mu j^\mu}^{\,0}$$

$S' = S$

# RELATIVITÁSELMÉLET

11. 16.

**mozgásegyenletek**

$$\mathcal{L} = a(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - A_\mu j^\mu$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} \qquad \phi_r \to A_\nu \quad (4\text{ db})$$

$$\partial_\mu a 4(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -j^\nu$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{-1}{4a} j^\nu \qquad a = -\frac{\varepsilon_0}{4}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{\varepsilon_0}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu$$

**Energiaimpulzus tenzor:**

1) töltések nélkül ($j^\mu = 0$) $\quad T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} \partial^\nu A_\sigma - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} =$

$$= -\varepsilon_0 F^{\mu\sigma}\partial^\nu A_\sigma + \frac{\varepsilon_0}{4}\eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

Komponensei (HF) $\qquad \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} = -\underline{E} - \underline{\nabla}\phi \qquad \underline{\nabla}\,\underline{E} = 0 \; (\rho = 0, \; j = 0)$

$$T^{00} = \frac{\varepsilon_0}{2}(-E^2 + B^2) - \varepsilon_0 \underline{E}\frac{\partial \underline{A}}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0}{2}(E^2 + B^2) + \varepsilon_0 \underline{E}\,\underline{\nabla}\phi = \frac{\varepsilon_0}{2}(E^2+B^2) + \varepsilon_0 \underline{\nabla}(\underline{E}\phi)$$

$$T^{0i} = \varepsilon_0(\underline{E}\times\underline{B})_i + \varepsilon_0 \underline{\nabla}(A_i \underline{E})$$

$$T^{i0} = \varepsilon_0(\underline{E}\times\underline{B})_i + \varepsilon_0\left[(\underline{\nabla}\times(\phi\underline{B}))_i - \frac{\partial}{\partial t}(\phi E_i)\right]$$

nem a várt kifejezések, de $\int d^3x\, T^{00} = \int \frac{\varepsilon_0}{2}(E^2 + B^2)\, d^3x$

$$\int d^3x\, T^{0i} = \int \varepsilon_0 (\underline{E}\times\underline{B})_i\, d^3x$$

szimmetrizáljuk $T^{\mu\nu}$-t!

$\partial^\nu A_\sigma$ helyére írjuk $F^\nu{}_\sigma + \partial_\sigma A^\nu$

$$T^{\mu\nu} = \underbrace{-\varepsilon_0 F^{\mu\sigma}F^\nu{}_\sigma + \frac{\varepsilon_0}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}}_{\text{szimmetrikus}} \underbrace{- \varepsilon_0 F^{\mu\sigma}\partial_\sigma A^\nu}_{+\text{ teljes divergencia}}$$

$$-\varepsilon_0 F^{\mu\sigma}\partial_\sigma A^\nu = \varepsilon_0 F^{\sigma\mu}\partial_\sigma A^\nu = \varepsilon_0 \partial_\sigma(F^{\sigma\mu}A^\nu) - \varepsilon_0 \underbrace{\partial_\sigma F^{\sigma\mu}}_{=0\ (j^\mu=0)} A^\nu = \varepsilon_0 \partial_\sigma(\underbrace{F^{\sigma\mu}A^\nu}_{\Lambda^{\sigma\mu\nu}})$$

$\Lambda^{\sigma\mu\nu} = -\Lambda^{\mu\sigma\nu}$ OK!

$$\boxed{T^{\mu\nu} = \varepsilon_0 F^{\mu\sigma}F_\sigma{}^\nu + \frac{\varepsilon_0}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}}$$

EM mező energiaimpulzus tenzora $\qquad \Theta^{\mu\nu} = \varepsilon_0\left(F^{\mu\sigma}F_\sigma{}^\nu + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)$

$\Theta^{00} = \frac{\varepsilon_0}{2}(E^2 + B^2) = u$ $\qquad$ energiasűrűség

$\Theta^{0i} = \varepsilon_0(\underline{E}\times\underline{B})_i = g_i \quad (= c g_i)$ $\qquad$ Pointing-vektor

$\Theta^{i0} = \Theta^{0i}$

$\Theta^{ij} = -\varepsilon_0\left[E^iE^j + B^iB^j - \frac{1}{2}\delta^{ij}(E^2 + B^2)\right] = -T_{ij}^{(M)}$ $\qquad$ Maxwell féle feszültség tenzor

2) Töltések $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\varepsilon_0} j^\nu \neq 0$

$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} \neq 0$ Áll: $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = -F^{\nu\sigma} j_\sigma$

Biz: $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = \varepsilon_0 \left( \partial_\mu (F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu) + \frac{1}{4} \partial^\nu (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) \right) =$

$= \varepsilon_0 \left( \underbrace{F_\sigma{}^\nu \partial_\mu F^{\mu\sigma}} + F^{\mu\sigma} \partial_\mu F_\sigma{}^\nu + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \partial^\nu F^{\alpha\beta} \right)$

$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} + F^{\nu\sigma} j_\sigma = \varepsilon_0 \left( F^{\mu\sigma} \partial_\mu F_\sigma{}^\nu + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \partial^\nu F^{\alpha\beta} \right) =$

$= \varepsilon_0 \frac{1}{2} \left( F_{\mu\sigma} \partial^\mu F^{\sigma\nu} + F_{\mu\sigma} \partial^\mu F^{\sigma\nu} + F_{\mu\sigma} \partial^\nu F^{\mu\sigma} \right) =$

$= \varepsilon_0 \frac{1}{2} F_{\mu\sigma} \left( \partial^\mu F^{\sigma\nu} + \overbrace{\partial^\mu F^{\sigma\nu} + \partial^\nu F^{\mu\sigma}} \right) =$

$\partial^\mu F^{\sigma\nu} + \partial^\sigma F^{\nu\mu} + \partial^\nu F^{\mu\sigma} = 0 \Rightarrow -\partial^\sigma F^{\nu\mu} = \partial^\sigma F^{\mu\nu}$

$= \varepsilon_0 \frac{1}{2} F_{\mu\sigma} \left( \partial^\mu F^{\sigma\nu} + \partial^\sigma F^{\mu\nu} \right) = 0$

→ szimmetrikus $\mu, \sigma$-ban

→ antiszimm. $\mu\sigma$-ban

$F^{\nu\sigma} j_\sigma$ (Lorentz 4es erő: $Q F^{\nu\sigma} u_\sigma$) → Lorentz-erő sűrűség

$f_L{}^\nu = F^{\nu\sigma} j_\sigma = (j\underline{E}, \varrho \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B})$

Lorentz-erő: $\underline{F}_L = \int \underline{f}_L \, d^3x = \frac{dp_{\text{részecske}}}{dt}$

mezőre: $\int \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} d^3x = \frac{d}{dt} \int \Theta^{0\nu} d^3x + \underbrace{\int \partial_i \Theta^{i\nu} d^3x}_{\oint \Theta^{i\nu} dF_i} = \frac{d}{dt} p^\nu_{\text{mező}}$

$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} + F^{\nu\sigma} j_\sigma = 0$ $\qquad 0 = \int \left( \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} + F^{\nu\sigma} j_\sigma \right) d^3x =$

$= \int \left( \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} + f^\nu \right) d^3x =$

$= \frac{d}{dt} p^\nu_{\text{mező}} + \frac{d}{dt} p^\nu_{\text{részecskék}} =$

$= \frac{d}{dt} \left( p^\nu_{\text{mező}} + p^\nu_{\text{részecskék}} \right)$ → ez marad meg

## Relativisztikus kvantummechanika

**Schrödinger-egyenlet:**

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right] \psi$$

nem kovariáns $\hat{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V$ → $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ $\quad \hat{p} = -i\hbar \nabla$

általánosítsuk úgy, hogy a relativisztikus energia-impulzus reláció teljesüljön (szabad esetben)

$E^2 = p^2 + m^2$

$$\left( -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2 \underline{\nabla}^2 - m^2 \right) \psi = 0$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{m^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0$$

$$\left(\Box + \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0 \qquad \Box = \partial_\mu \partial^\mu$$

Klein – Gordon egyenlet

4es impulzus operátor $\Rightarrow \hat{p}^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\hbar \partial^\mu$

Mik a K-G egyenlet megoldásai?

Keressük a m.o.-t $\psi(\underline{x}, t) = A e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} \left(= A e^{\frac{i}{\hbar}(p\underline{x} - Et)}\right)$

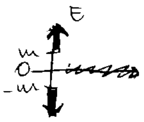
$$\partial_\mu \partial^\mu \psi = -\frac{1}{\hbar^2} p_\mu p^\mu \psi$$

$$-\frac{1}{\hbar^2} p_\mu p^\mu \psi + \frac{m^2}{\hbar^2}\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\mu p^\mu = m^2 \qquad \text{tömeghéjfeltétel}$$

$p^\mu$-nek 3 független komponense van: $p^\mu = (E, \underline{p})$

pl: $\underline{p}$ $\qquad E^2 = p^2 + m^2 \quad \Rightarrow E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$

$E \geq m \quad$ v. $\quad E \leq -m$




vannak $E < 0$ megoldások: antirészecskék

Mi a részecskeáramsűrűség?

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0 \qquad / \psi^*$$
$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\psi^* = 0 \qquad / \psi \qquad \ominus$$

$$\psi^* (\partial_\mu \partial^\mu)\psi - \psi\, \partial_\mu \partial^\mu \psi^* = 0$$

$$\partial_\mu \left[\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*\right] = 0 \qquad j^\mu = (\varrho, \underline{j})$$

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*\right) \qquad j^\mu \text{ megmaradó áram}$$

nemrelativisztikus limeszből $\qquad \int \varrho \, d^3x = \text{const}$

$$\varrho = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^* \dot{\psi} - \psi \dot{\psi}^*\right)$$

$\varrho$ megmaradó mennyiség, de nem mindig pozitív

K-G egyenlet másodrendű $\qquad \varrho < 0$ lehet

$t = 0$-ban $\psi, \dot{\psi}$ tetszőleges

Mi a $j^\mu$ jelentése?

Ha a K-G egyenlet sok és töltött részecskét ír le $\Rightarrow$

$\partial_\mu j^\mu = 0$ töltésmegmaradás

$\varrho > 0$, $\varrho < 0$ is lehetséges

részecske $\quad$ antirészecske $\qquad$ (nem elég a rel. kvantummecha)

Konkrét síkhullám megoldásra:

$$\psi = A e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} = A e^{\frac{i}{\hbar}(p\underline{x} - Et)}$$

$E = \pm\sqrt{p^2+m^2}$

$\Psi_\pm = A_\pm e^{\frac{i}{\hbar}(px \mp |E_p| t)}$

$\rho = \frac{ei\hbar}{2m}(\psi^* \dot{\psi} - \psi \dot{\psi}^*)$

$j^\mu = \frac{ie\hbar}{2m}(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*)$

számoljuk ki $\rho$-t! $\rho_\pm = \pm \frac{e|E_p|}{m} \psi_\pm^* \psi_\pm$

$\rho_+ = \frac{e|E_p|}{m} \psi_+^* \psi_+ > 0$ $\rho_- = -\frac{e|E_p|}{m}\psi_-^* \psi_- < 0$

Tehát $\psi_+$ +e töltésű részecskét ír le

$\psi_-$ -e -"-

Általában nem tudunk megfeleltetni részecskéket és antirészecs-kéket a megoldásoknak. A részecskeszám nem marad meg
$\Rightarrow$ végtelen szabadsági fok relativisztikusan

K-G egyenlet klasszikus mezőegyenlet, ami 0 spinű töltött részecskét ír le. $\Rightarrow$ másodkvantálás $\psi \to \hat{\psi}$

## Dirac-egyenlet:

Szeretnénk időben elsőrendű egyenletet

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

kovariáns $\Rightarrow$ $\hat{H}$ tartalmazzon első deriváltakat

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-i\hbar\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right) + \beta m\right]\psi = \hat{H}\psi$$

$\alpha_i, \beta$ nem lehetnek számok $\rightarrow$ vagy a kovariancia vagy az $E^2 = p^2+m^2$ sérül

Legyen $\psi$ több komponensű : $\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots \\ \psi_n\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \alpha_i, \beta$ mátrixok

Azt is szeretnénk, hogy $\rho = \psi^*\psi = \sum_i \psi_i^* \psi_i \geq 0$

Tehát ~~$i\hbar \frac{\partial\psi_i}{\partial t} = \sum_j -i\hbar(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2$~~ $\rho = j^0$ ahol $\partial_\mu j^\mu = 0$

$$i\hbar\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = \sum_j \left[-i\hbar\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_{ij} + \beta_{ij} m\right]\psi_j$$

a) $E^2 = p^2 + m^2$

b) $\rho = \psi^*\psi = j^0$ ahol $\partial_\mu j^\mu = 0$

c) Lorentz-kovariancia

a) $\Rightarrow$ $\psi_i$ teljesítse a K-G egyenletet

$\frac{\partial}{\partial x_i}$ nem keveri az indexeket $\to$ K-G $\forall$ komponensre

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\psi_i = 0$$

más alakban $\quad -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = \left(-\hbar^2 \underline{\nabla}^2 + m^2\right)\psi_i$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(i\hbar \frac{\partial \psi_i}{\partial t}\right) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_j -i\hbar\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) + \beta_j m\right)\psi_j\Big)$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = -\hbar^2 \sum_{a,b} \frac{\alpha_a\alpha_b + \alpha_b\alpha_a}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_a \partial x_b} - i\hbar m \sum_a (\alpha_a \beta + \beta \alpha_a) \frac{\partial \psi}{\partial x_a} + \beta^2 m^2 \psi$$

antikomm.

$\{\alpha_a, \alpha_b\} = 2\delta_{ab} \mathbb{1}$

$\{\alpha_a, \beta\} = 0$

$\alpha_a^2 = \beta^2 = 1$

Ha azt akarjuk, hogy $\hat{H} = \hat{H}^+$ akkor

$\alpha_a^+ = \alpha_a \quad \beta^+ = \beta$

**11.30.**

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-i\hbar \sum_i \alpha_i \partial_i + \beta m\right)\psi \qquad (1)$$

$\{\alpha_a, \alpha_b\} = 2\delta_{ab} \mathbb{1} \qquad \hat{H} = \hat{H}^+ \Rightarrow \alpha_a^+ = \alpha_a, \ \beta^+ = \beta$

$\{\alpha_a, \beta\} = 0$

$\alpha_a^2 = \beta^2 = 1$

$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \quad N \geq 4$ kell

Egy lehetséges választás $N=4$ esetén

$$\alpha_a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_a \\ \sigma_a & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&-i \\ 0&0&i&0 \\ 0&-i&0&0 \\ i&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&-1 \\ 1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} +1&0&0&0 \\ 0&+1&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}$$

b)
$$-i\hbar \frac{\partial \psi^+}{\partial t} = i\hbar \sum_i \left(\partial_i \psi^+ \alpha_i^+\right) + m\psi^+\beta^+ \qquad (2)$$

$\psi^+(1) - (2)\psi$

$$i\hbar\left(\psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^+}{\partial t}\psi\right) = -i\hbar \sum_i \left(\psi^+ \alpha_i \partial_i \psi + \partial_i \psi^+ \alpha_i \psi\right) + \left(\psi^+\beta m \psi - \psi^+ \beta m \psi\right)$$

$\alpha_i^+ = \alpha_i$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\psi^+\psi) = -i\hbar \sum_i \partial_i(\psi^+ \alpha_i \psi)$$

ez már kontinuitási egyenletre hasonlít

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div} \underline{j} = 0$$

$$\rho = \psi^+\psi = \sum_i \psi_i^* \psi_i \geq 0$$

$$j_i = \psi^+ \alpha_i \psi$$

kérdés: $(\rho, \underline{j})$ négyesvektort alkot-e?

c) egyenlet kovarianciája?

Dirac-egyenlet 4es alakja

$\frac{\partial}{\partial t}, \partial_i \rightarrow \partial_\mu \qquad \alpha^\mu \partial_\mu$

jelölés: $\gamma^0 = \beta$ $\Rightarrow \boxed{(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0}$

$\gamma^i = \beta\alpha_i$

konstans vektor $k^\mu$ * dinamikai valami pl. $p_\mu$

$$k^\mu p_\mu = k^0 E - k^1 p_x - k^2 p_y - k^3 p_z$$

kitüntet egy koordinátarendszert

nem minden koordinátarendszerben egyforma

fel lehet oldani $\gamma^\mu$ mátrix és $\psi$ is több-komponensű és $\gamma^\mu\psi$ legyen skalár vagy vmi ilyesmi

Dirac-egyenlet kovarianciája:

$\Lambda: K' \rightarrow K$ Lorentz-transzformáció

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^{\nu'}$$

hogyan transzformálódik $\psi$

$$\psi(x) = R(\Lambda)\psi'(\underbrace{\Lambda^{-1}x}_{x'})$$

$\uparrow$ ábrázolása a Lorentz-csoportnak

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

$$(i\hbar\gamma'^\mu\partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0$$

választás $\boxed{\gamma'^\mu = \gamma^\mu}$ $\rightarrow$ minden koordinátarendszerben ugyanúgy néznek ki a komponensei (amik mátrixok)

$$(i\hbar\gamma^\mu\Lambda_\mu{}^\nu\partial'_\nu - m)R(\Lambda)\psi'(x') = 0 \qquad / R^{-1}(\Lambda)\cdot$$

$$(i\hbar\underbrace{\Lambda_\mu{}^\nu R^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu R(\Lambda)}_{\gamma^\nu}\partial'_\nu - m)\psi'(x') = 0$$

$$\gamma^\nu = \Lambda_\mu{}^\nu R^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu R(\Lambda)$$

$$\gamma^\nu = \Lambda_\mu{}^\nu R^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu'}R(\Lambda)$$

$$R\gamma^\nu R^{-1} = \Lambda_\mu{}^\nu\gamma^\mu$$

HF: $\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu = R^{-1}\gamma^\mu R$

ennek kell teljesülni $R$-re, (I megoldás)

Belátható, hogy forgatásokra $R$ unitér és $[R, \gamma_0] = 0$

Általában nem unitér, hanem $R^{-1} = \gamma_0 R^+ \gamma_0$

4es áram: $j^\mu = \psi^+ \gamma_0 \gamma^\mu \psi$ $\qquad \alpha_i = \gamma_0 \gamma_i$

Dirac konjugált: $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_0$

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

$$j^\mu = \psi^+ \gamma_0 \gamma^\mu \psi = \psi'^+ R^+(\Lambda) \gamma^0 \gamma^\mu R(\Lambda) \psi' =$$

$$= \psi'^+ \gamma^0 \underbrace{R^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu R(\Lambda)}_{\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu} \psi' = \Lambda^\mu{}_\nu \underbrace{\psi'^+ \gamma^0 \gamma^\nu \psi'}_{j'^\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu j'^\nu$$

H: $\bar{\psi}\psi = \psi^+ \gamma^0 \psi$ skalár

$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ a 4es áram

<u>Dirac-egyenlet síkhullámmegoldásai:</u>

2 stratégia | 1) közvetlenül | 2) nyugalmi rendszer $\to$ boost

I $\quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi = \left(\sum_i \alpha_i \hat{p}_i + m\beta\right)\Psi \qquad \hat{p}_i = -i\hbar \partial_i$

stacionárius m.o.: $\Psi(x,t) = \psi(x) e^{\frac{i}{\hbar}Et}$ alakú

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

legyen $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \qquad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$

$$E\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \sum_i \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \hat{p}_i \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$E\varphi = \sum_i \hat{\sigma}_i \hat{p}_i \chi + m\varphi$$

$$E\chi = \sum_i \hat{\sigma}_i \hat{p}_i \varphi - m\chi$$

keressük $\varphi$-t, $\chi$-t síkhullám alakban

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar} px} \qquad \varphi, \chi \to \varphi_0, \chi_0 \qquad \hat{p} \to p$$

$$(E - m)\varphi_0 - \sum_i \hat{\sigma}_i p_i \chi_0 = 0$$

$$- \sum_i \hat{\sigma}_i p_i \varphi_0 + (E + m)\chi_0 = 0$$

$$A\begin{pmatrix}\varphi_0\\ \chi_0\end{pmatrix}=0$$

$\det A \overset{!}{=} 0$ $\qquad (\varepsilon+m)(\varepsilon-m)-\underbrace{\sum_i \hat\sigma_i p_i \cdot \sum_j \hat\sigma_j p_j}_{p^2}=0$

HF: $(\hat{\underline\sigma}\,\underline A)(\hat{\underline\sigma}\,\underline B)=\underline A\,\underline B+i\hat{\underline\sigma}(\underline A\times\underline B)$

$\varepsilon^2-m^2-p^2=0$ a megoldás feltétele

$\varepsilon=\pm\sqrt{p^2+m^2}=\lambda E_p \qquad E_p=\sqrt{p^2+m^2} \qquad \lambda=\pm 1$

$$\chi_0=\frac{\sum_i\hat\sigma_i p_i}{m+\varepsilon}\varphi_0=\frac{\sum_i\hat\sigma_i p_i}{m+\lambda E_p}\varphi_0$$

Legyen $\varphi_0\equiv Nu=N\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ úgy van normálva, hogy

$$u^+u=u_1^*u_1+u_2^*u_2=1$$

A megoldás: $\psi_{p\lambda}(\underline x,t)=N\begin{pmatrix}u\\ \frac{\hat\sigma\,\underline p}{m+\lambda E_p}\cdot u\end{pmatrix}e^{\frac{i}{\hbar}(\underline p\underline x-\lambda E_p t)}$

normálás: $\int\psi^+_{p,\lambda}(x)\,\psi_{p',\lambda'}(x)\,d^3x=\delta_{\lambda\lambda'}\delta(\underline p-\underline p')\Rightarrow$

$$N=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\sqrt{\frac{m+\lambda E_p}{2\lambda E_p}}$$

$\lambda=\pm1$ részecske $\Leftrightarrow$ antirészecske

$u$-ban marad szabadság $\longrightarrow$ spin

helicitás operátornak is sajátállapota lesz

Spin operátor: $\qquad \hat S_i=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\hat\sigma_i & 0\\ 0 & \hat\sigma_i\end{pmatrix}$

helicitás: $\hat\Lambda_s=\sum_i\hat S_i\frac{\hat p_i}{|p|}$

Áll: $\hat\Lambda_s$ kommutál $\hat H$-val és $\hat{\underline p}$-vel

1.) $\hat{\underline S}\,\hat{\underline p}$

2.) $p^2$

$\Big\}$-re megmutatva $\Lambda_s$-re is jó

Közös $(\hat H,\hat\Lambda_s,\hat{\underline p})$ sajátállapotok

mozogjon a részecske z tengely mentén

$$\hat\Lambda=\hat S_z=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&&&0\\&-1&&\\&&1&\\0&&&-1\end{pmatrix} \qquad \underline p=(0,0,p)$$

s.v. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\qquad$ s.é. $\pm\frac{\hbar}{2}$

$+$ $\quad$ $-$

$$\psi_{p,\lambda,+\frac{1}{2}} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\frac{\hbar}{2}p}{m+\lambda E_p} \\ 0 \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(pz - \lambda E_p t)} \qquad \sigma_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\psi_{p,\lambda,-\frac{1}{2}} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-\frac{\hbar}{2}p}{m+\lambda E_p} \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(pz - \lambda E_p t)}$$

$$\int \psi^+_{p\lambda s}\, \psi_{p'\lambda' s'}\, d^3x = \delta_{\lambda\lambda'}\, \delta_{ss'}\, \delta(p-p')$$

Kölcsönhatás

Legyen $e$ töltésű részecske e.m. térben

Emlékeztető: kanonikus 4es impulzus $p^\mu = p^\mu_{\text{szabad}} + eA^\mu$

Hamilton-fv. $H = \sqrt{m^2 + (\underline{p} - e\underline{A})^2} + e\phi$

$p^\mu \to -i\hbar\partial^\mu$ kanonikus kvantálás

$\partial^\mu \to \partial^\mu - \frac{ie}{\hbar}A^\mu$ Dirac-egyenletbe

$$\left[i\hbar\gamma^\mu\left(\partial_\mu - \frac{i\varphi}{\hbar}A_\mu\right) + m\right]\psi = 0$$

$$\hat{H} = \sum_i^3 \alpha_i(\hat{p}_i - eA_i) + \beta m + e\phi$$

mostantól csak $\phi$ és az is gömbszimmetrikus

$V(r) = e\phi(r)$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + V(r)$$

Áll: $\hat{H}_0$ kommutál a $\underline{J} = \underline{S} + \underline{L}$ teljes impulzusmom-mal és $\hat{P}$ paritással

$V(r)$ szimmetriái miatt szintén kommutál $\underline{J}$-vel és $\hat{P}$-vel

$$\underline{J} = \hat{\underline{r}} \times \hat{\underline{p}} + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \underline{\sigma} & 0 \\ 0 & \underline{\sigma} \end{pmatrix}$$

$\hat{P}$ op?

Hogyan transzformálódik $\psi$ $\underline{x} \to -\underline{x}$ transzformációra?

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x'^\nu$$

$$\psi(x) = R(\Lambda)\psi'(\Lambda^{-1}x)$$

$$\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu = R^{-1}(\Lambda)\,\gamma^\mu R(\Lambda)$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma^0 &= \hat{P}^{-1}\gamma_0\hat{P} & \hat{P}\gamma^0 &= \gamma^0\hat{P} \\ \gamma^i &= -\hat{P}^{-1}\gamma^i\hat{P} & \hat{P}\gamma^i &= -\gamma^i\hat{P} \end{aligned}\right\} \text{ m.o. } \hat{P} = a\gamma_0$$

$|\hat{P}^2\Psi| = |\Psi|$ $\qquad |a^2| = 1 \qquad a = e^{i\varphi}$

most egyszerűség kedvéért $\varphi = 0$, $a = 1$ $\qquad \hat{P} = \gamma_0$

$$\Psi(\underline{x}, t) = \gamma_0 \Psi'(-\underline{x}, t)$$

$(\hat{H}, \underset{J^2, J_z}{J}, \hat{P})$ közös sajátállapotai:

változók szeparálása $V(r)$ potenciál esetén:

kvantumszámok: $\quad j \qquad J^2 = j(j+1)\hbar^2$

$s = \frac{1}{2} \qquad m \qquad J_z = m\hbar$

$\underline{J} = \underline{L} + \underline{S} \qquad l \qquad L^2 = l(l+1)\hbar^2$

$$\Psi_{jm} = \begin{pmatrix} \varphi_{jlm} \\ \chi_{jl'm} \end{pmatrix}$$

ha $\Psi = \binom{\varphi}{\chi}$ paritás sajátállapot, akkor

$$\gamma^0 \Psi(-\underline{x}, t) = \pm \Psi(\underline{x}, t)$$

$$\varphi(-\underline{x}, t) = \pm \varphi(\underline{x}, t)$$

$$-\chi(-x, t) = \pm \chi(\underline{x}, t)$$

ha $\varphi$ páros akkor $\chi$ páratlan és fordítva

$\Rightarrow$ lényeg, hogy $\varphi$ és $\chi$ paritása eltérő

a szögfüggő részt az alábbi fv. adja meg:

$$\Omega_{jlm} = \sum_{m', m_s} \underbrace{\left(l \tfrac{1}{2} j \,|\, m' m_s m\right)}_{\text{Clebsch - Gordon}} Y_{lm'} \chi_{\frac{1}{2} m_s}$$

$$\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \chi_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Omega$ paritása $l$-ből jön

$$\hat{P}\Omega_{jlm} = (-1)^l \Omega_{jlm}$$

$\varphi$ és $\chi$ paritása különböző $\Rightarrow l \neq l'$

másrészt $\quad j = l \pm \frac{1}{2} \quad j = l' \pm \frac{1}{2} \quad \rightarrow 2j = l + l'$

(más előjelet kell választani)

Ansatz: $\quad \varphi_{jlm}(x) = ig(r)\, \Omega_{jlm}\left(\frac{\underline{r}}{r}\right)$

$$\chi_{jlm}(x) = -f(r)\, \Omega_{jl'm}\left(\frac{\underline{r}}{r}\right)$$

ha ezeket behelyettesítjük a Dirac-egyenletbe akkor 2 oldalt kell számolnunk

$$\hat{\underline{\sigma}}\hat{\underline{p}}\,\chi_{\Omega jem} + m\varphi_{\Omega jem} + V(r)\varphi_{\Omega jem} = E\varphi$$

$$\hat{\underline{\sigma}}\hat{\underline{p}}\,\varphi_{\Omega jem} - m\chi_{\Omega jem} + V(r)\chi_{\Omega jem} = E\chi$$

eredmény az ~~...~~ első tag számolásából:

$$\begin{cases} \hat{\underline{\sigma}}\hat{\underline{p}}\,\varphi_{jem} = \left[-\hbar\frac{dg}{dr} - \frac{g(r)}{r}\hbar(1+K)\right]\Omega_{jem} \\ \hat{\underline{\sigma}}\hat{\underline{p}}\,\chi_{jem} = \left[-i\hbar\frac{df}{dr} - i\frac{f(r)}{r}\hbar(1-K)\right]\Omega_{jem} \end{cases}$$

$$K = \mp\left(j+\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} -\left(j+\frac{1}{2}\right) & \text{ha } j = l+\frac{1}{2} \\ +\left(j+\frac{1}{2}\right) & \text{ha } j = l-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$K$ más $l\pm\frac{1}{2}$ esetén (spinpálya kölcsönhatás)

radiális egyenletek $G = rg$, $F = rf$ segítségével

$$\hbar\frac{dG}{dr} + \hbar\frac{K}{r}G(r) - (E + m - V(r))\,F(r) = 0$$

$$\hbar\frac{dF}{dr} - \hbar\frac{K}{r}F(r) + (E - m - V(r))\,G(r) = 0$$

Legyen $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$

$$\frac{dG}{dr} = -\frac{K}{r}G(r) + \left[\frac{E+m}{\hbar} + \frac{Z\alpha}{r}\right]F(r)$$

$$\frac{dF}{dr} = \frac{K}{r}F(r) - \left[\frac{E-m}{\hbar} + \frac{Z\alpha}{r}\right]G(r)$$

ahol $\alpha = \frac{e^2}{\hbar} = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ finomszerkezeti áll.

módszer 1, $r\to 0$ limesz

2, $r\to\infty$ limesz

3, $r\to 0$, $r\to\infty$ viselkedés leválasztása után hatványsor alapú mo.

1, $r\to 0$

$$\frac{dG}{dr} = -\frac{K}{r}G + \frac{Z\alpha}{r}F$$

$$\frac{dF}{dr} = \frac{K}{r}F - \frac{Z\alpha}{r}$$

$$F(r) = a\,r^{\gamma} \qquad \gamma = \pm\sqrt{K^2 - (Z\alpha)^2}$$

$$G(r) = b\,r^{\gamma}$$

$\Psi$ normálható és a Coulomb-energia várható értéke véges $\Rightarrow$ $\gamma = +\sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2}$ $\quad \kappa = \mp(j + \frac{1}{2})$ $\quad \kappa^2 \geq 1$

$Z\alpha \gtrsim 1 \quad Z > 137$ $\boxed{\text{baj}}$

2) $r \to \infty \quad \rho = 2\lambda r \qquad \lambda = \frac{\sqrt{m^2 - E^2}}{\hbar}$

$\rho \to \infty$

$$\frac{dG}{d\rho} = \frac{E+m}{2\hbar\lambda} F(\rho)$$

$$\frac{dF}{d\rho} = -\frac{E-m}{2\hbar\lambda} G(\rho)$$

$$\frac{d^2G}{d\rho^2} = \frac{E^2 - m^2}{4\hbar^2\lambda^2} G(\rho)$$

$G(\rho) \sim e^{\pm\rho/2}$ $\quad \ominus$: normálható

$F(\rho), G(\rho) \sim e^{-\frac{\rho}{2}}$

$$G(\rho) = \sqrt{m+E}\, e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{\gamma} \left(\phi_1(\rho) + \phi_2(\rho)\right)$$

$$F(\rho) = \sqrt{m-E}\, e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{\gamma} \left(\phi_1(\rho) - \phi_2(\rho)\right)$$

$\left.\begin{array}{l}\phi_1 = \sum_m \alpha_m \rho^m \\ \phi_2 = \sum_m \beta_m \rho^m\end{array}\right\}$ formából indulunk .... $\alpha_m, \beta_m$ rekurziós egyenletei

$\alpha_0, \beta_0$ tetszőleges $\Rightarrow$ $\alpha_1 \dots, \beta_1 \dots$

$$\alpha_m = \frac{(1-n')(2-n')\dots(m-n')}{m!(2\gamma+1)\dots(2\gamma+m)}\alpha_0 \qquad n' = \frac{2\alpha E}{\hbar\lambda} - \gamma$$

$$\beta_m = (-1)^m \frac{n'(n'-1)\dots(n'-m+1)}{m!(2\gamma+1)\dots(2\gamma+m)}\beta_0$$

normálhatóság miatt végesnek kell lenni a hatványsoroknak $\phi_1$ és $\phi_2$-nél

$\Rightarrow$ $n'$ egész szám $\quad n' = 0, 1, 2 \dots$

legyen $n = n' + |\kappa| = n' + j + \frac{1}{2}$ főkvantumszám $n = 1, 2, \dots$

$$\boxed{E = m\left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(n - j - \frac{1}{2} + \sqrt{(j+\frac{1}{2})^2 - (Z\alpha)^2}\right)^2}\right]^{-1/2}}$$

Sommerfeld-féle finomszerkezeti formula

$\Rightarrow$ $E$ tartalmazza $mc^2$ nyugalmi energiát

$\Rightarrow$ $E$ $n$-től és $j$-től függ (l-től nem)

Kis $Z\alpha$-ra sorfejtés $\quad \frac{E - mc^2}{mc^2} = -(Z\alpha)^2\left\{\frac{1}{2n^2} + \frac{(Z\alpha)^2}{2n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right)\right\}$

(l-től függés Lamb-shift, QED) $\qquad$ finomszerkezet