Relativitáselmélet

katz@bodri.elte.hu (2.131), kedd: 8^{30}

bodri.elte.hu/Relativitaselmelet

- Aj. ir.:
  - Landau II.
  - Jackson: El. din
  - Greiner: Relativistic QM.
- Tematika:
  - tövid, Lorentz-trafó
  - négyes formalizmus
  - kinematika
  - rel. mechanika
  - elektrodinamika
    ↳ klasszikus térelmélet
  - relativisztikus QM

szóbeli vizsga lesz!

1. óra

1) Relativitás elve:

A fizika törvényei minden (inerciális) vonatkoztatási rendszerben azonosak.

A különböző K koordináta rendszerekben érvényes (x, y, z, t) koordinátákkal felírt egyenletek alakja azonos.

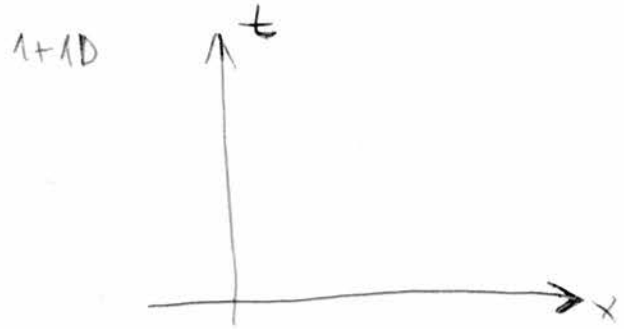
+ tapasztalat: a fény sebessége ∀ rendszerben ugyanaz

⇓

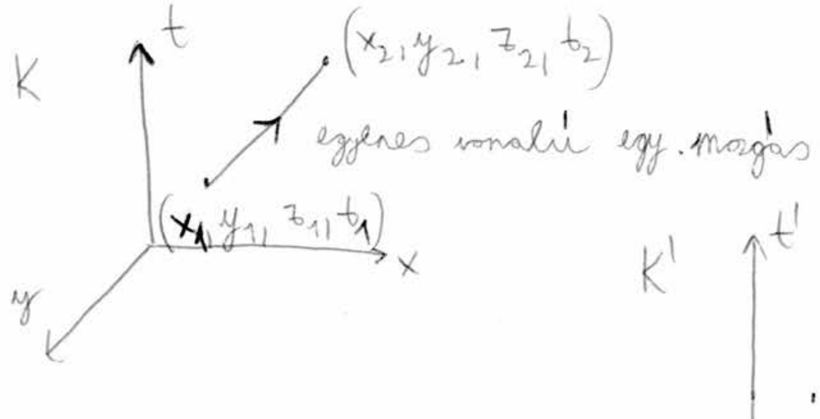
spec. relativitáselmélet

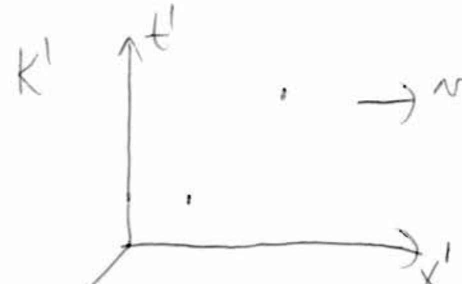
2) Fogalmak:

- téridő: események halmaza, egy adott K koord. rendszerben az (x, y, z, t) pontok összessége



- ívhossz:





c: fénysebesség

→ fénysebességű jel megy $(x_1, y_1, z_1, t_1) \to (x_2, y_2, z_2, t_2)$

megtett út: $d = c(t_2 - t_1)$

másrészt: $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

$$c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0$$

ívhossz: $s_{12} := \sqrt{c^2(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2}$

fénysebesség $\Rightarrow$ $s_{12}=0$

K'-ben ugyanez érvényes: (mert az egyenletek alakja azonos)

$$c^2(t'_2-t'_1)^2-(x'_2-x'_1)^2-(y'_2-y'_1)^2-(z'_2-z'_1)^2=0$$

$$s'_{12}=0$$

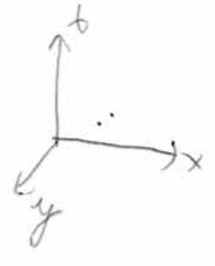
$$s_{12}=0 \Longleftrightarrow s'_{12}=0$$

- Áll.: ált.-ban igaz, hogy $\boxed{s_{12}=s'_{12}}$

Biz.: Közeli eseményekre:

ívelem négyzete:

$$ds^2 = c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$$



ívhossz, ívelem távolsághoz hasonló mennyiségek, 4D Minkowski metrikájú téren távolság.

sorfejtés:

$$ds'^2 = \overbrace{a_1c^2dt^2-a_1dx^2-a_1dy^2-a_1dz^2}^{a_1ds^2}$$
$$+\,a_2c^2dt^2+a_3dx^2+a_4dy^2+a_5dz^2 \rightarrow \text{maradékok (leválasztottuk belőlük } a_1\text{-et)}$$
$$+\ldots c\,dt\,dx+\ldots c\,dt\,dy+\ldots c\,dt\,dz+\ldots dx\,dy+$$
$$+\ldots dy\,dz+\ldots dx\,dz$$

ha $ds^2=0 \Rightarrow ds'^2=0 \Rightarrow a_2, a_3 \ldots a_n=0 \leftarrow \ldots$ (egymáshoz képest x, y és z irányban haladó k. rendszerekben)

1+1D-ban nem igaz!

$\Rightarrow ds'^2 = a\, ds^2$ mitől függhet a?

- x, y, z, t-től nem függhet (tér-idő homogenitása miatt)
- v-től (K, K' rel. sebessége) függhet elvileg
- v irányától nem függhet (tér-idő izotróp)

$\Rightarrow a(|v|)$

tekintsünk 3 rendszert: K, K_1, K_2

$$ds_1^2 = a(|v_1|)\, ds^2$$

$$ds_2^2 = a(|v_2|)\, ds^2$$

$$ds_2^2 = a(|v_{12}|)\, ds_1^2$$

$$a(|v_{12}|) = \frac{a(|v_2|)}{a(|v_1|)}$$

De $|v_{12}|$ nem csak $|v_1|$-től és $|v_2|$-től függ, hanem a bezárt szögüktől is.

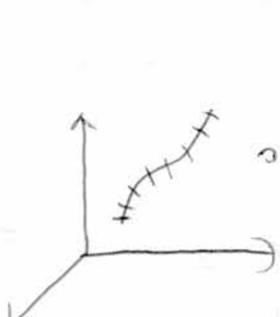
$\Rightarrow a$ konstans

$$ds'^2 = a\, ds^2$$

és $ds^2 = \frac{1}{a} ds'^2$ (fordítva nézve)

$$a = \frac{1}{a} \Rightarrow a = 1$$

$\Rightarrow \boxed{ds'^2 = ds^2} \Rightarrow \boxed{s' = s}$



$s = \int ds$

$s' = s$

Speciális ívhosszak

$t_1 \neq t_2$

Legyen (x_1, y_1, z_1, t_1) és (x_2, y_2, z_2, t_2) két esemény K-ban.

a) Létezik-e olyan K' rendszer, ahol a két esemény egy helyen történik?

$$t_1 \neq t_2 \qquad \begin{pmatrix} x_2' = x_1' \\ y_2' = y_1' \\ z_2' = z_1' \end{pmatrix}$$

b) Létezik-e olyan esemény, ahol a két esemény egy időben történik? $(t_2' = t_1')$

Klassz. fizikában (a ✓, b ×)

Legyen $t_{12} = t_2 - t_1$

$$l_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 \qquad s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2$$

$$s_{12}^2 = s_{12}'^2$$

a) $l_{12}' = 0 \qquad s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 \geq 0$ $\quad$ ($=0$, ha fényről van szó)

fordítva is igaz (biz. ható) (ha $\oplus$ az ívhossz, $\exists$ olyan K', ahol $l_{12}' = 0$)

$\Rightarrow K'$-ben eltelt idő $\displaystyle t_{12}' = \sqrt{\frac{1}{c^2} s_{12}'^2} = \sqrt{\frac{1}{c^2} s_{12}^2} = \sqrt{t_{12}^2 - \frac{l_{12}^2}{c^2}}$

b) $t_{12}' = 0 \qquad s_{12}^2 = s_{12}'^2 = -l_{12}'^2 \leq 0$, fordítva is igaz

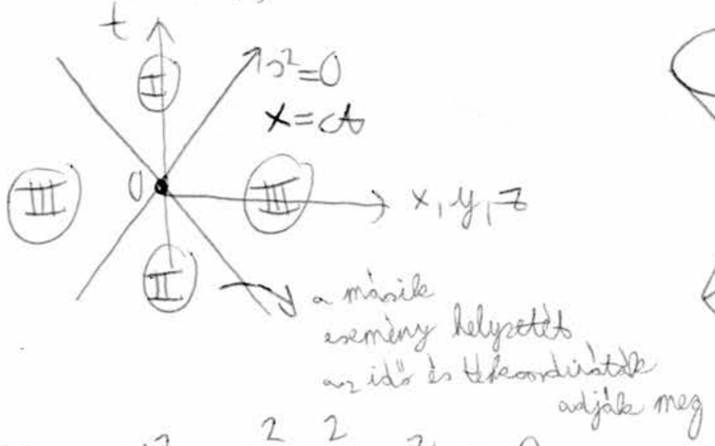
(ha $\ominus$ az ívhossz, $\exists$ olyan K', ahol $t_{12}' = 0$)

K'-ben távolság: $l_{12}'^2 = -s_{12}'^2 = -s_{12}^2 = l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2$

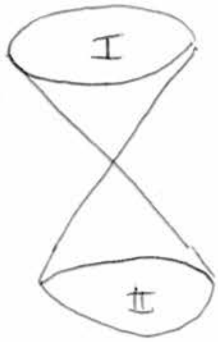
→ események:

- $s^2 > 0$: időszerű ← két esemény lehet időszerű / térszerű / fényszerű egymáshoz képest ~~(...)~~ (intervallumot 2 es. között mérünk)
- $s^2 < 0$: térszerű
- $s^2 = 0$: fényszerű

Legyen 0 egy esemény: (0,0,0,0)



fénykúp



III (magasabb D-ban összefüggő tart.)

I. $ct^2 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$

∀ esemény időszerű 0-hoz képest

$t > 0$ ∀ k. rendszerben

<u>abszolút jövő</u>

II. $ct^2 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$

$t < 0$ ∀ k. rendszerben

<u>abszolút múlt</u>

részecske pályája

kauzalitás ⇒ ∀ magát leíró világvonal az I–II. tartományokban megy

III. $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 < 0 \qquad s^2 < 0$

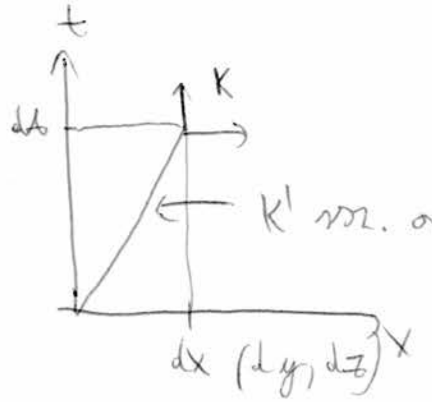
- ~~t~~ térszerűek 0-hoz képest: egyidejűség K függő
- lehet múlt és jövő is 0-hoz képest
- ~~(t)~~ nem lehetnek 0-val egy helyen
- semmilyen kölcsönhatás nem juthat el 0-ból a

  III. tartomány pontjaiba !

  (sértené a kauzalitást)

esetekben a pontokban túl kicsi ehhez az idő, ami az origóhoz képest eltelik (a fénynél gyorsabban kéne haladni)

sajátidő: $(ds^2 > 0)$



$(dx' \equiv 0)$ mindig

$dt' = ?$ mennyi idő telik el a mozgó vsz.-ben?

- a K vsz.-ben $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ távolságot tesz meg dt idő alatt
- K' vsz.-ben $dx' = dy' = dz' = 0 \Rightarrow ds'^2 = c^2 dt'^2$
- $ds^2 = ds'^2$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2$$

$$\Rightarrow \boxed{dt' = \frac{ds}{c}} \quad \leftarrow ds = ds'\text{-ből}$$

($ds^2 > 0$ esetén értelmes $\equiv$ időszerű események)

$$\underline{\underline{dt'}} = dt\sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} = \underline{\underline{dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

- általános mozgásra (v-ált.):

$$\boxed{t_2' - t_1' = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}_{<1}}$$

- $t_2' - t_1' < t_2 - t_1 \Rightarrow$ az együtt mozgó rsz.-ben kevesebb idő telik el

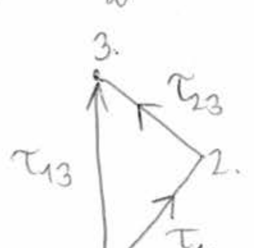
- sajátidő: $\boxed{\Delta\tau = \frac{1}{c}\int ds}$

($\forall$ k.rsz.-ben ua., mert s is ugyanaz)

<u>(Anti)háromszög egyenlőtlenség</u>

Legyen O_1, O_2, O_3 3 esemény úgy, hogy s_{12}, s_{13}, s_{23} időszerű

$t_1 < t_2 < t_3$



$\Rightarrow \exists$ olyan K, ahol O_1, O_3 egy helyen van, ekkor:

$\tau_{13} = \frac{1}{c}\int ds_{13} = t_3 - t_1$ K-beli koordinátákkal

$$\tau_{12} + \tau_{23} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1-\frac{v_{12}^2}{c^2}} + \int_{t_2}^{t_3} dt \sqrt{1-\frac{v_{23}^2}{c^2}} < \cancel{t_2} - t_1 + t_3 - \cancel{t_2} =$$

$$= t_3 - t_1 = \tau_{13}$$

$$\underline{\underline{\tau_{12} + \tau_{23} \leq \tau_{13}}}$$

$$\boxed{s_{12} + s_{23} \leq s_{13}}$$ K. rsz.-től függetlenül

$\Rightarrow$ a „leghosszabb" út az egyenes

Lorentz - transzformáció

- Milyen kapcsolat van K és K' - beli koordináták között?

(Galilei - trafó

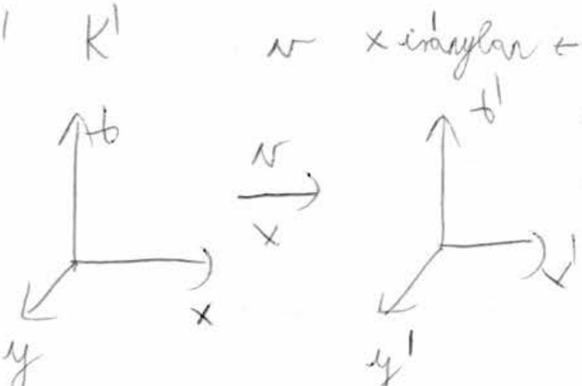
$(v_x \neq 0, v_y = v_z = 0)$

x, y, z, t K $\quad$ x', y', z', t' K' $\quad$ v x irányban ← így vesszük fel a k. rendszert

$x = x' + vt'$, $y = y'$,

$z = z'$

$t = t'$



→ sérti a fénysebesség invarianciáját

↳ ívhossz nem invariáns (Hf))

- olyan általános transzformációt keresünk, ami megtartja az ívhosszat („forgatás" 4D - ban)

2. óra

(folyt.)

olyan transzf. -t keresünk, amely megtartja az ívhosszt

ívhossz ~ „távolság" → $\underbrace{\text{eltolások, tükrözések}}_{\text{ezek biztos megtartják az ívhosszt}}$, forgatások

6 elemi forgatás van: $\underbrace{xy, yz, xz}$, xt, yt, zt síkokban

térbeli forgatás

$\Downarrow$

távolság nem időt.

+ idő sem (azt

nem is transzformáljuk)

nézzük az xt síkot

~~térid~~ tér-idő homogenitása $\to$ ~~transzformáció~~ transzformáció lineáris

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

ívhossz invarianciája:

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2$$

$$(\alpha ct' + \beta x')^2 - (\gamma \cdot c \cdot t' + \delta x')^2 = (ct')^2 - x'^2 \qquad \forall t', x' \text{-re}$$

$$\alpha^2 c^2 t'^2 + \beta^2 x'^2 + 2\alpha\beta \cdot ct' x' - \gamma^2 (ct')^2 - \delta^2 \cdot x'^2 - 2\gamma\delta\, ct' \cdot x' = (ct')^2 - x'^2$$

$$(\alpha^2 - \gamma^2) \cdot (ct')^2 - (\delta^2 - \beta^2)\, x'^2 + 2(\alpha\beta - \gamma\delta)\, ct' x' = (ct')^2 - x'^2$$

$$\alpha^2 - \gamma^2 = 1 \qquad \delta^2 - \beta^2 = 1 \qquad \alpha\beta - \gamma\delta = 0 \quad \Leftarrow \forall t', x' \text{-re}$$

tetsz. $\mathbb{R}$-beli szám felírható így: $\operatorname{ch} x \geq 0$

$$\gamma := \operatorname{sh} x \Rightarrow \alpha = \pm \operatorname{ch} x$$ időtükrözés

$$\beta := \operatorname{sh} x' \Rightarrow \delta = \pm \operatorname{ch} x'$$

~~té~~ tértükrözés

most $+ +$-t választunk, de a ~~másik~~ másik előjelek is jó megoldást adnak

$$\alpha\beta = \gamma\delta$$

$$\operatorname{ch} x \operatorname{sh} x' = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x'$$

$\operatorname{th} \chi' = \operatorname{th} \chi$

$\underline{\underline{\chi' = \chi}}$

$\Downarrow$

$\boxed{\chi : \text{rapiditás}}$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \chi & \operatorname{sh} \chi \\ \operatorname{sh} \chi & \operatorname{ch} \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

nézzük a K' origójának mozgását K-ban:

$x' = 0$

$ct = \operatorname{ch} \chi \cdot ct' \qquad t' > 0$

$x = \operatorname{sh} \chi \cdot ct'$

$\frac{x}{t} = \operatorname{th} \chi \cdot c$

$\uparrow$

ez pont a K' sebessége K-ból nézve

$\frac{x}{ct} = v \qquad \boxed{\frac{v}{c} = \operatorname{th} \chi}$

$$\operatorname{sh} \chi = \frac{\operatorname{th} \chi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \chi}} = \frac{v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \operatorname{ch} \chi = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \chi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

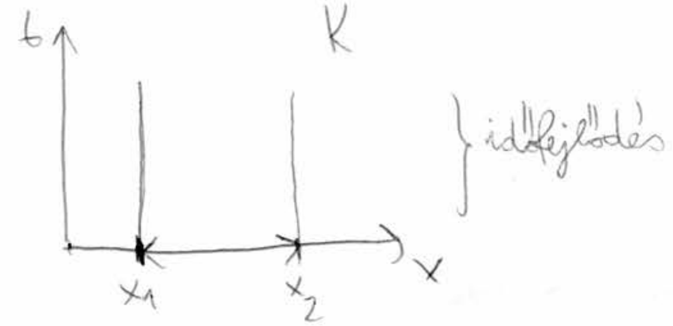
$$\Rightarrow \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad x = \frac{vt' + x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

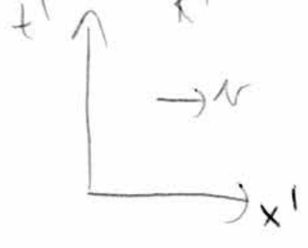
ha $\frac{v}{c} << 1$ → Galilei trafó

inverz transzformáció $(K \to K')$: $v \to -v$ -t eredményez

2 egyszerű példa:

1) Lorentz kontrakció:





K rendszerben $\Delta x = x_2 - x_1$ hosszúságú rúd nyugalomban van.

Milyen hosszú a K'-ben?

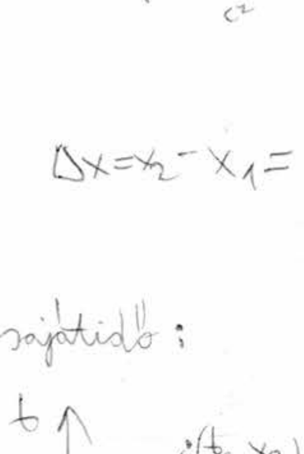
$\boxed{\text{adott } t'\text{-re mennyi a } \Delta x' = x_2' - x_1'}$ → ebből adódik a rövidülés, hogy K'-ben nem egyidejű lesz a két végpontja a rúdnak

↑ feltétellel

$$x_1 = \frac{vt' + x_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad x_2 = \frac{vt' + x_2'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \underline{\underline{\Delta x' = \Delta x \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < \Delta x}}$$

2) sajátidő:



2 esemény (t_1, x_1), (t_2, x_2)

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{v}{c^2} x_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t_2 = \left(t_2' + \frac{v}{c^2} x_2'\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

együttmozgó vsz. legyen K'

$$\boxed{x_1' = x_2'} \leftarrow \text{feltétel}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \underline{\underline{\Delta\tau}} = \Delta t' = \underline{\underline{\Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} < \Delta t$$

Sebességek „összeadása" 1D-ben

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, leftrightarrow, "{v_1,\ \chi_1}"'] \arrow[rr, leftrightarrow, bend right, "{v=?\quad \chi=?}"'] & K' \arrow[r, leftrightarrow, "{v_2,\ \chi_2}"'] & K'' \end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi_1 & \operatorname{sh}\chi_1 \\ \operatorname{sh}\chi_1 & \operatorname{ch}\chi_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi_2 & \operatorname{sh}\chi_2 \\ \operatorname{sh}\chi_2 & \operatorname{ch}\chi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi_1 \operatorname{ch}\chi_2 + \operatorname{sh}\chi_1 \operatorname{sh}\chi_2 & \operatorname{ch}\chi_1 \operatorname{sh}\chi_2 + \operatorname{sh}\chi_1 \operatorname{ch}\chi_2 \\ \operatorname{ch}\chi_1 \operatorname{sh}\chi_2 + \operatorname{sh}\chi_1 \operatorname{ch}\chi_2 & \operatorname{ch}\chi_1 \operatorname{ch}\chi_2 + \operatorname{sh}\chi_1 \operatorname{sh}\chi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\chi_1+\chi_2) & \operatorname{sh}(\chi_1+\chi_2) \\ \operatorname{sh}(\chi_1+\chi_2) & \operatorname{ch}(\chi_1+\chi_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}$$

a rapiditás additív!

csak 1D-ban!!! $\chi = \chi_1 + \chi_2$

$\cancel{v = v_1 + v_2}$ → ilyen nincs

$$\frac{v_1}{c} = \operatorname{th} \chi_1$$

$$\frac{v_2}{c} = \operatorname{th} \chi_2$$

$$\frac{v}{c} = \operatorname{th} \chi = \operatorname{th}(\chi_1+\chi_2) = \frac{\operatorname{sh}(\chi_1+\chi_2)}{\operatorname{ch}(\chi_1+\chi_2)} = \frac{\operatorname{ch}\chi_1 \operatorname{sh}\chi_2 + \operatorname{ch}\chi_2 \operatorname{sh}\chi_1}{\operatorname{ch}\chi_1 \operatorname{ch}\chi_2 + \operatorname{sh}\chi_1 \operatorname{sh}\chi_2} =$$

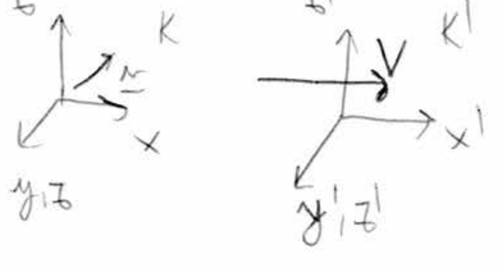
$$= \frac{\operatorname{th}\chi_2 + \operatorname{th}\chi_1}{1 + \operatorname{th}\chi_1 \operatorname{th}\chi_2} = \frac{\frac{v_1}{c} + \frac{v_2}{c}}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \Rightarrow v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

szimm. a v_1, v_2 cseréjére

több D-ban szögek is beszólhatnak (1D-ban !!!)

Sebességek transzformációja általánosan

K, K' V sebesség x tengely mentén (így választjuk meg a tengelyeket)



• Mozogjon egy részecske K-ban $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z)$ sebességgel

$v_x = \frac{dx}{dt}$ $v_y = \frac{dy}{dt}$ $v_z = \frac{dz}{dt}$ $\underline{v}' = ?$

• Lorentz-trafó dx, dy, dz, dt-re:

mivel lineáris a trafó, ezért $dx, dy, \ldots$-ra ugyanaz a trafó, mint a koordinátákra

$$dx = \frac{V dt' + dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad \overbrace{dy = dy' \qquad dz = dz'}^{\text{ilyen irányban nincs sel. mozgás, ezért ezek változatlanok}} \qquad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2} dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{V\cdot dt' + dx'}{dt' + \frac{V}{c^2}\,dx'} = \frac{V + v_x'}{1 + \frac{V v_x'}{c^2}}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{v_y'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V v_x'}{c^2}}$$

az idő változása miatt

$$v_z = \frac{v_z'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V\cdot v_x'}{c^2}}$$

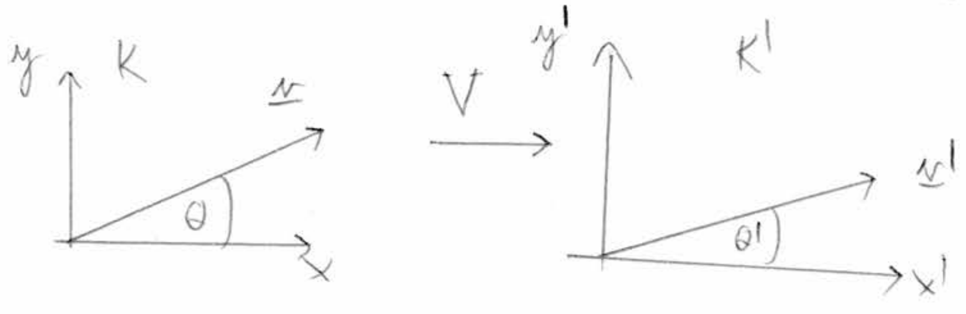
Észrevételek:

- → merőleges sebességek is változnak
- → nem szimmetrikusak $V \leftrightarrow v_x'$-re ⇒ Lorentz-transzformációk nem felcserélhetők

(Nem mindegy hogy az álló r.-hez képest a másik k.rsz. mozog V-vel és a rsz. v-vel, vagy ford.)

Sebesség irányának transzformációja

Legyen K-ban $\underline{v}$ xy síkban $(v_z = 0 \Rightarrow v_z' = 0)$



$v' \cdot \cos\theta' = v_y'$

$v' \sin\theta' = v_x'$

$$\frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg}\theta = \frac{v_y'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{V + v_x'} = \frac{v'\sin\theta'\cdot\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{V + v'\cos}$$

Legyen $v' = c$:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin\theta'\sqrt{1-V^2/c^2}}{\frac{V}{c} + \cos\theta'}$$

$\operatorname{tg}\theta$ -ból $\sin\theta$, $\cos\theta$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V}{c}\cdot\cos\theta'}\cdot\sin\theta'$$

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}\cdot\cos\theta'}$$

← $\boxed{\text{HF}}$ belátni

Legyen $\frac{V}{c} << 1$ → sorfejtés $\frac{V}{c}$-ben lineáris rendig

$$\sin\theta = \frac{\sin\theta'}{1+\frac{V}{c}\cos\theta'} = \left(1-\frac{V}{c}\cos\theta'\right)\cdot\sin\theta' + \mathcal{O}\left(\frac{V^2}{c^2}\right)$$

$$\sin\theta - \sin\theta' = -\frac{V}{c}\cdot\sin\theta'\cos\theta'$$

$$\Delta\theta = \theta' - \theta \qquad \frac{V}{c} << 1 \Rightarrow \Delta\theta << 1$$

mm.:

$$\sin\theta' - \sin\theta = -\sin(\theta' - \Delta\theta) + \sin\theta' = \cancel{-\sin\theta'} + \Delta\theta\cdot\cos\theta' \cancel{+ \sin\theta'} + \mathcal{O}(\Delta\theta^2) =$$

$$= \Delta\theta\cos\theta'$$

$$-\cancel{\cos\theta'}\,\Delta\theta = -\frac{V}{c}\sin\theta'\cancel{\cos\theta'}$$

$$\Delta\theta = \frac{V}{c}\sin\theta'$$

fényaberráció
(nyugvó rendszerben más szögben érkezik a fény)

Négyes formalizmus

Legyen $x^0 = ct$ $x^1 = x$ $x^2 = y$ $x^3 = z$

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$ négyes koordináta vektor

- Lorentz-trafó (x irányú mozgásra)

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\chi & sh\chi & 0 & 0 \\ sh\chi & ch\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{0\prime} \\ x^{1\prime} \\ x^{2\prime} \\ x^{3\prime} \end{pmatrix}$$

y irányra:

$$\begin{pmatrix} ch\chi' & 0 & sh\chi' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sh\chi' & 0 & ch\chi' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

z irányra:

$$\begin{pmatrix} ch\chi'' & 0 & 0 & sh\chi'' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ sh\chi'' & 0 & 0 & ch\chi'' \end{pmatrix}$$

Ált. Lorentz-trafó ezekből felépíthető.

- Tömörebb jelöléssel:

$$x^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \underbrace{\Lambda^\mu_{\ \nu}}_{\text{mátrix}} \cdot (x^\nu)' \qquad \mu = 0 \ldots 3$$

ahol $\Lambda^\mu_{\ \nu}$ a Lorentz-trafó mátrixa $\quad x^\mu = \sum \Lambda^\mu_{\ \nu} (x^\nu)'$

! Konvenció: alsó-felső indexre összegzés automatikusan $x^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} \cdot (x^\nu)'$

- ívelem négyzete:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dx^{0\,2} - dx^{1\,2} - dx^{2\,2} - dx^{3\,2} =$$

$$= \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

ahol $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$ metrikus tenzor

jelölés: $\boxed{x_\mu := \eta_{\mu\nu} \cdot x^\nu} = \sum_{\nu=1}^{3} \eta_{\mu\nu} x^\nu$ kovariáns komponensek

x^μ kontravariáns komponensek

$x^\mu = (ct, \underline{x})$ $\qquad x_\mu = (ct, -\underline{x})$ ← duális tér eleme (olyan, mint pl. egy konjugálás)

$\boxed{ds^2 = dx_\mu \cdot dx^\mu}$ ilyen jelöléssel

$(\sim |z|^2 = z \cdot z^*)$

- Szabályok:

-) alsó-felső azonos indexre automatikus összegzés

-) ugyanaz az index nem szerepelhet 2x fent v. lent

- Ívelem invarianciája:

$$\overset{ds^2 = ds'^2)}{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\rho\lambda} dx'^\rho \cdot dx'^\lambda}$$

(η ugyanaz mindkét rendszerben)

$dx^\mu = \Lambda^\mu{}_\rho\, dx'^\rho$

$dx^\nu = \Lambda^\nu{}_\lambda \cdot dx'^\lambda$

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\lambda} dx'^{\rho} dx'^{\lambda} = \eta_{\rho\lambda} dx'^{\rho} dx'^{\lambda}$$

$\forall\, dx'^{\mu}$-re igaz

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\lambda} = \eta_{\rho\lambda}}}$$

. más alak:

$$\eta^{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$ ← felső indexes η ugyanaz legyen

$$\boxed{\eta_{\rho\lambda} \eta^{\lambda\sigma} = \delta_{\rho}{}^{\sigma}} \qquad \delta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

és $\boxed{x^{\mu} = \eta^{\mu\nu} \cdot x_{\nu}}$

(a def.-ből kijön)

ekkor:

$$\boxed{\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\lambda} \eta^{\lambda\sigma} = \delta_{\rho}{}^{\sigma}}$$

(η olyan mint egy „konjugálás")

$\det \eta = -1$ $\qquad\qquad$ $\det \delta = 1$

$\Downarrow$

$$\det(\eta \Lambda \eta \Lambda^{T}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \det(\Lambda^2) = 1$$

$$(\det \Lambda)^2 = 1$$

$\det \Lambda = \pm 1$ $\qquad$ $+1$ nincsenek tükrözések

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ -1 vannak — " —

Hogyan transzformálódnak a kovariáns komponensek?

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} \cdot x^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho x'^\rho = \underbrace{\eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho \eta^{\rho\sigma}}_{\Lambda_\mu{}^\sigma} \cdot x'_\sigma$$

$$\Lambda_\mu{}^\sigma := \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho \cdot \eta^{\rho\sigma}$$

$$\boxed{x_\mu = \Lambda_\mu{}^\sigma \cdot x'_\sigma}$$

3. óra

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \cdot x'^\nu$$

$$x_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \cdot x'_\nu$$

$$\Lambda^\mu{}_\rho \cdot \Lambda_\mu{}^\sigma = \delta_\rho^\sigma$$

$$\left(\tilde{\Lambda}^T\right)^\sigma{}_\mu = \Lambda_\mu{}^\sigma$$

$$\left(\tilde{\Lambda}^T\right)^\sigma{}_\mu \Lambda^\mu{}_\rho = \delta^\sigma_\rho$$

$$\Updownarrow$$

$$\tilde{\Lambda}^T \Lambda = \mathbb{1}$$ (ortogonális ~~trafó~~)

10 feltétel a mátrixra $\Rightarrow$ 6db független komponens marad

→ 3 forgatás (xy, xz, yz síkban)

pl. $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ xy síkú forgatás

→ 3 boost (xt, yt, zt „síkokban" forgatás)

l. előző óra → hiperbolikus fv-ekkel

<u>Négyesvektorok általánosan</u> $\left(\begin{matrix} \mu, \nu, \varrho, \sigma \ldots & 0 \ldots 3 \\ i, j, k & 1 \ldots 3 \end{matrix}\right)$

- 4 db A^μ négyesvektort alkot, ha ugyanúgy transzformálódik, mint a 4-es koordináta: (pl. négyes impulzus, ...)

$$A_\mu = \Lambda^\mu_\nu A^{\nu\prime}$$

x_μ-höz hasonlóan

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$$

$$A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu$$

($\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$ l. előző óra)

- A^μ négyzete / „hossza":

$$A^2 = \eta_{\mu\nu} \cdot A^\mu \cdot A^\nu = A_\mu A^\mu$$

- Skalárszorzat:

A^μ, B^μ 4-es vektorok

$$(A \cdot B) := \eta_{\mu\nu} A^\mu \cdot B^\nu = A^\mu \cdot B_\mu = A_\mu \cdot B^\mu$$

$\boxed{\text{HF}}$ (AB) invariáns (skalár) $AB = (AB)'$

néha hasznos szétbontani:

$$A^{\mu} = (A^0, \underline{A}) \qquad A_{\mu} = (A^0, -\underline{A})$$

Tenzorok

- 16 db $A^{\mu\nu}$ számot kétindexes négyes tenzornak hívunk, ha úgy transzformálódik, mint a koordináták szorzata: $x^{\mu} \cdot x^{\nu}$, azaz:

$$A^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\ \rho} \cdot \Lambda^{\nu}_{\ \sigma} \, A^{\rho\prime} \cdot A^{\sigma\prime}$$

(mindkét koordinátáján Lorentz-trafót hajtunk végre)

- 4^n db $A^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$ számot n indexes 4-es tenzornak hívunk, ha $\forall$ indexében úgy transzformálódik, mint a koordináta (x^{μ}):

$$A^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = \Lambda^{\mu_1}_{\ \nu_1} \cdot \Lambda^{\mu_2}_{\ \nu_2} \cdots \Lambda^{\mu_n}_{\ \nu_n} \cdot A^{\nu_1\prime} \cdots A^{\nu_n\prime}$$

- Indexek „húzogatása":

$$A_{\mu}^{\ \nu} = \eta_{\mu\rho} A^{\rho\nu}$$

$$A^{\mu}_{\ \nu} = \eta_{\nu\rho} A^{\mu\rho}$$

$$A_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} A^{\rho\sigma}$$

$$A_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \cdot 1 \\ \cdot(-1) \end{pmatrix}$$ $A^{\mu\nu}$ megfelelő része mennyivel szorzódik

$$A^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{00} = A_0{}^0 = A^0{}_0 = A^{00}$$

$$A_{0i} = -A^{0i} = A^0{}_i = -A_0{}^i \qquad i = 1 \ldots 3$$

$$A_{i0} = -A^{i0} = A_i{}^0 = -A^i{}_0$$

$$A_{ij} = -A_i{}^j = -A^i{}_j = A^{ij}$$

Spec. tenzorok

- Egységtenzor: $\delta^\mu{}_\nu \cdot A^\nu = A^\mu \quad \forall A$ négyesvektorra

$$\delta^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \delta_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

ha mindkét indexet áthúzzuk, az átlós komp.-ek nem változnak

- $\eta_{\mu\rho} \cdot \delta^\rho{}_\nu = \eta_{\mu\nu}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

η és δ ugyanaz a tenzor, csak η-nál ugyanott vannak az indexek, δ-nál nem (így a megfelelő előjelváltást el kell végezni az indexhúzogatásnál).

- $A^{\mu\nu}$ szimmetrikus: $A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$ $\forall \mu,\nu \Rightarrow 10$ fgtlen komp.

- $A^{\mu\nu}$ antiszimmetrikus: $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$ $\forall \mu,\nu \Rightarrow 6$ fgtlen komp.

- Ha a 3D forgatásokat nézzük:

A^{ij} 3D tenzor (3-as tenzor) } külön viselkedik

A^{0i}, A^{j0} 3-as vektor

- $A^{\mu\nu}$ antiszimm.:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_x & a_y & a_z \\ -a_x & 0 & -b_z & b_y \\ -a_y & b_z & 0 & -b_x \\ -a_z & -b_y & b_x & 0 \end{pmatrix}$$

3-as forgatásokra a_x, a_y, a_z vektor; b_x, b_y, b_z axiálvektor (pszeudo vektor)

- Teljesen antiszimm. tenzor (ε)

$\mu,\nu = 0 \ldots 3 \Rightarrow \varepsilon$ 4 indexes

$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$: $\varepsilon^{0123} := 1 \Rightarrow \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \mu,\nu,\rho,\sigma \text{ 0,1,2,3-nak páros permutációja} \\ -1 & \text{— ′′ — páratlan — ′′ —} \\ 0 & \text{— ′′ — 0,1,2,3-nak nem permutációja (valami 2x szerepel)} \end{cases}$

A 4^4 mátrixelemből 24 db $\neq 0$
(256)

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \cdot \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -24$$

$\boxed{HF}$ kitalálni (térbeli indexek lehúzogatásánál
−1 jön le, és 3 db −||− van)

- További tulajdonságok (HF):

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \cdot \varepsilon_{\kappa\lambda\rho\sigma} = -2\left(\delta^{\mu}{}_{\kappa} \cdot \delta^{\nu}{}_{\lambda} - \delta^{\mu}{}_{\lambda} \cdot \delta^{\nu}{}_{\kappa}\right)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \cdot \varepsilon_{\kappa\nu\rho\sigma} = -6\,\delta^{\mu}{}_{\kappa}$$

Tértükrözés

- Skalár: nem vált előjelet tértükrözésre (ált.ban fiz. mennyiségek skalárok)
- Pszeudoskalár: előjelet vált −||−

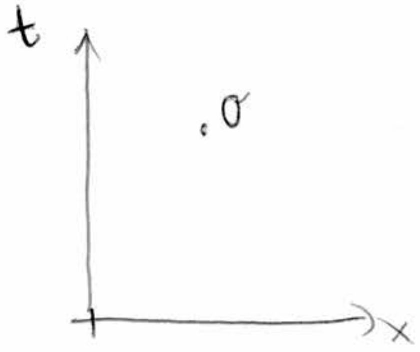
- vektor: előjelet vált a tértükrözésre
- axiálvektor (pszeudovektor): nem vált előjelet

pl. $\underline{C} = \underline{A} \times \underline{B}$ $\quad$ $\underline{A}, \underline{B}$ vektor
$\underline{C}$ axiálvektor

pl. impulzusmomentum
mágneses tér

Mezők

= téridőpontoktól függő skalár, vektor, tenzor, stb. értékű fv-ek



$$x = \Lambda x'$$
$$x' = \Lambda^{-1} x$$

→ skalármező (pl. hőmérséklet) $\quad T(\sigma) = T'(\sigma)$

koordinátákkal $\quad \underline{T(x)} = T'(x') = \underline{T'(\Lambda^{-1} x)}$

→ 4-es vektormező: $V^{\mu}(\sigma) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \cdot V'^{\nu}(\sigma)$

koordinátákkal: $V^{\mu}(x) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} V'^{\nu}(\Lambda^{-1} x)$

belül és kívül nem ugyanaz szerepel!

→ 4-es tenzormező

$$A^{\mu\nu}(x) = \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \cdot \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} A'^{\rho\sigma}(\Lambda^{-1} x)$$

Kovariáns egyenlet

Két oldalán azonosan transzformálódó mennyiség áll

pl. $A^{\mu} = B^{\mu}$

$S_1 = S_2 \qquad S_1, S_2$ skalár

$A^0 \neq S$

$A^{\mu} \neq B^{\mu}$

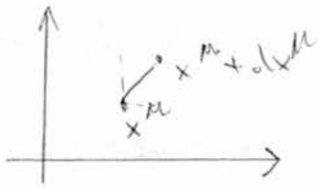
Relativitás elve

Inerciarendszerben $\forall$ természeti törvény leírható kovariáns egyenlettel (az egyenletek alakja nem változik).

4-es differenciál operátorok

$f(x)$ legyen egy skalár mező. Hogyan változik f, ha
$x^\mu \to x^\mu + dx^\mu$-t írunk

$$df = \sum_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \cdot dx^\mu$$



- df skalár
- dx^μ 4-es vektor (felső indexes)

$\Rightarrow \forall\, dx^\mu$-re igaz $\to \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \to$ alsó indexes 4-es vektorként transzformálódik

$\Downarrow$

$$\boxed{\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}} \quad \text{hasonlóan} \quad \boxed{\partial^\mu := \frac{\partial}{\partial x_\mu}}$$

általánosan is igaz: $\frac{\partial}{\partial A^\mu}$ alsó indexes

$\frac{\partial}{\partial A_\mu}$ felső indexes

(differenciálásnál az indexek helyet cserélnek)

$$\partial_\mu := \left(\frac{1}{c}\partial_t , \partial_x, \partial_y, \partial_z\right) \qquad \partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z\right)$$

$\Rightarrow$ skalár gradiense $\partial_\mu F$ 4-es vektor

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 = \Box = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta$$

d'Alembert op.

Hullámoperátor, box (kocka) operátor

skalár operátor (skalár mezőből skalárt csinál)

pl. ϕ skalármező

$\Box \phi = 0$ skaláregyenlet

megoldás $\phi(t,x) \cancel{=e}^{\,i(\omega t - \underline{k}\underline{x})}$ helyett

$\phi(x) = e^{\pm i k_\mu x^\mu}$ $\qquad$ k_μ 4-es vektor

$$\partial_\mu \phi = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\phi = \pm i k_\mu \cdot e^{\pm i k_\mu x^\mu} = \pm i k_\mu \cdot e^{\pm i k^\mu \cdot x_\mu}$$

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi = \frac{\partial}{\partial x_\mu}(\partial_\mu \phi) = -k^\mu k_\mu e^{\pm i k^\mu \cdot x_\mu} = -k_\mu k^\mu \cdot \phi$$

$\Box \phi = 0$

$\Rightarrow k_\mu \cdot k^\mu = 0 \Rightarrow k$ fényszerű

<u>HF</u>: Hogy transzformálódnak egy a) szimmetrikus v. b) antiszimmetrikus tenzor komponensei, ha x tengellyel ||-s Lorentz-transzformációra?

Kinematika

1) Négyessebesség

$\frac{dx^\mu}{dt}$ nem jó, mert dx^μ és dt másképp transzformálódik

ehelyett skalárral kell osztani.

$dt \to d\tau$ sajátidő $\quad d\tau = \frac{ds}{c}$ invariáns

⇒ Def:

$$\boxed{u^\mu := \frac{dx^\mu}{ds}}$$

négyesvektor (ívhossz szerinti derivált)

$$dx^\mu = (c\,dt, dx, dy, dz)$$

négyessebs.

u^μ világvonal érintője

$$ds = c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

$\boxed{\text{HF}}$ megmutatni, hogy $u^\mu \cdot u_\mu = 1$

4. óra

$$u^\mu \cdot u_\mu = \frac{dx_\mu\, dx^\mu}{ds^2} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1$$

2) Négyes gyorsulás

$$\boxed{a^\mu = \frac{d^2x^\mu}{ds^2} = \frac{du^\mu}{ds}}$$

4-es vektor

- tulajdonsága:

$$u_\mu \cdot u^\mu = 1 \quad / \frac{d}{ds}$$

$$\frac{du_\mu}{ds} u^\mu + u_\mu \cdot \frac{du^\mu}{ds} = 0$$

$$2 u_\mu \cdot a^\mu = 0$$

a merőleges u-ra!

(mivel $u \parallel$ világvonal érintőjével $\Rightarrow a \perp$ az érintőre)

3) <u>Egyenletesen gyorsuló mozgás:</u>

<u>def.:</u> a sajátrendszerben konstans (a) a gyorsulás

$\longrightarrow$

x tengely mentén

saját rendszerben $ds = c\,dt$

$$a^0 = \frac{d^2(ct)}{ds^2} = 0$$

$$a^1 = \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{a}{c^2} \quad \left(= \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{1}{c^2} \right)$$

$$a^2 = a^3 = 0$$

$\left(0, \frac{a}{c^2}, 0, 0\right)$ sajátrendszerben

(de ez mindig más és más koordináta rendszerben állandó 'a')

$\Downarrow$

Mi a <u>kovariáns</u> feltétele az egyenletesen gyorsuló mozgásnak?

(a^μ-vel):

$$\boxed{a_\mu a^\mu = -\frac{a^2}{c^4}}$$

(ez is ugyanúgy definiálja az egyenl. gyors. mozgást)

Labor rsz. (álló rsz.) $\longleftrightarrow$ együttmozgó rsz. (nem inercia rsz.!)

K $\qquad\qquad$ K'

↳ „adott pill.-ban éppen olyan gyorsan mozgó k. rendszer" (így minden pill.-ban egy inercia rsz.)

Lorentz-trafó

$$a^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, a^{\nu'} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,z & \mathrm{sh}\,z & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}\,z & \mathrm{ch}\,z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{c^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

↑ „laborból" nézve

$$= \frac{a}{c^2}\left(\mathrm{sh}\,z, \mathrm{ch}\,z, 0, 0\right) = \frac{a}{c^2}\left(\frac{v/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, 0, 0\right)$$

másrészt:

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{v/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, 0, 0\right)$$

$\rightarrow$ az éppen v-vel haladó együttmozgó rendszer négyessebesség.

<u>mozgásegyenlet:</u>

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{ds} \qquad ds = c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$\rightarrow$ 4 db egyenlet:

$\mu = 1$ $\qquad$ (HF: $\mu=0$ ugyanezt adja)

$$a^\mu = \frac{1}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{du^\mu}{dt}$$

$$\frac{a}{\cancel{c^2}}\,\cancel{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{1}{\cancel{c}\,\cancel{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{v/\cancel{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = a$$

$$\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = at + \text{konst.}$$

$$\boxed{v = \frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}}$$

ha $t=0$-ban $v=0$ (konst $=0$)

→ a laborból a sebessége a gyorsuló objektumnak ilyennek látszik ($a=$ áll → ha t nő, v egyre kevésbé nő)

- ha $at \ll c$ $v = at$
- ha $a \cdot t \gg c$ $v \approx c$ (de $v \leq c$ mindig)

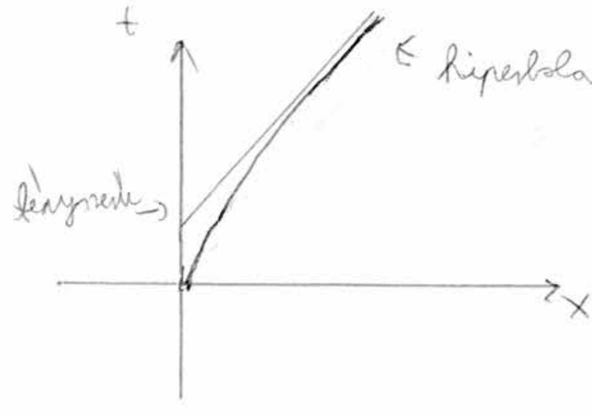
– Integrálás:

$$\underline{\underline{x}} = x_0 + \int_0^t v\,dt = \underline{\underline{x_0 + \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right)}}$$

- Ha $x_0 = 0$

$$\left(\frac{ax}{c^2}+1\right)^2 = 1 + \frac{a^2t^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{ax}{c^2}+1\right)^2 - \frac{a^2t^2}{c^2} = 1 \quad \text{Hiperbola}$$



ha $t \gg \frac{c}{a}$

$x \sim ct$

– sajátidő: miközben a labor rr.-ben t idő telik el,

mennyi a sajátidő?

$$\tau = \underbrace{\int_0^t dt \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}_{(dt')} = \int_0^t dt \sqrt{1 - \frac{a^2t^2}{c^2 + \frac{a^2t^2}{c^2}}} = \int_0^t dt \sqrt{\frac{1}{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}} =$$

$$= \frac{c}{a} \cdot \operatorname{arsh}\left(\frac{at}{c}\right)$$

pl. $a = g = 10 \frac{m}{s^2}$

$x = 100$ fényév $= 9{,}46 \cdot 10^{17}$ m

$t = ?$ (Földről) $\qquad \tau = ?$ (űrhajóból)

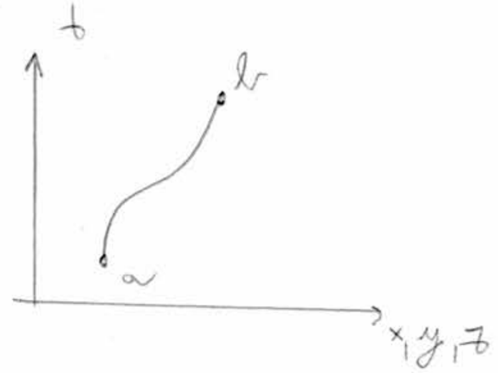
$t = 100{,}95$ év $\qquad \tau = 5{,}09$ év

(kb. 1 év alatt
eléri a fénysebességet,
utána annyival halad)

Relativisztikus mechanika

1) Legkisebb hatás elve

a) szabad részecske



- Mi az hatás?

• Legyen invariáns (skalár) → pl. ívhossz (lehetne ívhossz^2 is, ...)

↑ és a pálya ~~tulajdonsága~~

$$S = -\alpha \int ds$$

↑ akkor, hogy S-nek minimuma legyen, ha $\int$ maximális: $\alpha > 0$

• Mennyi az α? (nemrelativisztikus limesz)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

L : Lagrange-fv.

L nem skalár! → adott k.r.-ben kell kiintegrálni

$$ds = c\,dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$S = -\alpha c \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

L

$$L = -\alpha \cdot c \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$\frac{v}{c} << 1 \Rightarrow$ sorfejtés:

Msz.: $\sqrt{1-\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} + O(\varepsilon^2)$

$$\frac{v}{c} << 1 \to L = -\alpha c \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\cdot\frac{1}{2} + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right)\right) = -\alpha c + \frac{\alpha}{2c} v^2 + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{2} m v^2 + \text{konst}$$

$L = T - V$

szabad rész. $v = \text{konst}$

$\Rightarrow \quad \frac{\alpha}{c} = m \qquad \alpha = mc$

konstans lefixálódik! (elrontaná S invarianciáját, ha egy konstans tagot integrálnánk ki dt szerint)

Tehát:
$$\boxed{\begin{aligned} L &= -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ S &= -mc\int ds \left(= \int L\, dt\right) \end{aligned}}$$
$\to$ L nem invariáns!

(kényszert ha konstanssal tesszük be, az is elrontja az invarianciát $\Rightarrow$ kényszer általában csak egy rendszerben igaz)

b) Energia és impulzus (adott koordinátarendszerben igazak)

- (Ált.) impulzus $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ (nem invariáns)

szabad részecskére:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{m v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$v << c \qquad p_i \approx m v_i$

- Mi a helyzet $\underline{F} = m\underline{a}$-val? $\left(F_i = \frac{dp_i}{dt}\right)$

. nézzük p_i idstruderiváltját 2 esetben:

a) $|v| = \text{áll}$ $a \perp v$

$$\frac{dp_i}{dt} \overset{HF}{=} \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{dv_i}{dt}$$

b) v iránya áll $\underline{v} = v\underline{n}$

$$\frac{dp_i}{dt} = m \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \overset{HF}{=} \frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \frac{dv_i}{dt}$$

= két együttható különbözik → m jelentése kérdéses

– <u>Hamilton-fv</u>

• energia:

$$\boxed{E = p_i \dot{q}_i - L} = \underline{p}\,\underline{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} =$$

$$= \boxed{\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

$v = 0 \to E = mc^2$ nyugalmi energia

(amiatt jött be, mert L-ben a konstans fix, nem választhatom meg úgy, hogy $v=0$-ra $E=0$ legyen)

<u>összetett rendszer, ami nyugalomban van</u>

$$mc^2 \neq \sum_i m_i c^2 \text{, hanem}$$

$$mc^2 = \sum_i m_i c^2 + \frac{1}{2}\sum_{ij} V_{ij}$$ ← a kölcsönhatási energia is ad tömeget!

↑ mozgási en. most nincs (nyugalom)

$$m \neq \sum_i m_i$$

tömeg nem megmaradó, hanem az energia marad meg!

- <u>Hamilton-fv:</u>

(impulzus a változója!!!) $\rightarrow$ impulzus most nemtriviálisan függ a sebességtől!

$H = \underline{p}\underline{v} - L$ (p, q a változók)

$$\underline{\underline{H = \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = c\sqrt{p^2+m^2c^2}}}$$

ha $p \ll mc$ $\quad H \simeq mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \dots$

$\uparrow$

itt is van egy fix konstans

– <u>összefüggés</u>

$$\underline{p} = \frac{m\underline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\boxed{\underline{p} = \frac{E\underline{v}}{c^2}}$$

<u>All:</u> Ez $\forall$ $\frac{v}{c}$ esetén igaz, $\frac{v}{c} \to 1$-re is!

ha $v = c \Rightarrow pc = E$

$\frac{v}{c} \to 1 \qquad p, E \to \infty$

$\Downarrow$

- ha $v = c$, p és E csak úgy lehet véges, ha $m = 0$ (ilyenkor értelmetlenek p és E)

$E, p = \frac{0}{0}$ ha $m = 0$

- (de $m \neq 0$-ra $\underline{p}$ és E divergál) ha $v \to c$

c) Négyes impulzus (ez már nem csak adott k. rendszerben igaz)

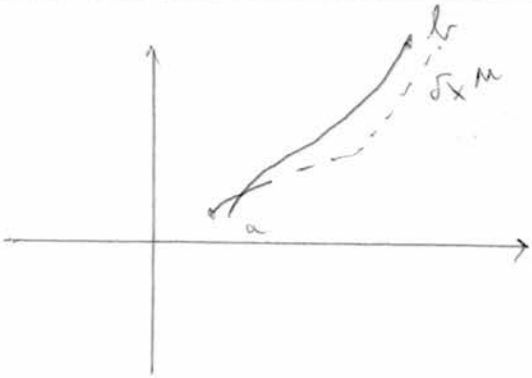
Hatás variációja $S = -mc \int_a^b ds$

$\delta S = -mc\, \delta \int_a^b ds \qquad ds = \sqrt{dx_\mu \cdot dx^\mu}$

$$\delta S = -mc \int_a^b \frac{dx_\mu \delta dx^\mu}{ds} = mc \int u_\mu \delta x^\mu$$

↓ parc. ∫

$$\boxed{\delta S = mc\, u_\mu \cdot \delta x^\mu \Big|_a^b + mc \int_a^b \delta x^\mu \cdot \frac{du_\mu}{ds}\, ds}$$



(határ is változhat!)

— mozgásegyenlet: határokon $\delta x^\mu = 0$

$\delta S = 0$

$$\int \delta x^\mu \cdot a_\mu \cdot ds = 0 \qquad \forall\, \delta x^\mu$$

$$a_\mu = 0 \qquad u_\mu = \text{konst}$$

→ határok változnak: $\delta x_a^\mu = 0 \qquad \delta x_b^\mu \overset{!!}{=} \delta x^\mu \neq 0$

és a mozgásegyenletek teljesülnek ($u^\mu = \text{konst}$)

$\delta S = -mc\, u_\mu \cdot \delta x^\mu$

Def.:

→ négyes impulzus: $\boxed{p^\mu = -\partial^\mu S = -\frac{\partial S}{\partial x_\mu}}$ (hogyan változik a hatás, ha a határok változnak, de a ME teljesül)

• szabad részecskék:

$$p^\mu = m \cdot c \cdot u^\mu \quad \text{4-es vektor}$$

komponensei:

$$\underline{\underline{p^\mu}} = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m\underline{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = \underline{\underline{\left(\frac{E}{c}, \underline{p} \right)}}$$

5. óra

(folyt.)

energia és impulzus egy négyesvektort alkotnak, Lorentz-trafóval transzformálódnak.

$$p^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \cdot p^{\nu\prime}$$

• spec. eset:

$v = v_x \quad K \Leftrightarrow K'$ sebessége

$$p_x = \frac{p_x' + \frac{v}{c^2} E'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_y = p_y', \quad p_z = p_z', \quad E = \frac{E' + v p_x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

• $u_\mu u^\mu = 1 \Rightarrow \boxed{p_\mu p^\mu = m^2 c^2}$ $\quad \boxed{E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4}$

tömeghéj feltétel

d) Négyes erő: $\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt}$

$$F^\mu := \frac{dp^\mu}{d\tau} = mc\, \frac{du^\mu}{d\tau} = mc\, a^\mu$$

$$a^\mu \cdot u_\mu = 0 \rightarrow F^\mu \cdot u_\mu = 0$$

komponensei (HF)

$$F^\mu = \left(\frac{\underline{F}\,\underline{v}}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \, , \, \frac{\underline{F}}{c\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$_0$ komponens az erő által végzett munkával kapcsolatos

2) Megmaradó mennyiségek:

Négyesvektorok eltolása szimmetria

$\Downarrow$

$\frac{\partial S}{\partial x^\mu}$ megmaradó mennyiség

$\Downarrow$

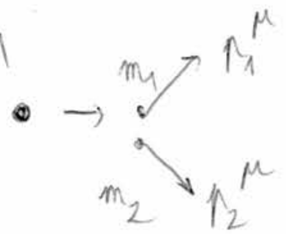
p^μ megmaradó mennyiség (E és $\underline{p}$ is megmarad)

Mostantól: $c=1$ ← (a fizikai állandóknak azért van 1-től külön értéke, mert az általuk összekötött mennyiségeket egymástól függetlenül definiáltuk → ha másképp def.-juk az egységet (pl. $1s := \frac{1m}{1\,\text{fényseb.}}$), értékük lehet 1)

3 dolog:
- E megmarad
- $\underline{p}$ megmarad
- tömeghéj feltétel $(E^2 - p^2 = m^2)$

3) Részecske bomlása:

a) M tömegű részecske elbomlik m_1, m_2 tömegűekre



M nyugalmi rendszerében kezdetben $p^\mu = (M, 0, 0, 0)$

$$p_1^\mu = (E_1, \underline{p}_1)$$
$$p_2^\mu = (E_2, \underline{p}_2)$$

• E megmarad:

$$M = E_1 + E_2 \Rightarrow \quad E_1 \geq m_1$$
$$E_2 \geq m_2$$
$$\boxed{M \geq m_1 + m_2} \rightarrow \text{a bomlás kinematikai feltétele}$$

Ha ez nem teljesül, akkor $\Delta E = m_1 + m_2 - M$ energiát be kell tenni

• imp. megmarad:

$$\underline{p}_1 + \underline{p}_2 = 0 \qquad \underline{p}_1 = -\underline{p}_2$$
$$p_1^2 = p_2^2$$

• tömeghéj felt.:

$$E_1^2 - m_1^2 = E_2^2 - m_2^2$$

$$E_1^2 - E_2^2 = m_1^2 - m_2^2 \qquad E_1 + E_2 = M$$

$$(E_1 - E_2)(E_1 + E_2) = m_1^2 - m_2^2$$

$$E_1 - E_2 = \frac{m_1^2 - m_2^2}{M}$$

$$\underline{\underline{E_1 = \frac{m_1^2 - m_2^2 + M^2}{2M}}}, \quad \underline{\underline{E_2 = \frac{m_2^2 - m_1^2 + M^2}{2m}}}$$

(az irányukat nem tudjuk megmondani)

b) Ugyanez fordítva: m_1 és m_2 tömegű részecskék ütközéséből mekkora M tömeg keletkezhet?

(TKP rendszerben)

Def.: tömegközépponti (TKP) rendszer: az, ahol $\boxed{\sum_i \underline{p}_i = 0}$

$$\sum_i p_i^\mu = (E, 0, 0, 0) = (M, 0, 0, 0)$$

- Spec. eset (általános HF): m_2 nyugalomban van

$\xrightarrow{m_1,\, E_1}$ $\quad\quad$ $\cdot\, m_2$

$(E_1, \underline{p}_1)$ $\quad\quad$ $(m_2, 0)$

teljes 4-es impulzus:

$$p^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu = (\underbrace{E_1 + m_2}_{E_2 = m_2}, \underline{p}_1)$$

tömeghéj felt. $E_1^2 - \underline{p}_1^2 = m_1^2 \to \underline{p}_1^2 = E_1^2 - m_1^2$

$$\underline{\underline{M^2}} = p_\mu p^\mu = (E_1 + m_2)^2 - p_1^2 = \cancel{E_1^2} + 2E_1 m_2 + m_2^2 - \cancel{E_1^2} + m_1^2 = \underline{\underline{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 m_2}}$$

— konkrét példa: protonok

• m_{proton}: $m_2 = 1\ \mathrm{GeV}$

$$E_1 = 7\ \mathrm{TeV}$$

$$\frac{M^2}{\mathrm{GeV}^2} = 1+1+2\cdot 7000 = 14\,002$$

$$\underline{\underline{M = 118{,}3\ \mathrm{GeV}}} \qquad (\mathrm{Higgs} \approx 125\ \mathrm{GeV})$$

• de ha

$$\overset{m_1}{\longrightarrow} \qquad \overset{m_2}{\longleftarrow}$$
$$E_1 \qquad\quad E_2$$

eleve tömegközépponti rendszerben

$\Downarrow$

vagyunk, a keletkező részecske nem kap sebességet!

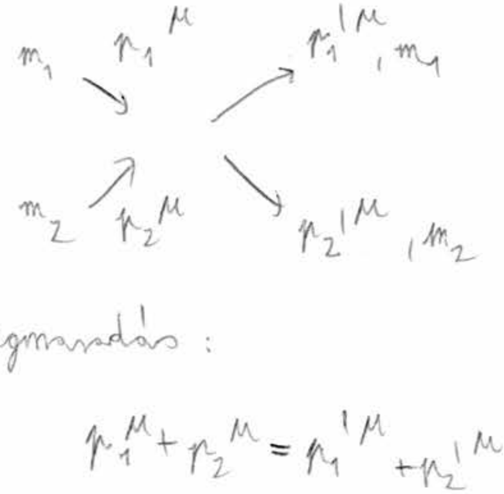
$$E_1 = E_2 \quad p_1 = -p_2 \Rightarrow \underline{\underline{M}} = E_1 + E_2 = 2E_1 = \underline{\underline{14\ \mathrm{TeV}}}$$

$\Rightarrow$ több mint 100x eltérés van a két tömeg között

HF: klasszikusan (4x max. eltérés)

(ok: klasszikusan $E \sim p^2$, relativisztikusan $E \sim p$)

4) <u>Rugalmas szórás</u> (nem változik a részecskék száma/típusa)



(nyugalmi tömegek nem változnak)

megmaradás:

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu$$

Átrendezve:

$$p_2^\mu + p_1^\mu - p_1'^\mu = p_2'^\mu \quad /^2$$

$$2m_1^2 + m_2^2 + 2\left(p_1^{\mu}\cdot p_{2\mu} - p_1^{\mu}\cdot p'_{1\mu} - p_2^{\mu}\cdot p'_{1\mu}\right) = m_2^2$$

$\underbrace{p_1^2}_{m_1^2} + \underbrace{p_1'^2}_{m_1^2} = 2m_1^2$

$$m_1^2 + p_1^{\mu}\cdot p_{2\mu} - p_1^{\mu}\cdot p'_{1\mu} - p_2^{\mu}\cdot p'_{1\mu} = 0 \qquad \text{(I)}$$

hasonlóan:

$$m_2^2 + p_1^{\mu}\cdot p_{2\mu} - p_1^{\mu}\cdot p'_{2\mu} - p_2^{\mu}\cdot p'_{2\mu} = 0 \qquad \text{(II)}$$

— m_2 nyugalomban van:

$p_1^{\mu} = (E_1, p_1)$ $\qquad p_2^{\mu} = (m_2, 0)$

$p_1'^{\mu} = (E_1', p_1')$ $\qquad p_2'^{\mu} = (E_2, p_2')$

$$p_1^{\mu}\cdot p_{2\mu} = E_1 m_2$$

$$p_1^{\mu}\cdot p'_{\mu} = E_1 E_1' - p_1 p_1' \cos\theta_1$$

$$p_2^{\mu}\cdot p'_{1\mu} = m_2 \cdot E_1'$$

(I) $\rightarrow$ $$\cos\theta_1 = \frac{E_1'(E_1+m_2) - E_1 m_2 - m_1^2}{p_1\cdot p_1'}$$

$$p_1^{\mu}\cdot p'_{2\mu} = E_1 E_2' - p_1 p_2' \cos\theta_2$$

$$p_2^{\mu} p'_{2\mu} = m_2 E_2^2$$

(II) $\rightarrow$ $$\cos\theta_2 = \frac{E_2'(E_1+m_2) - E_1 m_2 - m_2^2}{p_1 p_2'} = \frac{(E_1+m_2)(E_2'-m_2)}{p_1 p_2'}$$

• Tömeghéj feltétel:

$$p_1 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2} \qquad p_1' = \sqrt{E_1'^2 - m_1^2} \qquad p_2' = \sqrt{E_2'^2 - m_2^2}$$

→ megoldható E_2'-re (E_1'-re is) (HF)

$$E_2' = m_2 \frac{(E_1 + m_2)^2 + (E_1^2 - m_1^2)\cos^2\theta_2}{(E_1+m_2)^2 - (E_1^2 - m_1^2)\cos^2\theta_2} \quad , E_1' = \ldots$$

(egyszerre az energiákat és a szögeket ennyi adatból nem tudjuk megadni)

• $m_1 = 0$ határeset (<u>Compton-szórás</u>)

$$E_1 = p_1 \qquad E_1' = p_1'$$

$$\cos\theta_1 = \frac{E_1'(E_1 + m_2) - E_1 m_2}{E_1 \cdot E_1'}$$

$$E_1 E_1' \cos\theta_1 = E_1'(E_1 + m_2) - E_1 m_2$$

$$E_1 E_1'(\cos\theta_1 - 1) - E_1' m_2 = -E_1 m_2$$

$$\boxed{E_1' = \frac{E_1}{\frac{E_1}{m_2}(1 - \cos\theta_1) + 1}} \quad , \; E_2' = \ldots$$

• mekkora az energiaátadás?

TKP rendszerben $(\Sigma \underline{p} = 0)$

kezdetben $(E_1, \underline{k})$ $\qquad (E_2, -\underline{k})$

ütközés után $(\varepsilon_1', \underline{k}')$ $(\varepsilon_2', -\underline{k}')$

- HF: (tömeghéj felt.-ből) $\varepsilon_1' = \varepsilon_1$ $\varepsilon_2' = \varepsilon_2$

$$|\underline{k}'| = |\underline{k}|$$

$\Rightarrow$ a szórás a χ szöggel leírható

$$p_1^{\mu} \cdot p_{2\mu}' = \varepsilon_1^2 - \underline{k} \cdot \underline{k}' = \varepsilon_1^2 - k^2 \cos\chi$$

$$= k^2 + m_1^2 - k^2 \cdot \cos\chi = k^2 (1 - \cos\chi) + m_1^2$$

- emlékeztető:

$$p_1^{\mu} p_{2\mu} = E_1 m_2 \qquad p_2^{\mu} \cdot p_{1\mu}' = m_2 E_1'$$

$$\rightarrow \cancel{m_1^2} + E_1 m_2 - m_2 E_1' - k^2 (1 - \cos\chi) - \cancel{m_1^2} = 0$$

$$E_1' - E_1 = -\frac{k^2}{m_2} (1 - \cos\chi)$$

(ebben az egyenletben nyugalmi rendszerbeli (E_1, E_1') és TKP -\|- (χ) paraméterek is szerepelnek)

- Mennyi a k^2 az E_1, E_2-vel kifejezve?

$$p_1^{\mu} \cdot p_{2\mu} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{labor rr.}}}{E_1} m_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + k^2$$

$$E_1 m_2 - k^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \sqrt{m_1^2 + k^2} \sqrt{m_2^2 + k^2}$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{m_2^2 (E_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 - m_2 E_1}$$

vagyis

$$E_1' = E_1 - \frac{m_2 (E_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2 m_2 E_1} \cdot (1 - \cos\chi)$$

E megmarad:

$$E_1 + m_2 = E_1' + E_2'$$

$$E_2' = \underbrace{m_2}_{E_2} + \boxed{\frac{m_2\left(E_1^2 - m_1^2\right)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_1}\left(1-\cos\chi\right)}$$

$$\parallel$$

$$\Delta E$$

- ΔE az energiaátadás:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \chi = 0^\circ}}{0} \leq \Delta E \leq 2\frac{m_2\left(E_1^2 - m_1^2\right)}{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2E_1} = \Delta E_{max}$$

maximális, ha $\cos\chi = -1$ $\quad \chi = 180^\circ \to$ visszaszórás

0 , ha $\cos\chi = 1$ $\quad \chi = 0 \to$ nincs szórás

$\to$ Ha $m_1 \ll m_2$

és $E_1 \gg m_1$ $\quad \dfrac{\Delta E_{max}}{E_1} \approx \dfrac{2m_2E_1}{m_2^2 + 2m_2E_1}$

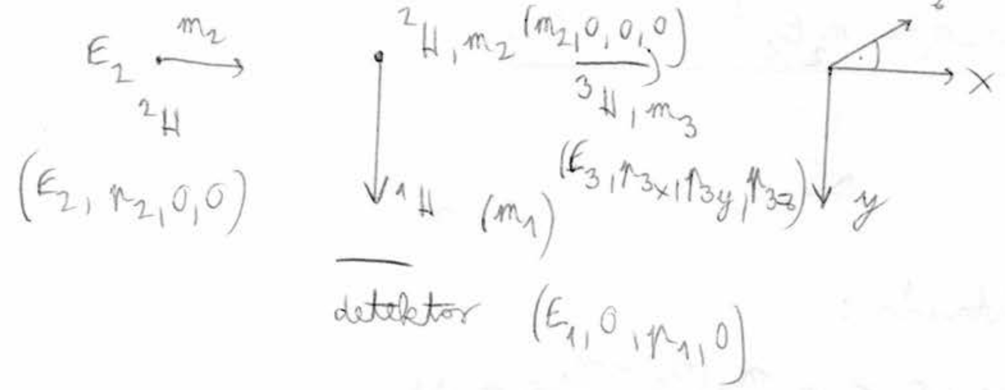
$\to$ $E_1 \gg m_2$ $\quad \dfrac{\Delta E_{max}}{E_1} \to 1$

$m_1 \ll m_2$ esetén is tetszőleges sok energiát át tud adni a bejövő részecske! (klasszikusan nem $\to$ HF: $m_1 \ll m_2$-re $\frac{\Delta E_1}{E_1} \to 0$)

5) Rugalmatlan ütközés

Kísérlet:

$$^2H + {}^2H \to {}^1H + {}^3H$$



$m_3 = ?$

E, p megmaradás, tömeghéj feltétel

- en.: $E_2 + m_2 = E_1 + E_3$
- imp.:
  - x: $p_2 = p_{3x} + 0$ $\qquad p_{3x} = p_2$
  - y: $0 = p_{3y} + p_1$ $\qquad p_{3y} = -p_1$
  - z: $0 = p_{3z} + 0$ $\qquad p_{3z} = 0$
- tömeghéj felt.:

$$E_2^2 - p_2^2 = m_2^2$$

$$E_1^2 - p_1^2 = m_1^2$$

$$E_3^2 - \left(p_{3x}^2 + p_{3y}^2 + p_{3z}^2\right) = m_3^2$$

$$(E_2 - E_1 + m_2)^2 - \left(p_2^2 + p_1^2\right) = m_3^2$$

$$m_3^2 = \underline{E_2^2} + m_2^2 + E_1^2 + 2\left(E_2 m_2 - E_1 E_2 - E_1 m_2\right) - \underline{p_2^2} - p_1^2 = m_1^2 + 2m_2^2 + 2\left(E_2 m_2 - E_1 E_2 - E_1 m_2\right) =$$

$$= m_1^2 + 2\left(m_2 + \underset{\text{bejövő}}{E_2}\right)\left(m_2 - \underset{\text{kimenő}}{E_1}\right)$$ ← ha ismerjük E_1, E_2-t, m_3 meghatározható

5. óra

6) Imp. momentum

- klasszikusan: $\underline{J} = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{p}_i$ (axiálvektor)
- relativisztikus általánosítás: imp. momentum = forgatási szimmetria esetén megmaradó mennyiség

• Legyen egy 4D-s forgatás infinitezimálisan (kis Lorentz-trafó): $x^{\mu'} - x^{\mu}$

$\uparrow$ új koord. $\uparrow$ régi koord.

• $x^{\mu'} - x^{\mu}$ kicsi lin. fv.-e x^{ν}-nek

$$x^{\mu'} - x^{\mu} = \delta\Omega^{\mu\nu} x_{\nu}$$

$\delta\Omega^{\mu\nu}$ infinitezimális számok (HF: boost esetén mi a $\delta\Omega^{\mu\nu}$?)

(Lorentz-egységmátrix)

• az ívelem invarianciája miatt: $x_{\mu'} \cdot x^{\mu'} = x_{\mu} \cdot x^{\mu}$

$$\Rightarrow (x_{\mu} + \delta\Omega_{\mu\nu} \cdot x^{\nu}) \cdot (x^{\mu} + \delta\Omega^{\mu\nu} \cdot x_{\nu}) = x_{\mu} \cdot x^{\mu} + 2\,\delta\Omega_{\mu\nu} \cdot x^{\mu} \cdot x^{\nu} + \underbrace{\mathcal{O}(\delta\Omega^2)}_{\text{def. szerint kicsi}} = x_{\mu} \cdot x^{\mu}$$

$$\Rightarrow \delta\Omega_{\mu\nu} \cdot \underbrace{x^{\mu} \cdot x^{\nu}}_{\text{szimm.}} = 0 \quad \forall x^{\mu}, x^{\nu}\text{-re}$$

$\Rightarrow$ $\delta\Omega_{\mu\nu}$ antiszimmetrikus, azaz $\delta\Omega_{\mu\nu} = -\delta\Omega_{\nu\mu}$

• $\delta S = -\sum_i p_i^{\mu} \cdot \delta x_{\mu} \Big|_a^b =$

$\uparrow$
hatás megváltozása

$$= -\sum_i p_i^{\mu} \cdot \delta\Omega_{\mu\nu} \cdot x_i^{\nu} \Big|_a^b = \underbrace{-\delta\Omega_{\mu\nu}}_{\text{antiszimm.}} \cdot \left(\sum_i p_i^{\mu} \cdot x_i^{\nu} \Big|_a^b \right) \quad \forall \delta\Omega_{\mu\nu}\text{-re}$$

forgatás szimmetria $\Rightarrow \delta S = 0 \Rightarrow$ az antiszimm. része ( )-nek 0 :
(hatás csak relatív helyzetektől függ)

(vagyis (...) szimmetrikus)

$$\underbrace{\sum_i \left(x_i^{\mu} \cdot p_i^{\nu} - x_i^{\nu} \cdot p_i^{\mu} \right)}\Big|_a^b = 0$$

$$J^{\mu\nu} = \sum_i x_i^{\mu} \cdot p_i^{\nu} - x_i^{\nu} \cdot p_i^{\mu}$$

$J^{\mu\nu}\big|_b = J^{\mu\nu}\big|_a \Rightarrow J^{\mu\nu}$ megmaradó mennyiség $\forall \mu, \nu$-re

$\Rightarrow J^{\mu\nu}$ impulzusmomentum tenzor

$\mathcal{J}^{\mu\nu}$ komponensei:

$$\mathcal{J}^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{J}^{01} & \mathcal{J}^{02} & \mathcal{J}^{03} \\ -\mathcal{J}^{01} & 0 & \underline{\mathcal{J}}^{z} & -\underline{\mathcal{J}}^{y} \\ -\mathcal{J}^{02} & -\underline{\mathcal{J}}^{z} & 0 & \underline{\mathcal{J}}^{x} \\ -\mathcal{J}^{03} & \underline{\mathcal{J}}^{y} & -\underline{\mathcal{J}}^{x} & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{J}^{01}, \mathcal{J}^{02}, \mathcal{J}^{03}$ egy 3-as vektort alkotnak ($\underline{I}$)

$$\underline{I} = \sum_i \left(t \cdot \underline{p}_i - \frac{\varepsilon_i \underline{r}_i}{c^2} \right) \qquad I_k = \frac{1}{c} \mathcal{J}^{0k}$$

$\underline{I}$ megmaradó (mert $\mathcal{J}$ minden része megmarad), $\underline{I}$ = konst.

$\sum_i \varepsilon_i = \varepsilon$ = konst.

$$\underbrace{t \cdot c^2 \cdot \frac{\sum_i \underline{p}_i}{\sum_i \varepsilon_i}}_{\underline{V}} - \underbrace{\frac{\sum_i \varepsilon_i \underline{r}_i}{\sum_i \varepsilon_i}}_{\underline{R}} = \text{konst.}$$

$t \cdot \underline{V} - \underline{R}$ = konst.

$\underline{R} = -\text{konst} + t\underline{V}$

$\underline{R}$ helyvektorú pont $\underline{V}$ sebességgel mozog

$$\underline{R} = \frac{\sum_i \varepsilon_i \underline{r}_i}{\sum_i \varepsilon_i}$$ → hasonló a tömegközéppont nemrelat. definíciójához:

ha $\underline{v}_i << c$ → $\frac{\sum_i m_i \underline{r}_i}{\sum_i m_i}$

↓

tömegközéppont (energiaközéppont) relativisztikus definíciója fontos: $\underline{R}$ nem egy 4-es vektor 3-as része

→ TKP nem relativisztikusan invariáns fogalom

(HF: sebesség $\underline{V}$ → 4-es sebesség 4-es vektor)

7) Nulla tömegű részecskék (fotonok)

a) $c := 1$

$m \to 0 \qquad p, E \to 0$

$v \to 1\ (c)$

$E = |\underline{p}|$

b) ~~foton~~ nyugalmi tömege: $\sqrt{E^2 - p^2} = 0$, de a foton energiát (tömeget) szállít

- Hogyan változik M_1, M_2?

(4-es) Energiamegmaradás:

$$M_1 = E_1 + E$$
$$0 = p_1 - E$$

$$E_1^2 - p_1^2 = (M_1 - E)^2 - E^2 = M_1^2 + E^2 - 2M_1E - E^2 =$$
$$= M_1^2 - 2M_1E < M_1^2$$

Másik oldal (HF)

c) Planck-féle hipotézis:

foton energiája $E = h\nu$ $\qquad h$: Planck-áll.

ν: frekvencia

– Lehet-e ez egy természeti törvény (kovariáns-e az egyenlet)?

- mozogjon a foton az x tengely irányába

$$p^{\mu} = (E, E, 0, 0)$$

- K' rsz. az x tengely mentén v sebességgel mozog

$$p^{\mu'} = (E', E', 0, 0)$$

$$p^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu}\, p'^{\nu}$$

$$\Rightarrow \underline{E} = \operatorname{ch}\chi \cdot E' + \operatorname{sh}\chi\, p'_x = \operatorname{ch}\chi \cdot E' + \operatorname{sh}\chi\, E' = \underline{E' \cdot e^{\chi}}$$

- Hullámegyenlet:

$$\Box \phi = 0 \qquad \phi \sim e^{i k^{\mu} x_{\mu}} = e^{i(\omega t - \underline{k} x)}$$

$$k^{\mu} = (\omega, \underline{k}) = \left(\frac{\omega}{c}, \underline{k}\right)$$

→ v irányba mozgó ~~foton~~ → x irányba terjedő hullám:

$$k^{\mu} = (\omega, k, 0, 0) \qquad \Box \phi = 0 \qquad k_{\mu} k^{\mu} = 0$$

$$\Rightarrow \omega = |k| = k$$

$$\omega' = k'$$

transzf. szabály:

$$k^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \cdot k'^{\nu}$$

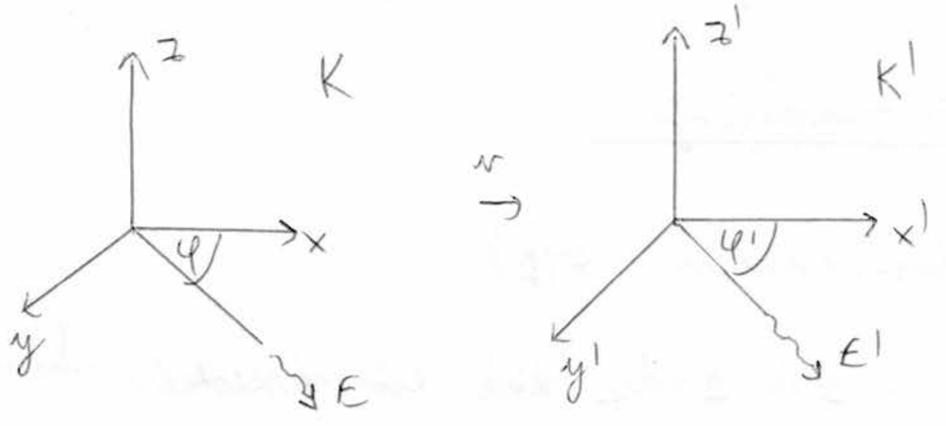
$$\underline{\omega} = \operatorname{ch}\chi\, \omega' + \operatorname{sh}\chi \cdot k' = \underline{\omega' e^{\chi}}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \nu = \nu' \cdot e^{\chi} \quad \Rightarrow \quad \frac{E}{\nu} = \frac{E'}{\nu'} = h$$ ⇒ kovariáns az egyenlet ✓

(ebből még nem köv., hogy igaz is)

d) Doppler-effektus:

$\nu \sim E$ ugyanúgy transzformálódnak $\Rightarrow$ nézzük E-t



– foton xy síkban x tengellyel φ szöget zár be K-ban

· K-ban: $p^\mu = (E, p\cos\varphi, p\sin\varphi, 0)$

· K'-ben: $p^{\mu'} = (E', p'\cos\varphi', p'\sin\varphi, 0)$

– Lorentz-trafó:

$$E = E'\,\mathrm{ch}\,\chi + (p'\cos\varphi')\,\mathrm{sh}\,\chi$$
$$p\cdot\cos\varphi = E'\,\mathrm{sh}\,\chi + (p'\cos\varphi')\,\mathrm{ch}\,\chi$$

fény: $E = p \quad E' = p'$

$$\Rightarrow E = E'\left(\mathrm{ch}\,\chi + \cos\varphi'\cdot\mathrm{sh}\,\chi\right) = E'\underbrace{\mathrm{ch}\,\chi}_{\text{rel. effektus}}\Big(1 + \cos\varphi'\cdot\underbrace{\mathrm{th}\,\chi}_{\frac{v}{c}}\Big) =$$

$$E = \frac{E'\left(1 + \cos\varphi'\cdot\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \nu = \nu'\cdot\frac{\left(1 + \frac{v}{c}\cos\varphi'\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E\cos\varphi = E'\,\mathrm{sh}\,\chi + E'\cos\varphi'\,\mathrm{ch}\,\chi = E'\cdot\mathrm{ch}\,\chi\left(\mathrm{th}\,\chi + \cos\varphi'\right)$$

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{th}\chi + \cos\varphi'}{1+\cos\varphi' \operatorname{th}\chi} = \frac{v/c + \cos\varphi'}{1+\frac{v}{c}\cdot\cos\varphi'}$$

8) Eloszlásfv-ek transzformációja

- részecskenyaláb imp. eloszlása $f(\underline{p})$

  $dN = f(\underline{p})\, d^3p$ a $\underline{p}$ és $\underline{p}+d\underline{p}$ közé eső részecskék száma

- Kérdés: hogyan transzformálódik $f(p)$, ha áttérünk egy másik koord. rendszerre

  Irányelv: dN nem változik (részecskeszám invariáns) $\Rightarrow$

  d^3p transzformációját nézzük meg

$$d^3p = dp_x\, dp_y\, dp_z$$

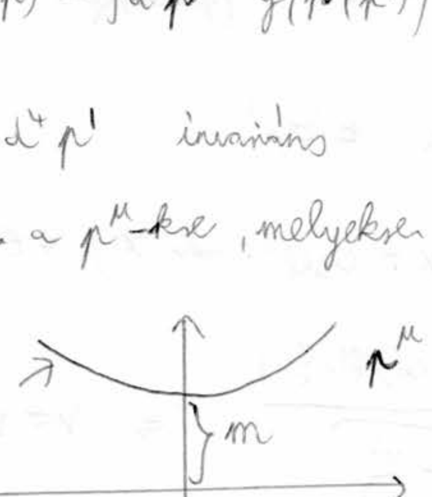
· $p^\mu \to p^{\mu'}$

$$\int d^4p\; g(p) = \int d^4p'\; g(p(p'))\cdot \underbrace{|\det\Lambda|}_{1}$$

$$\Rightarrow d^4p = d^4p' \quad \text{invariáns}$$

· Integráljunk csak azokra a p^μ-kre, melyekre $p^0 > 0$

és $p^2 = m^2 \leftarrow$ konstans



csak erre a görbére integrálunk a teljes tér helyett

$2 \times$ inv. mérték: $2\, d^4p\, \delta(p^2-m^2) \cdot \Theta(p^0)$

áll.: ez pont arra a görbére vett integrált adja

(nem biz.)

ez is invariáns: $\to d^4p$ inv.

$\to p^2$ inv.

$\to \Theta(p^0)$ inv

$$\Rightarrow 2 d^4p\, \delta(p^2-m^2)\, \Theta(p^0) = 2d^4p' \cdot \delta(p'^2-m^2)\, \Theta(p^{0\prime})$$

- $\delta(p^2-m^2)$ kiírva:

$$\delta(p^2-m^2) = \delta(p^{0\,2} - \underline{p}^2 - m^2) = \delta(f(p_0))$$

emlékeztető: $\delta(f(x)) = \dfrac{\sum_i \delta(x-x_i)}{\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_i}}$, ahol $f(x_i)=0$

$\Rightarrow x_i$-k zérushelyek

$f(p^0)$ gyökei $\quad p^{0\,2} - \underline{p}^2 - m^2 = 0$

$$p^0 = \pm\sqrt{\underline{p}^2+m^2} = \pm E$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial p^0}\right| = |2p^0| = 2E$$

$$\Rightarrow \delta(p^{0\,2} - \underline{p}^2 - m^2) = \frac{1}{2E}\left(\delta(p^0+E) + \delta(p^0-E)\right)$$

$$\Rightarrow 2\, d^4p \cdot \delta(p^2-m^2)\, \Theta(p^0) = \cancel{2} d^4p \cdot \frac{1}{\cancel{2}E}\left(\cancel{\delta(p^0+E)} + \delta(p^0-E)\right)\Theta(p^0) =$$

$= dp^0\, d^3p \cdot \frac{\delta(p^0-E)}{E} = \frac{d^3p}{E}$ invariáns

$\Rightarrow \quad \frac{d^3p}{E} = \frac{d^3p'}{E'}$ $\quad d^3p$ így transzformálódik

$\Rightarrow$ dN invariáns: $\quad \underline{\underline{f'(p')}} = f(p)\cdot\frac{E}{E'} = \underline{\underline{f(p)\cdot\frac{p_0}{p_0'}}}$

(ezért szokták a $\frac{d^3p}{2p_0}$ integrálokat felírni → ez invariáns)

b) fázistér eloszlás:

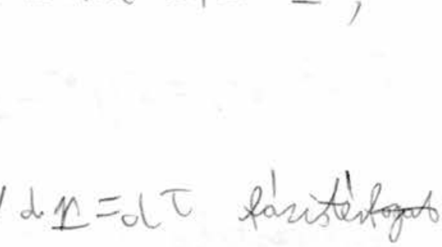
$dN = f(r,p)\cdot \overbrace{dV}^{\text{térfogati integrál}}\cdot d^3p$: részecskék száma $r, r+dr$, $p, p+dp$ között

– dN invariáns → hogyan transzformálódik $dV\,dp = d\tau$ fázistérfogat?

K, K'

legyen a $p, p+dp$ ~~tartományba~~ eső m tömegű részecskék (ha más a tömeg, arra ugyanígy külön megnézzük) sebessége v ill. v'

K_0 legyen az együttmozgó rendszer



Lorentz-kontrakció miatt

$dV = dV_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ $\qquad$ energiák: $E = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$dV' = dV_0\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}$ $\qquad$ $E' = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}$

$$dV\,E = dV_0\,m = dV'E'$$

$$\frac{d^3p}{E} = \frac{d^3p'}{E'}$$

$$\underline{\underline{dV\,d^3p = dV'\,d^3p'}}$$

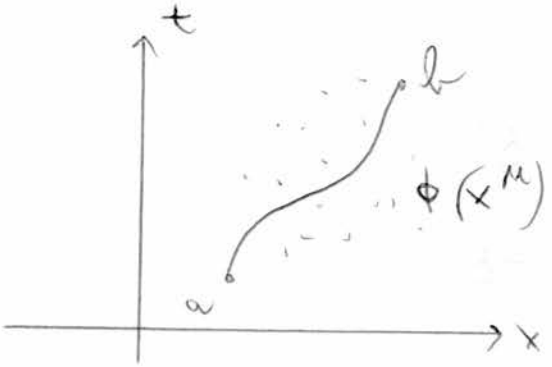
$dV\,d^3p = d\tau$ invariáns!

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{f(\underline{r}, p)}}$ is invariáns

Kölcsönhatások

Kölcsönhatás külső térrel

1)



$\underline{\text{skalármező}}$: $\phi(x)$

($\forall$ téridő pontban)

$S_{\text{kölcsönh.}}(\text{hatás}) = \text{const.} \cdot \int_a^b \phi(x)\,ds$

HF: Mire vezet?

$\phi = \phi_0 + \varphi(x)$ $\quad \varphi_x$

ϕ_0 konstans, az jelenlétet

$S = -mc\int ds + \text{const.} \cdot \int \phi(x)\,ds = \rightarrow$

$= -mc\int ds + \text{const.} \cdot \phi_0 \int ds + \text{const.} \cdot \int \varphi(x)\,ds$

Higgs-effektus klasszikusan: ha van egy konstans skalármező, amivel kölcsönhat a részecske, kap tömeget!

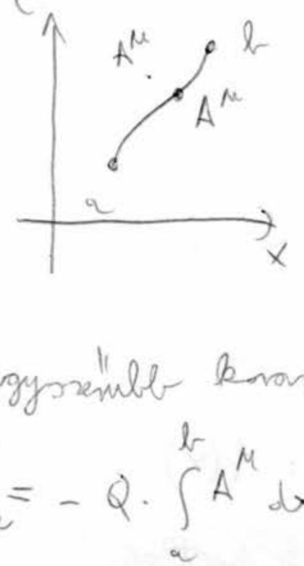
7. óra

2) Részecske mozgása négyesvektor erőtérben $(c=1)$

- $$S = \underbrace{S_r}_{\text{rész. hatása}} + \underbrace{S_{r,e}}_{\text{rész.-erőtér k.h. hatása}} + \underbrace{S_e}_{\text{erőtér hatása (később)}}$$

- $S_r = -m \int ds$

- 4-es vektormező: $A^\mu(x)$



• legegyszerűbb kovariáns hatás:

$$S_e = -Q \cdot \int_a^b A^\mu \, dx_\mu \qquad A^\mu = (\phi, \underline{A})$$

$$A_\mu = (\phi, -\underline{A})$$

Q: kölcsönhatás erőssége

(most pont a töltés)

→ Lagrange-fv.

→ kovariáns variációszámítás

- mértékszimmetria:

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f$$ → ha egy gradienst adunk A-hoz, a hatás konstanssal változik

⇓

a mozgásegyenletek nem változnak

$$S' = \underbrace{S - Q \cdot \int_a^b \partial^\mu f \, dx_\mu}_{\Delta S}$$

$$\Delta S = -Q\left(f(b) - f(a)\right) = \text{konstans (határok nem változnak)}$$

→ mozgásegyenletek nem változnak

- Lagrange-formalizmus:

$$A^\mu dx_\mu = A^0 dx^0 - A^i dx^i = \phi \, dt - \underline{A} \, d\underline{x}$$

$$S = -m \int ds + Q \int \underline{A} \, dx - Q \int \phi \, dt =$$

msz.: $d\underline{x} = \frac{dx}{dt} dt = \underline{v} \, dt$

$$= -m \int \sqrt{1-v^2} \, dt + Q \int (\underline{A}\underline{v}) \, dt - Q \int \phi \, dt = \int L \, dt$$

$$L = -m\sqrt{1-v^2} + Q \, \underline{A}\underline{v} - Q \cdot \phi$$

- ~~Ált~~ Általános (kanonikus) impulzus:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{(három-imp.)}}}{\underline{p}} = \frac{\partial L}{\partial \underline{v}} = \frac{m\underline{v}}{\sqrt{1-v^2}} + Q\underline{A} = p_{\text{szabad}} + Q \cdot \underline{A}$$ ⇒ $\underline{p}$ függ $\underline{A}$-tól

- Hamilton-fv.

$$E = \underline{v} \cdot \frac{\partial L}{\partial \underline{v}} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2}} + \cancel{Q \cdot \underline{A}\underline{v}} + \overbrace{m\sqrt{1-v^2}}^{\frac{m(1-v^2)}{\sqrt{1-v^2}}} - \cancel{Q\underline{A}\underline{v}} + Q\phi$$

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} + Q\phi$$

$$(E - Q\cdot\phi)^2 = \frac{m^2}{1-v^2} = m^2 + \overbrace{(p - QA)^2}^{\frac{m^2 v^2}{1-v^2}}$$

↓

Hamilton (energia impulzussal kifejezve)

$$\boxed{H = \sqrt{m^2 + (\underline{p} - Q\underline{A})^2} + Q\cdot\phi}$$

- Mozgásegyenletek (Euler – Lagr.)

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x_i}$$ L a mezőkön keresztül függ a koordiná- tától

$$\text{b.o.: } \frac{dp_i}{dt} = \frac{dp_{x_i}}{dt} + Q\,\overbrace{\left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\cdot \underbrace{v_j}_{\frac{\partial x_j}{\partial t}}\right)}^{\frac{dA_i}{dt}}$$

$$\text{j.o.: } \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q\left(\sum_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\cdot v_j - \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)$$

$$\underset{\underset{\frac{dp_i}{dt}}{\parallel}}{\frac{dp_{x_i}}{dt}} = Q\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + Q\left(\sum_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)v_j\right)$$

mn.:

$$\sum_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)v_j = \sum_{j,k,l,m} \varepsilon_{ijk}\, v_j\, \underbrace{\varepsilon_{klm}\,\partial_l A_m}_{(\mathrm{rot}\,\underline{A})_k} = (v \times (\mathrm{rot}\,\underline{A}))_i$$

$$\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt} = Q\cdot\left\{\underbrace{\left(-\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}\right)}_{\underline{E}} + \underline{v}\times \underbrace{\mathrm{rot}\,\underline{A}}_{\underline{B}}\right\}$$

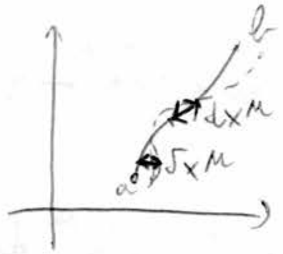
$$\underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt} = Q\left(\underline{E}+\underline{v}\times\underline{B}\right)$$ Lorentz-erő

↳ az imp. megváltozása ugyanaz,

de $\underline{F}\neq m\underline{a}$ relativisztikusan!

— Ugyanez 4-es formalizmusban:

• $S = \int_a^b \left(-m\,ds - QA_\mu\, dx^\mu\right)$



• $\delta S = \delta\int_a^b\left(-m\,ds - QA_\mu\, dx^\mu\right) =$

$d\,\delta x^\mu = \delta\, dx^\mu$

(nem biz.)

$$= -\int_a^b\Big(\underbrace{m u_\mu\, d\delta x^\mu + QA_\mu\, d\delta x^\mu}_{\text{parc. int.}} + Q\,\delta A_\mu\, dx^\mu\Big)$$

$ds = \sqrt{dx_\mu\, dx^\mu}$

$$\delta ds = \frac{2\,dx_\mu\, \delta dx^\mu}{2\,ds} = u_\mu\cdot\delta\cdot dx^\mu$$

$$\left(-m\cdot u_\mu\cdot\delta x^\mu - QA_\mu\cdot\delta x^\mu\right)\Big|_a^b + \int_a^b\Big(m\,du_\mu\cdot\delta x^\mu + Q\,dA_\mu\cdot\delta x^\mu - \underbrace{Q\,\delta A_\mu\, dx^\mu}_{Q\cdot\delta A_\nu\cdot dx^\nu}\Big)$$

$\int(\quad)\,\delta x^\mu\, ds$ alakúra akarjuk megváltoztatni a tagokat

$$\delta A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \cdot \delta x^\nu \qquad d A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

(δ: a pálya megváltoztatása miatti változás

d: változás egy adott pályán való arrébbmozdulás hatására)

$$d u_\mu = \frac{d u_\mu}{ds} \cdot ds \qquad dx^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \cdot ds = u^\mu \cdot ds$$

$$\Downarrow$$

$$d A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \cdot u^\nu \cdot ds$$

$$\delta A_\nu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \delta x^\mu$$

$$\Rightarrow \delta S = \left(- m u_\mu \cdot \delta x^\mu - Q A_\mu \cdot \delta x^\mu \right) \Big|_a^b + \int_a^b \Big(m \frac{d u_\mu}{ds} + Q \cdot \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \cdot u^\nu -$$

$$- Q \cdot \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \cdot u^\nu \Big) \delta x^\mu ds$$

- Mozgásegyenletek: $\delta x^\mu \big|_{a,b} = 0$

$$\int_a^b \left\{ m \frac{d u_\mu}{ds} + Q \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) u^\nu \right\} \delta x^\mu ds = 0 \qquad \forall \delta x^\mu \text{-re}$$

$$m \frac{d u_\mu}{ds} = Q \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) u^\nu$$

$$F_{\mu\nu} := \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

térerősség tenzor antiszimmetrikus:

$$m a_\mu = \boxed{m \frac{du_\mu}{d\tau} = Q F_{\mu\nu} u^\nu}$$

(Hf: ellenőrizni, hogy tényleg ugyanazt adja, mint a hármas-formalizmus)

- $F_{\mu\nu}$ elemei: $A_\mu = (\phi, -\underline{A})$

$$F_{00} = F_{ii} = 0$$

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = E_i$$

$$F_{ij} \quad \text{pl. } F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = -\frac{\partial A_2}{\partial x_1} + \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = -(\mathrm{rot}\,\underline{A})_3 = -B_3 = -B_z$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

- Általános 4-es impulzus:

változtassuk a „b" végpontot, miközben a mozgásegyenletek teljesülnek

$$p^\mu = -\frac{\partial S}{\partial x_\mu} = m u^\mu + Q \cdot A^\mu$$

$$\delta S = -\underbrace{(m u_\mu + Q A_\mu)}_{p_\mu} \cdot \delta x^\mu \Big|_a^b + \dots$$

· Mértékszimmetria (konkrétan a mi esetünkre)

$$A'^{\mu} = A^{\mu} + \partial^{\mu} f$$

mértéktranszformáció

$$A'_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu} f$$

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \overbrace{\partial_\mu \underbrace{\partial_\nu f}_{\Delta A_\nu} - \partial_\nu \underbrace{\partial_\mu f}_{\Delta A_\mu}}^{0} = F_{\mu\nu}$$

$= F_{\mu\nu}$, azaz $\underline{E}$ és $\underline{B}$ nem változnak ilyen mértéktranszformációra

térerősségek transzformációja

K $\quad$ K'

$\longrightarrow x$

v_x $\quad$ χ rapiditás

$$F_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^{\rho} \cdot \Lambda_\nu{}^{\sigma} \cdot F'_{\rho\sigma}$$

$$\Lambda^{\mu}{}_{\rho} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & \operatorname{sh}\chi & & \\ \operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \Lambda_{\mu}{}^{\rho} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & -\operatorname{sh}\chi & & \\ -\operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\Lambda}^{\sigma}{}_{\nu} = \Lambda_{\nu}{}^{\sigma} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & -\operatorname{sh}\chi & & \\ -\operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \Lambda F' \tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \underbrace{\operatorname{ch}\chi}_{:=c} & \underbrace{-\operatorname{sh}\chi}_{:=s} & & \\ -\operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_x' & E_y' & E_z' \\ -E_x' & 0 & -B_z' & B_y' \\ -E_y' & B_z' & 0 & -B_x' \\ -E_z' & -B_y' & B_x' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & -\operatorname{sh}\chi & & \\ -\operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c & & & \\ - & c & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -sE_x' & cE_x' & E_y' & E_z' \\ -cE_x' & sE_x' & -B_z' & B_y' \\ -cE_y' - sB_z' & sE_y' + cB_z' & 0 & -B_x' \\ -cE_z' + sB_y' & sE_z' - cB_y' & B_x' & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & E_x' & cE_y'+sB_z' & cE_z'-sB_y' \\ -E_x' & 0 & -sE_y'-cB_z' & -sE_z'+cB_y' \\ -cE_y'-sB_z' & sE_y'+cB_z' & 0 & -B_x' \\ -cE_z'+sB_y' & sE_z'-cB_y' & B_x' & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$E_x = E_x' \qquad E_y = E_y' \operatorname{ch}\chi + B_z' \operatorname{sh}\chi \qquad E_z = E_z' \operatorname{ch}\chi - B_z' \operatorname{sh}\chi$

$B_x = B_x' \qquad B_y = B_y' \operatorname{ch}\chi - E_z' \operatorname{sh}\chi \qquad B_z = B_z' \operatorname{ch}\chi + E_y' \operatorname{sh}\chi$

→ az x komponensek nem változnak

→ az y és z -"- ben E és B keverednek, a saját tér $\operatorname{ch}\chi$-vel, a másik tér $\operatorname{sh}\chi$-vel áll

<u>térerősségek invariánsai</u>

skalárok $F_{\mu\nu}$-ből: • $F_\mu{}^\mu = 0$ (spur)

• $F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu}$ = invariáns $= 2\boxed{(\underline{B}^2 - \underline{E}^2)}$

HF

• $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$ = invariáns $= 2F_{\mu\nu} \cdot \tilde{F}^{\mu\nu} = -8 \cdot \boxed{\underline{E} \cdot \underline{B}}$

$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \cdot F_{\rho\sigma}$ HF: komponensei $\underline{E} \leftrightarrow \underline{B}$ helyet cserél

(F duálisa)

- Következmények:

- ha egy rendszerben $\underline{E} \perp \underline{B}$ $\rightarrow$ $\forall$ rendszerben $^{\text{mer.}}$ $(\underline{E}\,\underline{B}=0)$
- ha egy rendszerben $|E|=|B|$ $\rightarrow$ $\forall$ rendszerben van.

- ha legalább az egyik invariáns $\neq 0$ $\quad \underline{E}\,\underline{B} \neq 0$

  $\rightarrow$ $\exists$ olyan k.rsz. ahol $\underline{E} \parallel \underline{B}$
- ha $\underline{E}\,\underline{B}=0 \rightarrow \exists$ olyan rsz., ahol $E=0$ v. $B=0$

  B^2-E^2 előjelétől függ

  $\rightarrow$ ha $\ominus \Rightarrow B=0$

  $\rightarrow$ ha $\oplus \Rightarrow E=0$

Az elektromágneses tér egyenletei

Maxwell-egyenletek (vákuumban)

- ezek már relativisztikusan invariánsak, mert ezek vezettek a rel. elmélethez

1. $\operatorname{rot} \underline{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$
2. $\operatorname{div} \underline{B} = 0$
3. $\operatorname{div} \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$
4. $\operatorname{rot} \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$

$\rightarrow$ $F_{\mu\nu}$-vel fogjuk felírni őket

8. óra

Az elektromágn. tér egyenletei (folyt.)

1) $\text{rot}\, \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$ 2.) $\text{div}\, \underline{B} = 0$

3) $\text{div}\, \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ 4.) $\text{rot}\, \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$

vákuumban ($c=1$) $\mu_0 \cdot \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} = 1$ 4) $\text{rot}\,\underline{B} = \frac{1}{\varepsilon_0}\underline{j} + \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$

- forrásos egyenletek (3,4)

• 3-4. következménye:

$\text{div}\,\text{rot}\,\underline{B} = 0 \Rightarrow \text{div}\,\underline{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (kontinuitási egyenlet)

$\rightarrow$ feltétel $\rho, \underline{j}$-re

• 3) $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

$\partial_i E_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\partial_i F_{0i} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $F_{00} = 0$, $\partial_0 F_{00} = 0$

$\partial_0 F_{00} - \partial_i F_{0i} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

$\partial^\mu F_{0\mu} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ $(\partial^\mu = \partial_0, -\partial_i)$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\partial^\mu F_{\mu 0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho}}$$

• 4) pl. 1. komponens (x)

$(\text{rot}\,\underline{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon_0} j_x + \frac{\partial E_x}{\partial t}$

$$\partial_2 F_{21} - \partial_3(-F_{31}) = \frac{1}{\varepsilon_0} j_1 + \partial_0 F_{01}$$

$$\partial_0 F_{01} - \underbrace{\partial_1 F_{11}}_{0} - \partial_2 F_{21} - \partial_3 F_{31} = -\frac{1}{\varepsilon_0} j_1$$

$$\partial^\mu F_{\mu 1} = -\frac{1}{\varepsilon_0} j_1$$

$y, z \Rightarrow \partial^\mu F_{\mu i} = -\frac{1}{\varepsilon_0} j_i$

$\Downarrow$

- összevonva az így kapott 2 egyenletet:

$$\boxed{\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{1}{\varepsilon_0} j_\nu}$$

ahol $j_\nu = (\rho, -j_i)$ négyesáram

$j^\nu = (\rho, j_i)$

$$\underbrace{\partial^\nu \partial^\mu}_{\substack{\text{szimm. op.} \\ \mu,\nu \text{ cseréjére}}} \underbrace{F_{\mu\nu}}_{\substack{\text{antiszimm.} \\ \mu,\nu \text{ cseréjére}}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \partial^\nu j_\nu$$

$\boxed{\partial^\nu j_\nu = 0}$ kontinuitási egyenlet

– Forrásmentes egyenletek:

Ha van A_μ : $\underline{B} = \mathrm{rot}\,\underline{\ }$

$\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$ $\Rightarrow$ automatikusan megoldja 1, 2-t

$F_{\mu\nu}$-vel átírjuk fel:

2) $\partial_1 F_{32} + \partial_2 F_{13} + \partial_3 F_{21} = 0$

$\rightarrow \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{21} = 0$

1) x komp.:

$$\partial_2 F_{03} - \partial_3 F_{02} + \partial_0 F_{32} = 0$$

$$\partial_0 F_{23} + \partial_2 F_{30} + \partial_3 F_{02} = 0$$
$$\partial_0 F_{13} + \partial_1 F_{30} + \partial_3 F_{01} = 0$$
$$\partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} = 0$$

$\Rightarrow \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \qquad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$

(ekvivalens 1,2 Maxwell-egyenletekkel)

Ha bevezetjük $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ → (ebben $\underline{E}$ és $\underline{B}$ helyet cserél)

$\Rightarrow \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$

= Maxwell-egyenletek $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \partial^\mu F_{\mu\nu} &= \frac{1}{\varepsilon_0} j_\nu \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned}}$$

<u>Megoldások</u>

- Tfh. $\exists A_\mu(x) \rightarrow \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$ (most fordítva közelítjük meg a problémát: nem a potenciálos egyenletekből indulunk ki, hanem a térerősséges egyenletekből)

$\rightarrow \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha(\partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma A_\beta) + \partial_\beta(\partial_\gamma A_\alpha - \partial_\alpha A_\gamma) +$
$+ \partial_\gamma(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = 0 \rightarrow$ forrásmentes egyenletek teljesülnek

$$\partial^\mu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \frac{1}{\varepsilon_0} j_\nu$$

$$\boxed{\Box A_\nu - \partial_\nu \underbrace{\partial^\mu A_\mu} = \frac{1}{\varepsilon_0} j_\nu}$$

ha ez nem lenne, egyszerűbbek lennének az egyenleteink.

DE A_μ nem egyértelmű:

$A_\mu' = A_\mu + \partial_\mu f$ $\quad f(x)$ tetsz. skalármező $\quad$ mértéktranszformáció

$\Rightarrow F_{\mu\nu}' = F_{\mu\nu} \Rightarrow$ az egyenletek ugyanazok $\quad$ mérték szabadság

• Lehet-e olyan f-t választani, hogy $\partial^\mu A_\mu' = 0$ legyen?

$$\partial^\mu A_\mu + \partial^\mu \partial_\mu f = 0$$

$$\Box f = -\partial^\mu A_\mu \qquad \Box f = g(x)$$

Mindig van megoldása (pl. Green-fv.-el), ráadásul egyértelmű is.

$\Rightarrow \exists f$, amivel elérhető, hogy $\partial^\mu A_\mu = 0$

$\rightarrow$ Lorentz-mérték

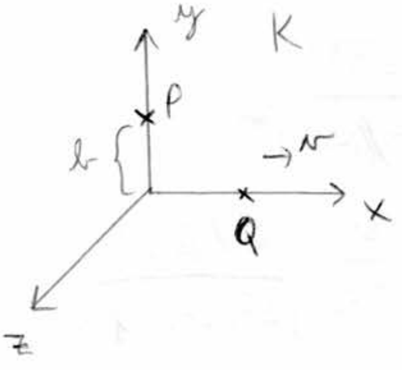
• Maxwell-egyenletek Lorentz-mértékben:

$$\boxed{\Box A_\nu = \frac{1}{\varepsilon_0} j_\nu}$$

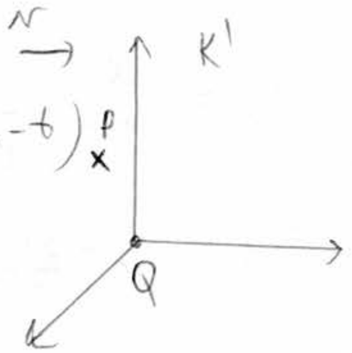
$\Rightarrow \exists$ megoldása (Green-fv.) $\rightarrow A_\nu$ tudni fogja a mértékfeltételt

$\Rightarrow$ találunk egy egyértelmű megoldást $\Rightarrow$ tényleg létezik A_μ

Mozgó töltés EM tere



(így vesszük fel a k.r.-t)



A töltés $t=0$-ban az origóban volt.

Megoldás: átmegyünk egy olyan k.r.-be, ahol nyugalomban van, majd visszatranszformáljuk a megoldást

- P koordinátái K'-ben:

K	K'
t	$t' = t\cdot \mathrm{ch}\chi - x\cdot \mathrm{sh}\chi$
$x=0$	$x' = x\,\mathrm{ch}\chi - t\,\mathrm{sh}\chi = -t\,\mathrm{sh}\chi$
$y=b$	$y' = y = b$
$z=0$	$z' = z = 0$

most másik irányba transzformálunk!

- K'-ben álló töltés $\Rightarrow$ sztatikus tér

$$\underline{B}' = 0 \qquad |\underline{E}'| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r'^2}$$ sugár irányú

a tér P-ben: $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = b^2 + t^2\mathrm{sh}^2\chi$

$$|\underline{E}'| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{b^2+t^2\mathrm{sh}^2\chi}$$

$$\frac{(x',y',z')}{r'} = \frac{\underline{r}'}{r'}$$ ($\underline{r}'$ irányú egységvektor)

$$E_x' = \frac{x'}{r'}\cdot|\underline{E}'| = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{t\cdot\mathrm{sh}\chi}{(b^2+t^2\mathrm{sh}^2\chi)^{3/2}}$$

$$E_y' = \frac{y'}{r'}|\underline{E}'| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{b}{(b^2+t^2\mathrm{sh}^2\chi)^{3/2}}$$

$$E_z' = \frac{z'}{r'}\cdot|\underline{E}'| = 0$$

Lorentz-trafó K-ba

$$E_x = E_x' = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{t\,\mathrm{sh}\,\chi}{\left(b^2+t^2\,\mathrm{sh}\,\chi\right)^{3/2}} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{t\left(v/\sqrt{1-v^2}\right)}{\left(b^2+t^2 v^2/(1-v^2)\right)^{3/2}}$$

$$E_y = E_y'\,\mathrm{ch}\,\chi + B_z'\,\mathrm{sh}\,\chi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{b\,\mathrm{ch}\,\chi}{\left(b^2+t^2\,\mathrm{sh}^2\chi\right)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{b/\sqrt{1-v^2}}{\left(b^2+t^2v^2/(1-v^2)\right)^{3/2}}$$

$$E_z = E_z'\,\mathrm{ch}\,\chi - B_y'\cdot\mathrm{sh}\,\chi = 0$$

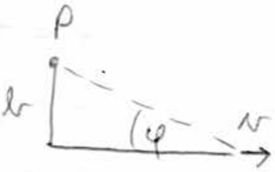
$$B_x = B_x' = 0$$

$$B_y = B_y'\,\mathrm{ch}\,\chi - E_z'\,\mathrm{sh}\,\chi = 0$$

$$B_z = B_z'\,\mathrm{ch}\,\chi + E_y'\,\mathrm{sh}\,\chi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{b\,\mathrm{sh}\,\chi}{\left(b^2+t^2\,\mathrm{sh}^2\chi\right)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{b\,v/\sqrt{1-v^2}}{\left(b^2+t^2v^2/(1-v^2)\right)^{3/2}}$$

→ Ha $v \ll c$ $\quad r' \approx r \quad \left(b^2+t^2\,\mathrm{sh}^2\chi\right)^{3/2} \approx r^3$

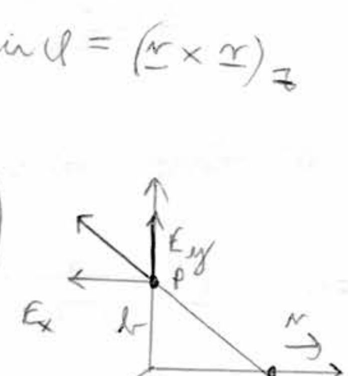
- $B_z = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{bv}{r^3}$ c-t visszaírva



$$B_z = \frac{Q\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{(\underline{v}\times\underline{r})_z}{r^3} \leftarrow bv = vr\sin\varphi = (\underline{v}\times\underline{r})_z$$

Biot-Savart-tv.

- K-ban $\dfrac{E_x}{E_y} = -\dfrac{t}{b}\,\mathrm{th}\,\chi = -\dfrac{tv}{b} = -\left(\dfrac{r_x}{r_y}\right)$



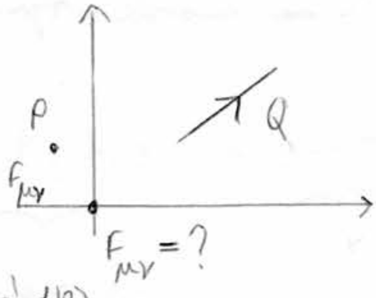
⇒ E sugárirányú $\underline{E} \parallel \underline{r}$, de nem izotróp!

<u>HF</u>: $b = r\sin\varphi$
$vt = r\cos\varphi$ $\Rightarrow |E|(r, \varphi) = ?$

Hf. másik megoldás

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \quad \text{(antiszimm.)}$$

$F^{\mu\nu}$ mitől függhet?



- u^μ (töltés 4-es sebessége)
- $x^\mu = x^\mu_P - x^\mu_Q$ (4-es távolságtól)
- mástól nem

csak így lehet antiszimm. 4-es tenzort csinálni

$$F^{\mu\nu} = \left(x^\mu u^\nu - x^\nu u^\mu\right) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{skalár}}}{f}\left(x_\mu x^\mu,\ x_\mu u^\mu,\ \underset{1}{\cancel{u_\mu u^\mu}}\right)$$

$$\Rightarrow F^{\mu\nu} = \left(x^\mu u^\nu - x^\nu u^\mu\right) \cdot f\left(x_\mu x^\mu,\ x_\mu u^\mu\right)$$

Mi az f? a nyugalmi rsz.-ből:

ny. rsz. $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{tenzorstruktúra} \\ \text{kijön}}}{u^\mu = (1, 0, 0, 0)} \rightarrow f$ alakja kijön

Klasszikus térelmélet

1) $x(t) \to \phi_k(\underline{x}, t)$ Mezők időbeli fejlődését akarjuk leírni:

$$S = \int dt\, L \Rightarrow S = \int \underbrace{dt\, d^3\underline{x}}_{d^4x}\, \underbrace{\mathcal{L}\,(\underline{x}, t, \phi_k, \partial\phi_k)}_{\text{Lagrange-sűrűség}}$$

(a $d^3\underline{x}\,\mathcal{L}\,(\underline{x}, t, \phi_k, \partial\phi_k)$ rész együtt: L)

2) $\mathcal{L} = \mathcal{L}\,(\phi_k, \partial_\mu \phi_k, \cancel{x})$

Feltesszük, hogy

- x^μ-től nem függ (téridő homogenitása, vagyis az eltolási invariancia miatt → ha eltoljuk a rendszert, $\mathcal{L}$ ne változzon)

- magasabb deriváltaktól (pl. $\partial_\mu \partial^\mu \phi_k$) nem függ

$$S = \int d^4x\ \mathcal{L}\,(\phi_k, \partial_\mu \phi_k)$$

$S \to$ skalár, $\mathcal{L}$: skalármező

3) Mik a mozgásegyenletek?

$\delta S = 0$ variációszámítás

→ feltesszük, hogy a mezők a végtelenben lecsengenek

($\phi_k, \partial_\mu \phi_k \to 0$ ha $x_i \to \infty$) (ezek a mezők anyaggal kapcsolatosak → nincs végtelen sok anyagunk)

9. óra

Klasszikus térelmélet (folyt.)

1-2) Legkisebb hatás elve, Euler-Lagr.-egyenlet, mozgásegyenlet: $\delta S=0$

$\mathcal{L}$ = Lagrange-sűrűség

$$S=\int dt\, L \qquad L=\int d^3x\, \mathcal{L}$$

$S[\phi]=\int d^4x\, \mathcal{L}(\phi_k, \partial_\mu \phi_k)$ Tfh magasabb deriváltaktól nem függ $\mathcal{L}$, S

$\delta S=0 \leftarrow$ mozgásegyenletek (pontszerű rész.: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial L}{\partial x}$ )

3) $\phi_k(x_\mu)$: tfh. minimalizálja a hatást: $\delta S=0$

$$\phi_k(x_\mu)\to \phi_k(x_\mu)+\delta\phi_k(x_\mu)\equiv \phi'_k(x_\mu)$$

$$\delta S=0$$

$$S(\phi'_k)-S(\phi_k)=\int d^4x\, \mathcal{L}(\phi_k+\delta\phi_k, \partial_\mu\phi_k+\partial_\mu\delta\phi_k)=\circledast$$

$\int d^4x\, \mathcal{L}(\phi_k, \partial_\mu\phi_k)$

$*\ \phi'_k=\phi_k+\delta\phi_k$

$*\ \partial_\mu\phi'_k=\partial_\mu\phi_k+\partial_\mu\delta\phi_k$

$$⊛ = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \delta\phi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_k} \cdot \partial_\mu \delta\phi_k \right) = \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \cdot \delta\phi_k + \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \cdot \partial_\mu \delta\phi_k =$$

$$= \int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \cdot \delta\phi_k + \underbrace{\int d^4x\, \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \cdot \delta\phi_k \right)}_{\overset{0}{\Uparrow}} - \int d^4x\, \partial_\mu \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \cdot \delta\phi_k =$$

- Feltesszük, hogy a ϕ_k terek / mezők ∞-ben lecsengenek

$$= \int d^4x \left[\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)}}_{0} \right] \cdot \delta\phi_k = \delta S = 0$$

$\uparrow$ $\forall\, \delta\phi_k$-ra

- Tehát ha ϕ_k minimalizálja a hatást, akkor:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} = 0 \qquad \text{Euler-Lagrange-mozgásegyenlet}$$

- Megjegyzések:

$\mathcal{S}$ adott, DE S nem teljesen jól meghatározott

$$\int d^4x\, \mathcal{L} \to \int d^4x \left[\mathcal{L} + \partial^\mu f_\mu \right]$$

$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \partial^\mu f_\mu$ nem változtatja meg a mozgásegyenleteket

4) Energia-impulzus tenzor

pontrész.: $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ $\quad x(t) \to \phi_k(x_\mu)$

$\dot{x}(t) \to \partial_\mu \phi_k(x)$

$H = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L$ az energia relativisztikusan nem skalár!

$$\Rightarrow \boxed{T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \cdot \partial^\nu \phi_k - \eta^{\mu\nu} \cdot \mathcal{L}}$$

$\eta^{00} = 1$

$\eta^{ii} = -1$

$T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi_k)} \cdot \partial^0 \phi_k - \mathcal{L}$ energiasűrűség

Lesz-e most is valami megmaradás?

$\partial_\mu T^{\mu\nu} = ?$

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \cdot \partial^\nu \phi_k - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \right] =$$

$\mathcal{L}(\phi_k, \partial_\mu \phi_k, \cancel{x_k})$

$\Leftarrow$ nem függ explicite x-től

$$= \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \cdot \partial^\nu \phi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \cdot \partial_\mu \partial^\nu \phi_k - \partial^\nu \mathcal{L} =$$

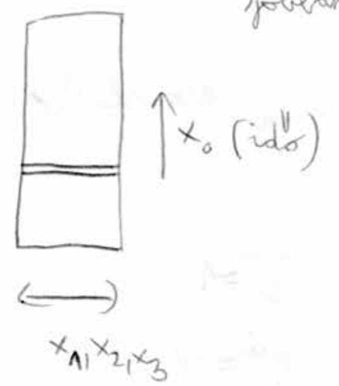
(használjuk a mozgásegyenletet ϕ-re) $\to \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k}$

$$= \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_k} \cdot \partial^\nu \phi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_k)} \cdot \partial_\mu \partial^\nu \phi_k}_{= \partial^\nu \mathcal{L}} - \partial^\nu \mathcal{L} = 0$$

$\Rightarrow$ Ha ϕ megoldja a mozgásegyenleteket:

$$\rightarrow \boxed{\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0} \quad \text{megmaradó áram}$$

Jobban szeretjük az időben állandó tagokat:



x_0 = fix szeleten

$$0 = \int d^3x\, \partial_\mu T^{\mu\nu} = \int d^3x \left(\partial_0 T^{0\nu} + \partial_i T^{i\nu}\right) =$$

$$= \partial_0 \int d^3x\, T^{0\nu} + \underbrace{\int d^3x\, \partial_i T^{i\nu}}_{=0} =$$

a végtelenben való lecsengés miatt

$$\boxed{0 = \partial_0 \int d^3x\, T^{0\nu}} \Rightarrow \int d^3x\, T^{0\nu} = \text{(időben) megmaradó mennyiség}$$

$p^\mu = \int d^3x\, T^{0\mu}$ megmaradó 4-es vektor, impulzus

$p^0 = \int d^3x\, T^{00} := \int d^3x\, \mathcal{H} = E$

Hamilton-sűrűség

$T^{0\mu}$ impulzus sűrűség

T^{0i} 3-as impulzussűrűség

$T^{\mu\nu}$-vel kapcsolatos megjegyzések

- egyértelmű-e?

$T^{\mu\nu} \rightarrow T^{\mu\nu} + \partial_\rho \Lambda^{\rho\mu\nu} = T^{\mu\nu}$!

Ha $\Lambda^{\rho\mu\nu} = -\Lambda^{\mu\rho\nu}$

$\rightarrow T^{\mu\nu\,\prime}$ is megmaradó ~~tens~~, ugyanis

$$\partial_\mu T^{\mu\nu\,\prime} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \underbrace{\partial_\mu \partial_\rho}_{\rho,\mu\text{-ben szimm.}} \underbrace{\Lambda^{\rho\mu\nu}}_{\rho,\mu\text{-ben antiszimm.}} = 0$$

$\Rightarrow T^{\mu\nu}$ sem egyértelmű

- $T^{\mu\nu}$ eredeti definíciója szerint nem feltétlenül szimmetrikus
- DE $\partial_\rho \Lambda^{\rho\mu\nu}$ alkalmas választással el lehet érni, hogy szimmetrikus legyen.

- ha $T^{\mu\nu}$ szimmetrikus $\rightarrow \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}$ -vel kapcsolatba hozható

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

((hatás metrika szerinti deriváltja)

ez mindenképp szimmetrikus $\Rightarrow$ ha ez alapján vezetjük be $T^{\mu\nu}$-t, az is szimm. lesz $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ jó, hogy ha a mostani definícióban is tudunk belőle szimm. tenzort csinálni

5) Impulzus momentum:

pontrész.: $J^{\mu\nu} = x^\mu \cdot p^\nu - x^\nu \cdot p^\mu$

térelmélet: $J^{\mu\nu} = \int d^3x \underbrace{\left(x^\mu \cdot T^{0\nu} - x^\nu \cdot T^{0\mu}\right)}_{\text{3 indexes tenzor}}$

legyen $M^{\rho\mu\nu} := x^\mu \cdot T^{\rho\nu} - x^\nu \cdot T^{\rho\mu} \Rightarrow$

ennek $M^{0\mu\nu}$ komponensének térintegrálja $J^{\mu\nu}$

(hasonlóan volt impulzussűrűségnél is)

$$J^{\mu\nu} := \int d^3x \, \underset{\uparrow M^{\rho\mu\nu}}{M^{0\mu\nu}} \qquad p^\mu = \int d^3x \, \underset{\uparrow T^{\nu\mu}}{T^{0\mu}}$$

$\downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\downarrow$

? marad meg időben $\qquad$ $p^0 = \int T^{00} d^3x$ (E) megmarad időben

- Ha $\partial_\rho M^{\rho\mu\nu} = 0$, akkor $J^{\mu\nu}$ megmarad:

$M^{0\mu\nu}$: impulzus mom. sűrűség

$M^{i\mu\nu}$: – " – áramsűrűség

$$\partial_\rho M^{\rho\mu\nu} = \partial_\rho \left(x^\mu T^{\rho\nu} - x^\nu T^{\rho\mu}\right) = \delta_\rho^{\ \mu} \cdot T^{\rho\nu} + x^\mu \cdot \boxed{\partial_\rho T^{\rho\nu}} - \delta_\rho^{\ \nu} \cdot T^{\rho\mu} -$$

$$- x^\nu \boxed{\partial_\rho T^{\rho\mu}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mozgásegyenletek miatt } \square = 0}}{=} \underline{\underline{T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = \partial_\rho M^{\rho\mu\nu}}}$$

$\Rightarrow$ ha $T^{\mu\nu}$ energia-imp. tenzor szimmetrikus $\Rightarrow$

akkor van $J^{\mu\nu}$ megmaradó mennyiség

(és $\partial_\rho \Lambda^{\rho\mu\nu}$ hozzáadásával $T^{\mu\nu}$ szimmetrikussá tehető)

10. óra

Nöther-tétel

szimmetriák $\to$ megmaradó mennyiségek

1) Legyen ϕ tér, $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$

$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x)$ szimmetria

$\to$ mozgásegyenletek ugyanazok

$\left(S = \int d^4x \, \mathcal{L}\left(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)\right)\right.$

ha $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$, ahol $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu J^\mu$ (teljes divergencia)

$\left.\Rightarrow S' = S \right)$ (határokon való lecsengés miatt)

$\Rightarrow \delta\mathcal{L} = \partial_\mu J^\mu$

- Írjuk fel $\delta\mathcal{L}$-t:

$$\delta\mathcal{L}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}\delta\phi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\cdot \overset{\leftrightarrows}{\delta}\partial_\mu\phi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}\cdot\delta\phi(x) +$$

$$+\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\cdot\delta\phi(x)\right)-\left(\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\right)\cdot\delta\phi(x)=$$

$$=\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\cdot\delta\phi(x)\right)+\underbrace{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\right)}\delta\phi(x)\quad=$$

Ha a mozgásegyenletek teljesülnek $\Rightarrow 0$

$$=\partial_\mu\left(\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}}\cdot\delta\phi(x)\right)\quad\left(=\partial_\mu\mathcal{F}^\mu\right)$$

$$j^\mu(x):=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\delta\phi(x)-\mathcal{F}^\mu$$

$\boxed{\partial_\mu j^\mu=0}$ $\Rightarrow$ definiálhatunk $Q=\int j^0\, d^3\underline{x}$ megmaradó töltést

2) Példák:

1. Csak konstans $\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)$

$$\Rightarrow\ \Box\phi=0\quad(\mathrm{HF})\quad \text{a mozgásegyenlet}$$

$$\left(\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}=\partial_\mu\partial^\mu\phi\right)$$

szimmetria : $\phi\to\phi+\alpha$

$\delta\phi=\alpha$ $\quad\mathcal{L}'=\mathcal{L}$ $\quad\mathcal{F}_\mu=0$

$$j^\mu(x)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\cdot\delta\phi=\partial^\mu\phi\cdot\alpha$$

$\partial_\mu j^\mu=\alpha\,\Box\phi=0$ $\leftarrow$ mozgásegyenletből

2. ϕ komplex mező (ϕ, ϕ^* független

Re ϕ, Im ϕ független)

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi$$ $\to$ Klein-Gordon-egyenlet

$\phi \to \phi'(x) = \phi(x) \cdot e^{i\alpha}$ szimmetria, $\mathcal{F}_\mu = 0$

$$j^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \cdot \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \cdot \delta\phi^* = i\left[(\partial^\mu \phi^*)\phi - \phi^*(\partial^\mu \phi)\right]$$

kis trafó: $\alpha \ll 1$

$$\phi' = \phi(1 + i\alpha) \qquad \phi^{*\prime} = \phi^*(1 - i\alpha)$$

$\Rightarrow$ elektromos töltés

$$\delta\phi = i\alpha\phi \qquad \delta\phi^* = -i\alpha\phi^*$$

3. Téridő eltolás:

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu - a^\mu$$

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x^\mu + a^\mu) = \phi(x) + a^\mu \cdot \partial_\mu \phi(x)$$

a^μ „kicsi”

• tetszőleges skalár mező így transzformálódik eltolásra, és $\mathcal{L}$ is skalár

$$\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + a^\mu \cdot \partial_\mu \mathcal{L}(x) = \mathcal{L} + a^\nu \cdot \partial_\mu(\eta^\mu{}_\nu \cdot \mathcal{L})$$

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \mathcal{J}^\mu \qquad \mathcal{J}^\mu = a^\nu \left(\eta^\mu{}_\nu \mathcal{L}\right)$$

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - \mathcal{J}^\mu$$

a^ν eltolás:

$$\delta\phi = a^\nu \cdot \partial_\nu\phi \quad , \quad \mathcal{J}^\mu = a^\nu\left(\eta^\mu{}_\nu\mathcal{L}\right)$$

$$\Rightarrow j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} a^\nu\partial_\nu\phi - a^\nu\eta^\mu{}_\nu\cdot\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} a_\nu\partial^\nu\phi - a_\nu\cdot\eta^{\mu\nu}\mathcal{L} =$$

$$= a_\nu \underbrace{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial^\nu\phi - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}\right)}_{T^{\mu\nu}}$$

$T^{\mu\nu}$: energia-impulzus tenzor

(fontos: indexek helye!) visszár

megmaradás:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \text{téridő eltolásra energia-impulzus megmarad}$$

Elektromágneses mező Lagrange-sűrűsége

Kérdés: mi legyen a fundamentális mező?

$$\left(\underline{B}, \underline{E} \rightarrow F_{\mu\nu} \text{ vagy } A_\mu\right)$$

$\rightarrow A_\mu$-s leírás egyszerűbb — forrásmentes egyenletek teljesülnek autom.-an
— nem kell kényszer

(de igazából $F_{\mu\nu}$ fog megjelenni $\mathcal{L}$-ben is)

A_μ nem szerepelhet önmagában (nem skalár)
$\Uparrow$

- $\mathcal{L}[A_\mu]$, de legyen mértékinvariáns és skalár

$\Rightarrow$ szóba jöhet $\quad F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad \tilde{F}_{\mu\nu}\cdot\tilde{F}^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$

$\uparrow$ ugyanaz, mint $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ (HF)

$\uparrow$ HF: teljes divergencia
$\uparrow$
kvantumtér-elméletben már nem triviális, hogy ez nem kell, mert teljes div.-nak is van hatása ott

Legyen $\mathcal{L} = a\cdot F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

- Kölcsönhatás a töltésekkel:
  - töltés mozgása EM mezőben

$$S_{int} = -Q\int A_\mu \, dx^\mu \quad \text{(ezt már láttuk)}$$

  - ennek általánosítása („elkent” töltésre)

$$S_{int} = -\int A_\mu j^\mu \, d^4x$$

(ponttöltésre $\rho = \delta(\underline{x}-\underline{x}')\,Q$

- nincsen külön mező hatása a töltésre, ill. töltés hatása mezőre

$\rightarrow$ csak egyféle kh. van

$\rightarrow$ $\mathcal{L}_{kh.} = -A_\mu \cdot j^\mu$ $\rightarrow$ kérdés: nem baj, ha A_μ így szerepel benne

mértékinvariancia: $A_\mu' = A_\mu + \partial_\mu f$

$\mathcal{L}'_{kh} = \mathcal{L} - \partial_\mu f\cdot j^\mu = \mathcal{L} - \partial_\mu(f j^\mu) + \cancel{f\,\overset{0}{\overset{\|}{\partial_\mu j^\mu}}}$ $\rightarrow$ S és ME-k mérték invariánsak

$$\mathcal{L} = \alpha F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu$$

kölcsönhatási tag

$$\mathcal{L} = \alpha \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) - A_\mu j^\mu$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}$$ A^ν komponensre a mozgásegyenlet

$$\partial_\mu \alpha \left(4 \cdot \partial^\mu A^\nu - 4 \partial^\nu A^\mu\right) = -j^\nu$$

$$4\alpha\, \partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu$$

$$-4\alpha = \varepsilon_0$$

$$\alpha = -\frac{\varepsilon_0}{4}$$ → visszaírva pont a Maxwell-egyenleteket kapjuk

⇒ Lagr.-egyenlet:

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{\varepsilon_0}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu}$$

- Energia-imp.-tenzor:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} \partial^\nu A_\sigma - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} = -\varepsilon_0 F^{\mu\sigma} \cdot \partial^\nu A_\sigma + \frac{\varepsilon_0}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + $$
$$+ A_\alpha j^\alpha \eta^{\mu\nu}$$

• ~~töltések~~ nélkül ($j^\mu = 0$) a komponensei:

(felső indexekre ($F^{\mu\nu}$) ⊖ előjel)

l. korábban $F_{\mu\nu}$ komponensei

$$T^{00} = -\varepsilon_0 F^{0\sigma} \partial^0 A_\sigma + \frac{\varepsilon_0}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = -\varepsilon_0 (-E^{(i)}) \left(-\frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\underline{B}^2 - \underline{E}^2\right)$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = -\underline{E} - \underline{\nabla}\phi$$

$$\Downarrow$$

$$T^{00} = -\varepsilon_0\left(-\underline{E}^2 - \underline{E}\,\underline{\nabla}\phi\right) + \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\underline{B}^2 - \underline{E}^2\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\underline{B}^2 + \underline{E}^2\right) + \underline{\nabla}\left(\underline{E}\phi\right) - \phi\,\cancel{\underline{\nabla}\underline{E}}$$

$\overset{\shortparallel}{0}$, mert $j^\mu = 0$

HF:

$$T^{0i} = \varepsilon_0\left(\underline{E}\times\underline{B}\right)_i + \varepsilon_0\,\underline{\nabla}\left(A_i\,\underline{E}\right) \qquad \nabla(\ ) \doteq \text{HF}$$

$$T^{i0} = \varepsilon_0\left(\underline{E}\times\underline{B}\right)_i + \varepsilon_0\left[\left(\underline{\nabla}\times\phi\,\underline{B}\right)_i - \frac{\partial}{\partial t}\left(\phi E_i\right)\right]$$

Nem az, amit várnánk, de integrálva (teljes energia) OK:

$$\int T^{00}\, d^4x = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3\left(\underline{E}^2 + \underline{B}^2\right)$$

$$\int T^{0i}\, d^4x = \varepsilon_0 \int d^4x\,\left(\underline{E}\times\underline{B}\right)_i$$

(várakozás:
- energiasűrűség: $\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\underline{E}^2 + \underline{B}^2\right)$ $(c=1)$
- energiaáramsűr.: $\varepsilon_0\left(\underline{E}\times\underline{B}\right)$ (Poynting-v.)

Ennek oka: T nem szimmetrikus $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ szimmetrizáljuk:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)}\partial^\nu A_\sigma - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L} = -\varepsilon_0\, F^{\mu\sigma}\,\partial^\nu A_\sigma + \frac{\varepsilon_0}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

2. tag OK, 1 tag:

$\partial^\nu A_\sigma = F^\nu{}_\sigma + \partial_\sigma A^\nu$, írjuk be ezt

$$T^{\mu\nu} = \underbrace{-\varepsilon_0 F^{\mu\sigma} \cdot F^{\nu}{}_{\sigma} + \frac{\varepsilon_0}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}}_{\text{szimmetrikus}} \underbrace{- \varepsilon_0 F^{\mu\sigma} \partial_\sigma A^{\nu}}_{T_{NS} \text{ (nemszimm.)}}$$

Ha T_{NS} valamilyen teljes divergencia, akkor jó, mert elhagyhatom (mértékszabadság)

$$-T_{NS} = \varepsilon_0 F^{\mu\sigma} \cdot \partial_\sigma A^{\nu} = -\varepsilon_0 F^{\sigma\mu} \partial_\sigma A^{\nu} = -\varepsilon_0 \partial_\sigma (F^{\sigma\mu} A^{\nu}) +$$

$$+ \underbrace{\varepsilon_0 A^{\nu} \partial_\sigma F^{\sigma\mu}}_{\overset{\shortparallel}{0}\ \left(\frac{1}{\varepsilon_0} j^{\mu} = 0\right)} = -\varepsilon_0 \partial_\sigma (F^{\sigma\mu} A^{\nu}) = -\varepsilon_0 \partial_\sigma \Lambda^{\sigma\mu\nu}$$

$$\Lambda^{\sigma\mu\nu} = -\Lambda^{\mu\sigma\nu} \quad \text{(antiszimm.)} \quad \text{(nincs szimm. része)}$$

$\Rightarrow$ $T - T_{NS}$ is tudja a megmaradást $\quad \partial_\mu (T - T_{NS})^{\mu\nu} = 0$

EM mező szimmetrikus energia-imp. tenzora:

$$\Theta^{\mu\nu} := T^{\mu\nu} - T_{NS}^{\mu\nu} = \varepsilon_0 \left(F^{\mu\sigma} F_{\sigma}{}^{\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)$$

Komponensei (HF):

$$\Theta^{00} = \frac{\varepsilon_0}{2} (\underline{E}^2 + \underline{B}^2) = u$$

$$\Theta^{0i} = \varepsilon_0 (\underline{E} \times \underline{B})_i = g_i \ (= c \cdot g_i) \qquad \text{Poynting-vektor}$$

$$\Theta^{ij} = -\varepsilon_0 \left(E^i E^j + B^i B^j - \frac{1}{2} \delta^{ij} (\underline{E}^2 + \underline{B}^2) \right) = -T_{ij}^{(M)} \qquad \text{Maxwell-féle fesz. tenzor}$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} u & , & \underline{g} \\ \underline{g} & & -T_{ij}^{(M)} \end{pmatrix}$$

Megmaradási tv.-ek:

$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0 \qquad \forall \nu$-re

$\nu = 0 \Rightarrow \partial_\mu \Theta^{\mu 0} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{g} = 0 \qquad E$ megmaradás

$\nu = i \rightarrow \partial_\mu \Theta^{\mu i} = 0 \qquad \frac{\partial g_i}{\partial t} - \frac{\partial T_{ij}^{(M)}}{\partial x_j} = 0 \qquad p_i$ megmaradása

$\int d^3x \rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$ teljes energia megmarad

$\frac{d}{dt} p_i = 0$ teljes imp. — ॥ —

Megmaradási törvények töltések jelenlétében

$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\varepsilon_0} j^\nu \neq 0$

$\Theta^{\mu\nu}$ nem változik, de nincs megmaradás

Lorentz-erő sűrűség

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = -F^{\nu\sigma} j_\sigma \neq 0$$

$$\partial^\nu (F_{\alpha\beta} \cdot F^{\alpha\beta}) = 2 \cdot F_{\alpha\beta} \cdot \partial^\nu F^{\alpha\beta}$$

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} + F^{\nu\sigma} j_\sigma = \varepsilon_0 \left[\partial_\mu (F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu) + \frac{1}{4} \underbrace{\partial_\mu \eta^{\mu\nu}}_{\partial^\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right] + F^{\nu\sigma} j_\sigma =$$

$$= \varepsilon_0 \left[\cancel{F_\sigma{}^\nu \underbrace{\partial_\mu F^{\mu\sigma}}_{\frac{1}{\varepsilon_0} j^\sigma}} + F^{\mu\sigma} \cdot \partial_\mu F_\sigma{}^\nu + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \partial^\nu F^{\alpha\beta} \right] + \cancel{\overbrace{F^{\nu\sigma} j_\sigma}^{-F_\sigma{}^\nu \cdot j^\sigma}} =$$

$$= \varepsilon_0 \left[\frac{1}{2} F^{\mu\sigma} \partial_\mu F^{\nu}{}_{\sigma} + \frac{1}{2} F^{\mu\sigma} \partial_\mu F^{\nu}{}_{\sigma} + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \partial^\nu F^{\alpha\beta} \right] =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \left[F_{\mu\sigma} \partial^\mu F^{\sigma\nu} + F_{\mu\sigma} \partial^\mu F^{\sigma\nu} + F_{\mu\sigma} \partial^\mu F^{\sigma\nu} + F_{\mu\sigma} \partial^\nu F^{\mu\sigma} \right] =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} F_{\mu\sigma} \left[\partial^\mu F^{\sigma\nu} + \underbrace{\partial^\mu F^{\sigma\nu} + \partial^\nu F^{\mu\sigma}}_{-\partial^\sigma F^{\nu\mu} = \partial^\sigma F^{\mu\nu}} \right] =$$

(Forrásmentes Maxwell-egy.-ből: $\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0$

(ciklikusan permutálva az indexeket [illegible]))

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \underbrace{F_{\mu\sigma}}_{\substack{\text{antiszimm.} \\ \mu \leftrightarrow \sigma\text{-ra}}} \Big[\underbrace{\partial^\mu F^{\sigma\nu} + \partial^\sigma F^{\mu\nu}}_{\substack{\text{szimmetrikus} \\ \mu \leftrightarrow \sigma\text{-ra}}} \Big] = 0$$

11. óra

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = -F^{\nu\sigma} j_\sigma \qquad m \cdot a^\mu = q F^{\mu\nu} u_\nu$$

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} + F^{\nu\sigma} j_\sigma = 0$$

$$\Downarrow 4f$$

$$f_L{}^\nu = F^{\nu\sigma} j_\sigma = (\underline{j}\underline{E},\ \rho \underline{E} + \underline{j} \times \underline{B})$$

Lorentz-erő sűrűség

emlékeztető: $\frac{d p_{\text{töltés}}}{dt} = F_L = \int d^3x\, f_L$

$$\Rightarrow \frac{d p^\nu_{\text{töltés}}}{dt} = \int d^3x\, f_L{}^\nu = \int\limits_{x_0 = \text{konst.}} d^3x\, F^{\nu\sigma} j_\sigma$$

A mező:

$$\int_{x_0=\text{konst}} \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} d^3x = \frac{d}{dt}\underbrace{\int d^3x\, \Theta^{0\nu}}_{p^\nu_{\text{mező}}} + \underbrace{\int d^3x\, \partial_i \Theta^{i\nu}}_{\oint \Theta^{i\nu} dF_i \,=\, 0} = \frac{d}{dt} p^\nu_{\text{mező}}$$

$$0 = \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} + F^{\nu\sigma} j_\sigma = \int d^3x \left(\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} + F^{\nu\sigma} j_\sigma\right) = \frac{d}{dt}\left(p^\nu_{\text{mező}} + p^\nu_{\text{töltés}}\right)$$

A mező és a töltések teljes energiája és impulzusa marad meg.

Hasonlóan az imp. momentumra:

$$M^{\alpha\mu\nu} = x^\mu \Theta^{\alpha\nu} - x^\nu \Theta^{\alpha\mu}$$

az x-es tagok kiesnek

HF: $\partial_\alpha M^{\alpha\mu\nu} = x^\mu \partial_\alpha \Theta^{\alpha\nu} - x^\nu \partial_\alpha \Theta^{\alpha\mu} = -\left(x^\mu f_L^\nu - x^\nu f_L^\mu\right)$

$$0 = \int d^3x \left(\partial_\alpha M^{\alpha\mu\nu} + x^\mu f_L^\nu - x^\nu f_L^\mu\right) \overset{\text{HF}}{=} \frac{d}{dt}\left(J^{\mu\nu}_{\text{mező}} + J^{\mu\nu}_{\text{töltés}}\right)$$

Megj. eldin. hatáshoz

$S = S_{\text{részecske}} + S_{\text{mező}} + S_{\text{kölcsönhatás}}$ → a 3-at eddig soha nem néztük egyszerre (töltés → mező → mező visszahat a töltésre)

töltések dinamikája hiányzik (térelmélet megoldja)

Relativisztikus kvantummechanika

$(c=1)$

QM + spec. rel. (térelmélet nélkül ezt ilyen módon nem lehet konzisztensen végigcsinálni, de pár eredményt így is meg lehet kapni).

1) Schrödinger-egyenlet:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right]\Psi$$

koordináta repr.-ban

ez lényegében az $E = \frac{p^2}{2m} + V$ összefüggés

$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

$p = -i\hbar\nabla$

$V = V.$

baj: ez nem relativisztikusan invariáns!

Ezt könnyű általánosítani → szabad ezt $(V=0)$

a potenciálokat is be lehet tenni relativisztikusan (pl. EM tér Hamiltonját láttuk)

$p_\mu \cdot p^\mu = m^2 \qquad E^2 = p^2 + m^2$

$E^2 - p^2 - m^2 = 0$

$$\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2\nabla^2 - m^2\right)\Psi = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\Psi = 0$$

$$\boxed{\left(\Box + \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\Psi = 0} \quad \text{vagy} \quad \boxed{\left(\partial_\mu\partial^\mu + \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\cdot\Psi = 0}$$

→ kovariáns

p^μ-nek $\underline{\underline{\hat{p}^\mu}} = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\hbar\, \partial^\mu = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right) = \underline{\underline{(\hat{E}, \hat{p})}}$

felel meg

$$\left(\Box + \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\Psi = 0$$ <u>Klein-Gordon-egyenlet</u>

2) Mik a K.-G.-egyenlet megoldásai?

síkhullám

$\Psi(\underline{x}, t) = A \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu}$ alakban keressük a megoldást

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{\hbar^2} p_\mu p^\mu + \frac{m^2}{\hbar^2} = 0$$

$\boxed{p_\mu p^\mu = m^2}$ tömeghéj feltétel

ha ez teljesül, akkor a síkhullám alak jó!

⇒ a 4 db p_μ nem mind fgtlen, 3 független + 1 feltétel

pl. _ a 3 fgtlen

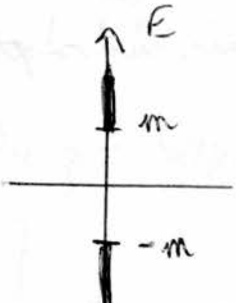
feltétel: $p_0^2 = E^2 = p^2 + m^2$

$$p_0 = \underline{E} = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$$

E lehetséges értékei:

$E \geq m$

$E \leq -m$



↗ <u>antirészecskék</u>

→ vannak negatív energiás megoldások (klasszikusan ilyen nem volt → $\omega > 0$)

Valójában úgy interpretálható, hogy töltés és -töltés jelenik meg, nem energia és -energia.

3) Mi a Ψ jelentése? Valószínűség?

Részecske-áram sűrűség

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\Psi = 0 \quad /^* \rightarrow \Box\text{-t nem érinti}$$

$$/\cdot\Psi^*$$

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\Psi^* = 0 \quad /\cdot\Psi$$

$$\Psi^*\left(\partial_\mu \partial^\mu + \cancel{\frac{m^2}{\hbar^2}}\right)\Psi - \Psi\left(\partial_\mu \partial^\mu + \cancel{\frac{m^2}{\hbar^2}}\right)\Psi^* = 0$$

$$\Psi^* \partial_\mu \partial^\mu \Psi - \Psi \partial_\mu \partial^\mu \Psi^* = 0$$

$$\partial_\mu\left(\Psi^* \partial^\mu \Psi - \Psi \partial^\mu \Psi^*\right) = 0 \qquad \text{div} \ldots = 0 \Rightarrow \text{áram}$$

$$\boxed{j^\mu = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^* \partial^\mu \Psi - \Psi \partial^\mu \Psi^*\right)} \qquad \underline{\underline{\partial_\mu j^\mu = 0}} \leftarrow \text{ez pont a Nöther-áram}$$

nemrelativisztikus limeszből jön

$\Psi \rightarrow \Psi \cdot e^{i\varphi}$

(fázisforgatási szimm.)

(l. múlt óra)

$$\rho = j^0, \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\int d^3x\, \rho = 0$$

Jó lenne, ha ρ részecske-val. sűrűséget jelentene

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^* \dot\Psi - \dot\Psi^* \Psi\right)$$

<u>DE</u> probléma: Klein-G. 2. rendű egyenlet ↓

2 kezdőfeltétel kell:

$$\left.\begin{array}{l}\psi(\underline{x}, t=0)\\ \dot\psi(\underline{x}, t=0)\end{array}\right\} t=0\text{-ban}$$

$\Rightarrow$ $\rho(t=0)$ és $\int d^3x \cdot \rho \Big|_{t=0}$ tetszőleges (előjele is)

$\boxed{\rho \lesseqgtr 0}$ $\Rightarrow$ nem lehet részecske sűrűség
(részecske - antirészecskének felel meg)

(Nemrelat. QM:

$\rho = \psi^* \psi \geq 0$, és nem kellett deriváltat se megadni

$\Rightarrow$ lehetett val. sűrűségként értelmezni)

<u>Részletesebben:</u>

síkhullám mo.: $p_\mu = (E, -\underline{p})$

$$\psi = A \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} = A \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(\underline{p}\underline{x} - Et)}$$

$E = \pm\sqrt{p^2 + m^2} \rightarrow$ 2 db mo.:

$$\psi_\pm = A_\pm e^{\frac{i}{\hbar}(\underline{p}\underline{x} \mp |E_p| t)} \qquad E_p = +\sqrt{p^2+m^2}$$

$\rho = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^* \dot\psi - \dot\psi^* \psi\right)$ $\rightarrow$ láttuk, hogy ez nem lehet val. sűrűség

$\rho \rightarrow$ töltéssűrűség! $\int d^3x \cdot \rho =$ teljes töltés $= e$

$$\boxed{\rho = \frac{i\overset{\text{töltés}}{e}\cancel{\hbar}}{2m}\left(\psi^* \dot\psi - \dot\psi^* \psi\right)}$$

$$\rho_{\pm} = \pm \frac{e|E_p|}{m} \psi_{\pm}^{*} \psi_{\pm}$$

$\rho_{+} = \frac{e|E_p|}{m} \psi_{+}^{*} \psi_{+} \geq 0$ e töltésű részecske töltéssűrűsége

$\rho_{-} = -\frac{e|E_p|}{m} \psi_{-}^{*} \psi_{-} \leq 0$ −e töltésű részecske −‖−

tehát: ψ_{+}-t értelmezhetjük egy +e } töltésű részecske
ψ_{-}-t −‖− −e } leírásaként

ψ_{-} a ψ_{+} antirészecskéjét írja le

(→ ilyenkor a valószínűségsűrűség maradhat + és hasonlóan kezelhető, mint klasszikus esetben, de ψ-nek már előjele és nagysága (nem 1-re normált) lehet, mert a töltéssel is meg van szorozva)

↳ de ez a magyarázat csak a spec. megoldásra igaz

→ általában nem megy, ψ-nek nem tudunk valószínűségi értelmezést adni (ált. m.) → relativisztikusan a részecskeszám nem marad meg, 3 szabadsági fok (x, y, z) nem elég → ∞ sok szabadsági fok fog kelleni → térelmélet, mezőkkel kell leírni a részecskéket

(részecske-antirész. párkeltés lehetséges)

„másodkvantálás" ⇒ $\left(\Box + \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0$ -ra klasszikus egyenletként tekintünk (ϕ ∞ sok szabadsági fokot testesít meg → mező) →

→ ezt kvantáljuk $\phi \to \hat{\phi}$

4) Dirac-egyenlet

K.-G.-egyenlet egyik fő problémája, hogy másodrendű

→ elsőrendű egyenlet kéne:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

kovariáns is legyen:

$$E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$$

Dirac-féle levezetés (precízebb levezetés → térelmélet, szimmetriák)

⇒ $p^2 + m^2$ négyzetgyökét akarjuk definiálni (formálisan) → energiára, és nem E^2-re írjuk fel az egyenletet

Térben és időben első deriváltak legyenek

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \underbrace{\left[-i\hbar\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) + \beta m\right]}_{\hat{H}}\psi \quad \text{alakot}$$

keresünk.

- α_i-k (β) nem lehetnek számok (nem tudja az $E^2 = p^2 + m^2$ tömeghéj feltételt)

⇒ α-k mátrixok,

ψ több komponensű (ha egyszerűen vizsgálják ezt a formulát, olyan feltételek jönnének ki, hogy α-k nem kommutálhatnak → nem lehetnek számok)

- azt is szeretnénk, hogy legyen egy $\rho \geq 0$ pl. $\rho = \psi^+\psi = \sum_i \psi_i^*\psi_i \geq 0$

⇓ megmaradó mennyiség: $\frac{d}{dt}\int d^3\rho = 0$

olyan α_i, β-t keresünk:

a) teljesül az $E-p$ reláció $(E^2 = p^2 + m^2)$

b) ρ megmaradó, pozitív j^μ létezik és $j^0 = \rho > 0$

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

c) Lorentz-invariáns, kovariáns

a) $\to \Psi$ kielégíti a Klein-Gordon-egyenletet (is), minden komponense

$\Rightarrow \Psi_i$

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\Psi_i = 0$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-i\hbar\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) + \beta m\right]\Psi$$

másképp:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t} = \left(-\hbar^2 \nabla^2 + m^2\right)\Psi_i \quad \text{(K.-G.)}$$

tényleg: kiszámítjuk négyzetreemeléssel kapható ebből a K.-G.

másrészt:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(i\hbar \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}\right) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \sum_j \left[-i\hbar\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)_{ij} +\right.$$

$$\left. + \beta_{ij} m\right]\Psi_j = \sum_j \left(-i\hbar\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)_{ij} + \beta_{ij} m\right) i\hbar \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} =$$

megint beírjuk $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$-t

$$= \sum_{jk} \left[-i\hbar\left(\alpha_1 \partial_1 + \alpha_2 \partial_2 + \alpha_3 \partial_3\right)_{ij} + \beta_{ij} m\right]\left[-i\hbar\left(\alpha_1 \partial_1 + \alpha_2 \partial_2 + \alpha_3 \partial_3\right)_{jk} +\right.$$

$$\left. + \beta_{jk} m\right] \cdot \Psi_k$$

$\downarrow$ HF

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 \sum_{a,b} \frac{\alpha_a\alpha_b + \alpha_b\alpha_a}{2} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial x_a \partial x_b} - i\hbar m \sum_a \left(\alpha_a \beta + \beta \cdot \alpha_a\right) \frac{\partial\psi}{\partial x_a} +$$

$$+ \beta^2 m^2 \psi$$

→ Klein-Gordon-egyenlet csak akkor jön ki teljes ψ-re, ha:

- $\underbrace{\{\alpha_a, \alpha_b\}}_{}$ ← antikomm. $\quad \{\alpha_a, \alpha_b\} = 2\,\delta_{ab} \cdot \mathbb{1}$ (⇒ nem lehetnek számok)
- $\{\alpha_a, \beta\} = 0$
- $(\alpha_a^2 = 1)$ (1.-ből következik.)
- $\beta^2 = 1$

→ azt akarjuk, hogy $\hat{H}$ önadjungált legyen (valós s.é.-ek miatt)

- $\alpha_a^+ = \alpha_a$
- $\beta^+ = \beta$

(1.sm.)

Dirac-egyenlet:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\left[-i\hbar\left(\alpha_1\partial_1+\alpha_2\partial_2+\alpha_3\partial_3\right)+\beta m\right]\Psi=\underbrace{\left[\underline{\alpha}\hat{\underline{p}}+\beta m\right]}_{\hat{H}}\Psi=\hat{H}\Psi$$

ekkor ha α,β nem szám, és teljesül, hogy:

- $\{\alpha_a,\alpha_b\}=2\delta_{ab}\mathbb{1}$
- $\{\alpha_a,\beta\}=0$
- $\beta^2=1$, $\alpha_a^2=1$
- $\alpha_a^+=\alpha_a$, $\beta^+=\beta$

$\Rightarrow$ minden komponens (Ψ_i) teljesíti a Klein-G. egyenletet és $E^2=p^2+m^2$-et

- megmutatható, hogy $N\geq 4$-re van csak megoldás:

$N=4$-re konkrét mo. (minden más mo. ezzel unitér ekvivalens)

$$\alpha_a=\begin{pmatrix}\emptyset & \sigma_a\\ \sigma_a & \emptyset\end{pmatrix}\qquad \beta=\begin{pmatrix}\mathbb{1} & \emptyset\\ \emptyset & -\mathbb{1}\end{pmatrix}\qquad (\Psi \text{ 4-es vektor})$$

ahol σ-k a Pauli-mátrixok:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} & 1\\ 1 & \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2=\begin{pmatrix} & -i\\ i & \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3=\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ ekkor teljesül a fenti algebra (feltételek) $\Rightarrow$ használható a Dirac-egyenlet

b) <u>Kontinuitási egyenlet</u>

$$i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left(-i\hbar \sum_i \alpha_i \partial_i + m\beta\right)\Psi \qquad / \Psi^+ \cdot$$

$\curvearrowleft \sum_a \Psi_a^+ (\ )_a$ -ként értendő!!

$$-i\hbar \frac{\partial\Psi^+}{\partial t} = i\hbar \sum_i \partial_i \Psi^+ \underset{\alpha_i}{\overset{\|}{\alpha_i^+}} + m\Psi^+ \underset{\beta}{\overset{\|}{\beta^+}} \qquad / \cdot\Psi$$

$$i\hbar\left(\Psi^+ \frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\partial\Psi^+}{\partial t}\Psi\right) = -i\hbar\left(\Psi^+ \alpha_i \partial_i \Psi + \partial_i \Psi^+ \alpha_i \Psi\right)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^+ \Psi\right) = -i\hbar \sum_i \partial_i \left(\Psi^+ \alpha_i \Psi\right)$$

$$\dot\rho + \operatorname{div} \underline{j} = 0$$

$$\rho = \Psi^+\Psi \geq 0 \quad \text{mert } \rho = \sum_a \Psi_a^* \Psi_a$$

$$j_i = \Psi^+ \alpha_i \Psi$$

<u>Kérdés:</u> $(\rho, \underline{j})$ tényleg 4-es vektor-e?

↳ Dirac-egyenlet 4-es alakja:

Szorozzuk be balról β-val

$$i\hbar\beta \frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left(-i\hbar \sum_i \beta\alpha_i \partial_i + m\right)\Psi$$

Legyen $\gamma^0 := \beta$

$\gamma^i := \beta \cdot \alpha_i$

$$\Rightarrow \boxed{\left(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\Psi = 0}$$ 4-es alak

- γ^μ Dirac-mátrixok: $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \end{pmatrix}$$

- γ^μ tulajdonságai (α_i, β algebrájából):

HF: $\gamma^{0\,2} = 1$ $\gamma^{0+} = \gamma^0$

$(\gamma^i)^2 = -1$ $(\gamma^i)^+ = -\gamma^i$ $\Rightarrow \forall \gamma^\mu$ unitér

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

- 4-es áram:

$$j^\mu = \Psi^+ \gamma^0 \gamma^\mu \Psi \equiv \overline{\Psi}\gamma^\mu \Psi$$ ahol $\overline{\Psi} := \Psi^+\gamma^0$

Dirac-konjugált

$$j^0 = \Psi^+ \gamma^0 \gamma^0 \Psi = \Psi^+ \Psi = \rho$$

$$j^i = \Psi^+ \gamma^0 \gamma^i \Psi = \Psi^+ \beta\beta\alpha_i \Psi = \Psi^+ \alpha_i \Psi = j_i$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \iff \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j} = 0$$

<u>Állítás:</u> j^μ 4-es vektor

komponens, nem skalár

$\overline{\Psi}\Psi$ skalár ($\Psi^+\Psi$ nem skalár $(= \rho)$)

↳ nem biz.

Dirac-egyenlet kovarianciája (röviden)

$\Lambda: K' \to K$ Lorentz-trafó

$$x^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu'}$$

Kérdés: hogyan transzformálódik Ψ_a? (és γ-k: γ^{μ}_{ab})

Legyen $\Psi(x) = \underbrace{R(\Lambda)}_{\text{milyen transzformáló mátrix}} \cdot \Psi'(\Lambda^{-1} x)$

Feltétel: (ha kovariáns a Dirac-egyenlet, azaz:)

I. $\left(i\hbar \cdot \gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m\right)\Psi = 0$

II. $\left(i\hbar\, \gamma^{\mu'} \partial_{\mu}' - m\right)\Psi' = 0$ $\quad$ ($\to \Psi$ hogyan transzf.?)

γ konstansokból áll, de nem $\Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu'}$-ként transzformálódik!

Nem biz.: legyen $\gamma^{\mu'} = \gamma^{\mu}$ (megtehető, $\forall \gamma^{\mu}$ ami tudja az algebrát, unitér ekvivalens)

I. $\Downarrow$

$$\Big(i\hbar\, \gamma^{\mu} \underbrace{\Lambda_{\mu}{}^{\nu} \partial_{\nu}'}_{\partial_{\mu}} - m\Big) R(\Lambda)\, \Psi'(x') = 0$$

$\Lambda \to \nu, \mu$-re hat

$R \to$ Dirac-indexre (a, b) hat

$\Downarrow$

felcserélhetőek

$\cdot R^{-1}(\Lambda)$ balról:

$$\underbrace{i\hbar\, \overbrace{\Lambda_{\mu}{}^{\nu} R^{-1}(\Lambda)\, \gamma^{\mu} R(\Lambda)}^{\gamma^{\nu'} = \gamma^{\nu}} \partial_{\nu}'\Psi'}_{\text{a II. egy.-ből: } i\hbar\, \gamma^{\mu} \partial_{\mu}'} - m\Psi' = 0$$

$$\boxed{\gamma^\nu = \Lambda_\mu{}^\nu R^{-1}(\Lambda)\, \gamma^\mu R(\Lambda)}$$

ennek kell a kovarianciához teljesülnie ! → feltétel $R(\Lambda)$-ra

felhasználva, hogy:

$$\Lambda^\sigma{}_\nu \Lambda_\mu{}^\nu = \delta^\sigma{}_\mu \quad \text{(korábban láttuk)}$$

$$\Rightarrow \quad R\gamma^\nu R^{-1} = \Lambda_\mu{}^\nu \gamma^\mu \quad \text{vagy} \quad \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu = R^{-1}\gamma^\mu R$$

(R a Lorentz-csoport transzformációja lesz)

- Beláttott, hogy forgatásokra R unitér $[R, \gamma^0] = 0$
- de általában R nem unitér, hanem:

$$R^{-1} = \gamma^0 R^+ \gamma^0 \Rightarrow \gamma^0 R^{-1} = R^+ \gamma^0$$

⇒ 4-es áram, ha a fenti feltétel a kov.-hoz teljesül:

$$j^\mu = \psi^+ \gamma^0 \gamma^\mu \psi = \psi'^+ R^+ \gamma^0 \gamma^\mu R \psi' = \psi'^+ \gamma^0 R^{-1} \gamma^\mu R \psi' =$$

$$= \Lambda^\mu{}_\nu \psi'^+ \gamma^0 \gamma^\nu \psi' = \Lambda^\mu{}_\nu j^{\nu\prime} \Rightarrow j^\mu \text{ 4-es vektor}$$

<u>Dirac-egyenlet síkhullám megoldásai (szabad-egyenlet)</u>

2 féle stratégia

a) közvetlenül

b) „nyugalmi" rendszerből $\xrightarrow{\text{boost}}$ átt.

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi = \left(\sum_i \alpha_i \hat{p}_i + m\beta\right)\psi \qquad \hat{p}_i = -i\hbar\partial_i$$

stacionárius megoldás: $\Psi(x,t) = \Psi(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon t}$

$\Rightarrow \hat{H}\Psi(x) = \varepsilon \Psi(x)$ időfüggetlen Dirac-egyenlet

Legyen $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ $\quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$

$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \sum_i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \hat{p}_i \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varepsilon \varphi = \sum_i \sigma_i \hat{p}_i \chi + m\varphi$$

$$\varepsilon \chi = \sum_i \sigma_i \hat{p}_i \varphi - m\chi$$

(csatolt egyenletek)

Keressük $\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$-t síkhullám alakban

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \chi_0 \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar} p x}$$

$\hat{p}_i \to p_i$ (a deriválás csak egy komponenst hoz le)

$$(\varepsilon - m)\varphi_0 - \sum_i \sigma_i p_i \chi_0 = 0$$

$$-\sum_i \sigma_i p_i \varphi_0 + (\varepsilon + m)\chi_0 = 0$$

Homogén lin. egy. rsz.

nemtriv mo.: $\det = 0$

$$\begin{vmatrix} \varepsilon - m & -\sum_i \sigma_i p_i \\ -\sum_i \sigma_i p_i & \underbrace{\varepsilon + m} \end{vmatrix} = 0$$

$\nwarrow$ 4×4-es mátrix det-a

(ez most

$(\varepsilon+m)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ -ként

értendő)

$$(\varepsilon^2 - m^2)\,\mathbb{1} - \underbrace{\sum_i \sigma_i p_i \sum_j \sigma_j p_j}_{p^2 \cdot \mathbb{1}} = 0$$

(Pauli-mátrixok

$\varepsilon^2 - m^2 - \underline{p}^2 = 0$ → teljesül az energia-imp. reláció

$\varepsilon^2 = \underline{p}^2 + m^2 \qquad \varepsilon = \pm E_p$ ahol $E_p = +\sqrt{\underline{p}^2 + m^2}$

⇒ Az egyenlet sz. megoldása (visszahelyettesítéssel):

$$\chi_0 = \frac{\sum_i \sigma_i p_i}{m+\varepsilon}\,\varphi_0$$

Legyen $\varphi_0 = u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ tetsz., de normált:

normáljuk úgy, hogy $u^+ u = u_1^* u_1 + u_2^* u_2 = 1$

Ekkor a teljes megoldás

$$\Psi_{\underline{p},\lambda}(\underline{x},t) = N \begin{pmatrix} u \\ \frac{\sigma \underline{p}}{m + \lambda E_p} \cdot u \end{pmatrix} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}(\underline{p}\underline{x} - \overbrace{\lambda E_p}^{E} t)}$$ ahol $\lambda = \pm 1$

Az N az alábbi feltételből jön:

$$\int \Psi^{\dagger}_{\underline{p}\lambda}(\underline{x},t)\,\Psi_{\underline{p}'\lambda'}(x,t)\,d^3x = \delta_{\lambda,\lambda'}\,\delta(\underline{p}-\underline{p}') \qquad \text{(normálás)}$$

HF:

$$N = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\hbar})^3}\sqrt{\frac{m+\lambda E_p}{2\lambda E_p}}$$

$\lambda = \pm 1$ részecske - antirészecske

Mi a helyzet a maradék szabadsággal (u_1, u_2)

↳ ez a két komponens még nincs lefixálva.

Vizsgáljuk az állapotok helicitását:

spin operátor

$$\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}$$

(nemrelat. általánosítása)

$$[\hat{S}_i, \hat{H}] \neq 0 \qquad ! \quad \text{(HF)}$$

$\Rightarrow$ nem tudjuk egyszerre felírni $\hat{S}_i$ és $\hat{H}$ sajátállapotait

helicitás: spin vetülete a mozgás irányára:

$$\hat{\Lambda}_s = \sum_i \hat{S}_i \underbrace{\frac{\hat{p}_i}{|\hat{p}|}}_{\text{egységvektor (i. komp.-e)}}$$

• Áll. → ez kommutál $\hat{H}$-val (HF. 2 lépésben $[\underline{\Sigma}\underline{p}, \hat{H}] = 0$

$(\hat{\Lambda}, \underline{p}) = 0$ is belátható $[p^2, \hat{H}] = 0$ ← egyszerű)

⇒ lehet egyszerre diagonalizálni $(\hat{\Lambda}_S, \hat{H}, \underline{p})$-t !

- Mozogjon a részecske a +z tengely irányába (spec. eset):

$$\underline{p} = (0, 0, p_z)$$

$$\hat{\Lambda}_S = \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Sajátértékei, sajátvektorai:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad +\frac{\hbar}{2}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \quad -\frac{\hbar}{2}$$

$$\frac{1}{m+\lambda E_p}\overbrace{\begin{pmatrix} p_z & \\ & -p_z \end{pmatrix}}^{\underline{\Sigma}_z \cdot p_z} u = \frac{p_z}{m+\lambda E_p}(u_1 - u_2)$$

⇒ Teljes megoldás:

lineárkomb.-ja 2 azonos s.é.-hez tartozó s.vektornak

$$\Psi_{\underline{p},\lambda,+\frac{1}{2}}(\underline{x},t) = N\begin{pmatrix}1\\0\\ \frac{+p_z}{m+\lambda E_p}\\0\end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(p_z z - \lambda E_p t)}$$

$$\Psi_{\underline{p},\lambda,-\frac{1}{2}}(\underline{x},t) = N\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \frac{-p_z}{m+\lambda E_p}\end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}(p_z z - \lambda E_p t)}$$

+ normálás: $\int \Psi^+_{\underline{p}\lambda,s}(\underline{x},t)\,\Psi_{\underline{p}',\lambda',s'}(\underline{x},t)\,d^3\underline{x} = \delta_{\lambda\lambda'}\,\delta_{ss'}\,\delta^{(3)}(\underline{p}-\underline{p}')$

Adott p-hez 4 ftlen mo. $\lambda = \pm 1 \to$ részecske, antirész.

$s = \pm \frac{1}{2} \to$ spin

2 db feles spinű részecskét ír le.

Dirac-egyenlet kölcsönhatás esetén

legyen a töltésű részecske külső EM térben

Emlékeztető: kanonikus imp. $p^\mu = p^\mu_{\text{szabad}} + QA^\mu$

Hamilton-fv.: $H = \sqrt{m^2 + (\underline{p} - Q\underline{A})^2} + Q\phi$

$$\underset{\partial_i}{\uparrow} \qquad\qquad A^0$$

$\Rightarrow$ Dirac-egyenletbe $-i\hbar\,\partial_\mu$-t írunk a p_μ helyére

$$\hat{p}^\mu \to \hat{p}^\mu - e A^\mu$$

3-as alak:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[i\hbar \sum_i \alpha_i \left(\partial_i - \frac{i}{\hbar} e A_i \right) + \beta \cdot m + e\phi \right] \Psi$$

4-es alak:

$$\boxed{\left(i\hbar\, \gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{i}{\hbar} e A_\mu \right) + m \right) \Psi = 0}$$

13. óra

1) Dirac-egy. kh. esetén:

$$\left[i\hbar \gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{i}{\hbar} e A_\mu\right) + m\right]\Psi = 0$$

Hamilton-op.:

$$\hat{H} = \sum_i \alpha_i \left(\underset{\downarrow \atop -i\hbar\partial_i}{\hat{p}_i} - e A_i\right) + \beta \cdot m + \underbrace{e\phi}_{V(r)}$$

- többnyire csak ϕ, és az is gömbszimmetrikus:

$V(r) = e\phi(r)$

$\hat{H} = \hat{H}_0 + V(r)$

- $\hat{H}_0$ kommutál: $\hat{\underline{J}} = \hat{\underline{L}} + \hat{\underline{S}}$ teljes imp. momentummal (HF)

  $\hat{P}$ paritással (tértükrözés)

- $V(r)$ szimmetrikus (forgatásokra, tükrözésre)

  $\to V$ is kommutál $\to \hat{H}$ is kommutál $\hat{\underline{J}}$, $\hat{P}$-vel

$\Rightarrow \hat{H}, \hat{\underline{J}}, \hat{P}$ közös sajátállapotait keressük

$$\hat{\underline{J}} = \underline{r} \times \hat{\underline{p}} + \frac{\hbar}{2}\hat{\underline{\sigma}}\,\mathbb{1}$$

- Mi a $\hat{\underline{P}}$?

$\Rightarrow$ Hogyan transzformálódik Ψ, ha $\underline{x} \to -\underline{x}$, $t \to t$?

(tértükr.)

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad x^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu)}$$

$$\Psi = R \Psi'$$

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} \gamma^{\nu} = R^{-1}(\Lambda) \gamma^{\mu} R(\Lambda)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad R = \hat{P}$$

$$\gamma^{0} = \hat{P}^{-1} \gamma^{0} P$$

$$\gamma^{i} = -\hat{P}^{-1} \gamma^{i} \hat{P}$$

$$\hat{P} \gamma^{0} = \gamma^{0} \hat{P}$$

$$\hat{P} \cdot \gamma^{i} = -\gamma^{i} \hat{P}$$

$\to \hat{P} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konst.}}}{a} \cdot \gamma^{0}$ pl. egy jó mo. (belátható, hogy több mo. nincs)

2 tükrözésnél

$|\hat{P}^{2} \cdot \Psi| = |\Psi| \to |a| = 1 \Rightarrow a = e^{i\varphi}$ φ tetszőleges

Legyen $\varphi = 0$

$$\Psi(\underline{x}, t) = \hat{P}\, \Psi'(-\underline{x}, t) = \gamma^{0}\, \Psi'(-\underline{x}, t)$$

- Változók szétválasztása $V(r)$ esetén

- $\hat{H}$, $\hat{\underline{J}}$, $\hat{P}$ közös sajátállapotai $(\hat{H}, \hat{J}^2, J_z, \hat{P})$

J: j, m $\quad J^2 = j(j+1)\hbar^2$

$J_z = m\hbar$

$\underline{J} = \underline{L} + \underline{S}$ $\quad L: l, m'$

$S: \frac{1}{2}, m_s$

tehát Ψ alakja:

$$\Psi_{jm} = \begin{pmatrix} \varphi_{jlm} \\ \chi_{jl'm} \end{pmatrix}$$

l. később

(alul-felül különböző l lehet)

- beírva az időfüggetlen egyenletbe:

$$(\hat{\underline{\sigma}}\hat{\underline{p}})\chi + m\varphi + V(r)\varphi = E\varphi$$

$$(\hat{\underline{\sigma}}\hat{\underline{p}})\varphi - m\chi + V(r)\chi = E\chi$$

- $[\sigma, \gamma^0\} = 0$ $\quad (\hat{\underline{\sigma}}\hat{\underline{p}})$ megfordítja a paritást

kommutátor

$\Rightarrow \varphi, \chi$ paritása ellentétes

ha Ψ paritás sajátállapot (± 1 s.é.-el)

$$\gamma^0 \Psi(-x, t) = \pm \Psi(x, t)$$

$$\varphi(-\underline{x}, t) = \pm \varphi(\underline{x}, t)$$

$$-\chi(-\underline{x}, t) = \pm \chi(\underline{x}, t)$$

φ páros $\leftrightarrow$ χ páratlan

φ ptlan $\leftrightarrow$ χ ps

(a gömbfv.-ekben l fogja a paritást meghatározni $\to$ ezért lesz l eltérő φ és χ ben)

- A szögfüggő részt az alábbi fv. adja:

$$(l, m'), \left(\tfrac{1}{2}, m_s\right) \quad \text{imp. momentumok összeadásából}$$
$$\underline{L}' \qquad \underline{S}$$

$$\Omega_{jlm} = \sum_{m', m_s} \underbrace{\left(l \ \tfrac{1}{2} \ j \,\middle|\, m' \ m_s \ m \right)}_{\text{Clebsch - Gordon - eh.k}} Y_{lm'} \, \chi_{\frac{1}{2} m_s}$$

- $\chi\left(\tfrac{1}{2} m_s\right)$: $\underline{S}$ sajátállapotai

$$\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $J^2 \Omega = j(j+1)\hbar^2 \Omega$

$$J_z \Omega = m\hbar \Omega$$

Ω adja a φ és χ szögfüggő részét

Ω paritása Y-ból jön: $\hat{P}\Omega_{jlm} = (-1)^l \Omega_{jlm}$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \qquad \varphi, \chi \text{ paritása különböző} \Rightarrow l \neq l'$$

- paraméterezés:

$$\varphi_{jlm}(x) = i\, g(r)\, \Omega_{jlm}\left(\frac{\underline{r}}{r}\right)$$

$$\chi_{jl'm}(x) = -f(r)\, \Omega_{jl'm}\left(\frac{\underline{r}}{r}\right)$$

- paritás:

j az l és $\frac{1}{2}$ imp. momentumok „összege"

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow j = l \pm \frac{1}{2} \\ \qquad\qquad\qquad l \neq l' \\ j = l' \pm \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow l + l' = 2j$$

(az egyik $j-\frac{1}{2}$, a másik $j+\frac{1}{2}$, de nem tudjuk még, melyik melyik)

$$\Updownarrow$$

$$|l - l'| = 1$$

$\Rightarrow \Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ csak így lehet paritás sajátállapot

garantálja

$\Omega \to \hat{J}^2, \hat{J}_z$ sajátállapot

$l, l' \to \hat{P}$ — " —

$f, g \to \hat{H}$ — " —

- Dirac-egy. nemtriv. része: $(\hat{\underline{\sigma}}\hat{\underline{p}})\varphi$, illetve

$$(\hat{\underline{\sigma}}\hat{\underline{p}})\chi$$

$$(\hat{\underline{\sigma}}\hat{\underline{p}})\varphi_{jlm} = (\hat{\underline{\sigma}}\hat{\underline{p}})\left(i g(r)\, \Omega_{jlm}\left(\frac{\underline{r}}{r}\right)\right) = \left(\hat{\underline{\sigma}}\hat{\underline{p}}\; i g(r)\right)\Omega + i g(r)(\hat{\underline{\sigma}}\hat{\underline{p}})\Omega =$$

gradiens gömbi koord.

$$= \hbar \frac{dg}{dr}\left(\hat{\underline{\sigma}}\frac{\underline{r}}{r}\right)\Omega + i g(r)(\hat{\underline{\sigma}}\hat{\underline{p}})\Omega$$

Áll: (HF)

$$\left(\frac{\hat{\sigma}\, r}{r}\right) \Omega_{jlm} = -\Omega_{jl'm}$$

$$\left(\frac{\hat{\sigma}\, r}{r}\right) \Omega_{jl'm} = -\Omega_{jlm}$$

$$\Rightarrow (\hat{\sigma}\hat{p})\, \varphi_{jlm} = -\hbar \frac{dg}{dr} \Omega_{jl'm} + ig(\hat{\sigma}\hat{p})\, \Omega_{jlm}$$

ismen is tüntessük el

Ω deriváltjait

$$-(\hat{\sigma}\hat{p})\, \Omega_{jlm} = (\hat{\sigma}\hat{p})\left(\frac{\sigma r}{r}\right) \Omega_{jl'm}$$

Áll: (HF) $\quad (\hat{\sigma}\underline{A})(\hat{\sigma}\underline{B}) = \underline{A}\,\underline{B} + i\hat{\underline{\sigma}}(\underline{A}\times\underline{B})$ (a Pauli-mátrixok tul.-ai alapján)

$\Downarrow$

$$-(\hat{\sigma}\hat{p})\, \Omega_{jlm} = \left[\frac{pr}{r} + i\underline{\sigma}\left(\hat{p}\times\frac{r}{r}\right)\right] \Omega_{jl'm} =$$

$$\hat{p}\times\underline{r} = -\underline{L} \qquad p = -i\hbar\,\underline{\nabla}$$

$$= -i\left(\frac{2\hbar}{r} + \frac{1}{r}\,\underline{\hat{L}}\,\underline{\hat{\sigma}}\right) \Omega_{jl'm} \quad (*)$$

$$\hat{\underline{J}} = \underline{L} + \frac{\hbar}{2}\underline{\sigma} \qquad \underline{J}^2 = \underline{L}^2 + \left(\frac{\hbar}{2}\underline{\sigma}\right)^2 + \hbar\,\underline{L}\,\hat{\underline{\sigma}}$$

$$\hbar\underline{\hat{L}}\,\underline{\sigma} = J^2 - L^2 - \frac{\hbar^2}{4}\underline{\sigma}^2 = \left(j(j+1) - l'(l'+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right)\hbar^2$$

az $\Omega_{jl'm}$-re hattatva $\quad j(j+1) \quad l'(l'+1) \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)$

$s = \frac{1}{2}$

legyen $K = \mp\left(j+\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} -\left(j+\frac{1}{2}\right) & \text{ha } j = l+\frac{1}{2} \\ +\left(j+\frac{1}{2}\right) & \text{ha } j = l-\frac{1}{2} \end{cases}$

$|K| = j+\frac{1}{2}$ ezzel és $2j = l+l'$ -vel:

$\hbar \underline{\hat{L}}\,\hat{\underline{\sigma}} = (K-1)\hbar^2$

$\Downarrow$

(*) -ba visszaírva

$$-\left(\hat{\underline{\sigma}}\hat{\underline{r}}\right)\Omega_{jlm} = -\frac{i}{r}\hbar\,(K+1)\,\Omega_{jl'm}$$

Hasonlóan $l \leftrightarrow l'$ esetén:

$$-\left(\hat{\underline{\sigma}}\hat{\underline{r}}\right)\Omega_{jl'm} = -\frac{i}{r}\hbar\,(1-K)\,\Omega_{jlm}$$

visszaírva:

$$\left(\hat{\underline{\sigma}}\hat{\underline{p}}\right)\varphi_{jlm} = \left[-\hbar\frac{dg}{dr} - \frac{g(r)}{r}\hbar\,(1+K)\right]\cdot\Omega_{jl'm}$$

$$\left(\hat{\underline{\sigma}}\hat{\underline{p}}\right)\chi_{jl'm} = \left[-i\hbar\frac{df}{dr} - i\frac{f(r)}{r}\hbar\,(1-K)\right]\Omega_{jlm}$$

→ visszaírva a Dirac-egyenletbe Ω kiesik

$$\hbar\frac{dg}{dr} + (1+K)\hbar\frac{g}{r} - \left(E+m-V(r)\right)f = 0$$

$$\hbar\frac{df}{dr} + (1-K)\hbar\frac{f}{r} + \left(E-m-V(r)\right)g = 0$$

vagy $G = rg$

$F = rf$

$$\hbar \frac{dG}{dr} + \hbar \frac{K}{r} G - (E+m-V) F = 0$$

$$\hbar \frac{dF}{dr} - \hbar \frac{K}{r} F + (E-m-V) G = 0$$

- radiális egyenletek F, G-re
- imp. momentum K-ból jön (hasonlóan nemrel. Schr.-egyenlethez:

$$\underbrace{l(l+1)}_{\text{imp. mom.}} \cdot \underbrace{\dots}_{\text{rad. rész}} \Big)$$

- K függ attól, hogy $j = l \pm \frac{1}{2}$ → spin-pálya-kh.

Hidrogénszerű atomok spektruma

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \qquad \alpha = \frac{e^2}{\hbar} = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad \text{finomszerkezeti állandó}$$

$$\frac{dG}{dr} = -\frac{K}{r} G + \left(\frac{E+m}{\hbar} + \frac{Z\alpha}{r} \right) F$$

$$\frac{dF}{dr} = \frac{K}{r} F - \left[\frac{E-m}{\hbar} + \frac{Z\alpha}{r} \right] G$$

- megoldás menete:

1, $r \to 0$ limesz

2, $r \to \infty$ limesz

3, $r \to 0, \infty$ leválasztva, hatványsor a maradék

1) $r \to 0$

$$\frac{dG}{dr} = -\frac{K}{r} G + \frac{Z\alpha}{r} F$$

$$\frac{dF}{dr} = -\frac{K}{r} F - \frac{Z\alpha}{r} G$$

$F = a\, r^{\gamma} \qquad G = b \cdot r^{\gamma}$

lééma lin. egy. rsz. det $=0$

$$\gamma^2 - K^2 + (Z\alpha)^2 = 0$$

$$\gamma = \pm\sqrt{K^2 - (Z\alpha)^2}$$

ebből még lehetne a kitevő $\ominus$

$-$: nem jó (Ψ normálható és $\frac{Ze^2}{r}$ Coulomb.-en. várható értéke véges)

$+$: $\gamma = \sqrt{K^2 - (Z\alpha)^2}$ $\quad |K| = j + \frac{1}{2} \geq 1 \qquad Z\alpha > 1$

problémás $\quad Z \geq 137$

$\Rightarrow$ vákuum instabil

$\Rightarrow$ párkeltés

(véges kiterjedésű atommagra lehet feljell- tolni a határt)

de ott is van

2) $r \to \infty \qquad$ legyen $\rho = 2\lambda r$

$$\frac{dG}{dr} = \frac{E+m}{\hbar} F$$

$$\frac{dF}{dr} = -\left(\frac{E-m}{\hbar}\right) G$$

$$\frac{dG}{d\rho} = \frac{E+m}{2\hbar\lambda} F(\rho) \quad \xrightarrow{\left/\frac{d}{d\rho}\right. \leftarrow \frac{dF}{d\rho}} \quad \frac{d^2G}{d\rho^2} = \frac{E^2-m^2}{4\hbar^2\lambda^2} G(\rho) = \frac{1}{4} G(\rho)$$

$$\frac{dF}{d\rho} = -\frac{E-m}{2\hbar\lambda} G(\rho)$$

$\Downarrow$

$G(\rho) = e^{\pm|\rho|/2}$ $\quad \oplus$ nem normálható

$\Leftarrow$

$$G(\rho) \sim e^{-\rho/2}$$
$$F(\rho) \sim e^{-\rho/2} \qquad \rho \to \infty$$

legyen ezután: (nem intuitív, hogy így kell felírni)

$$G(\rho) = \sqrt{m+E} \cdot e^{-\rho/2} \cdot \left(\phi_1(\rho) + \phi_2(\rho)\right)$$

$$F(\rho) = \sqrt{m-E} \cdot e^{-\rho/2} \cdot \left(\phi_1(\rho) - \phi_2(\rho)\right)$$

$\rightarrow$ beírva:

$$\frac{d\phi_1}{d\rho} = \left(1 - \frac{Z\alpha E}{\hbar\lambda\rho}\right)\phi_1 - \left(\frac{k}{\rho} + \frac{Z\alpha m}{\hbar\lambda\rho}\right)\phi_2$$

$$\frac{d\phi_2}{d\rho} = \left(-\frac{k}{\rho} + \frac{Z\alpha m}{\hbar\lambda\rho}\right)\phi_1 + \frac{Z\alpha E}{\hbar\lambda\rho}\phi_2$$

legyen:

$$\phi_1 = \rho^{\gamma} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \rho^m \qquad \phi_2 = \rho^{\gamma} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \rho^m$$

beírva:

$$\alpha_m = \frac{(1-n')(2-n')\dots(m-n')}{m!\,(2\gamma+1)\dots(2\gamma+m)} \cdot \alpha_0$$

$$\beta_m = (-1)^m \cdot \frac{n'(n'-1)\dots(n'-m+1)}{m!\,(2\gamma+1)\dots(2\gamma+m)} \cdot \beta_0$$

ahol $n' = \frac{Z\alpha E}{\hbar\lambda} - \gamma$

Ψ normálhatósága $\rightarrow$ véges hatványsorok $\rightarrow$ n' egész $(0, 1, 2, \dots)$

Legyen $n = n' + |\kappa| = n' + j + \frac{1}{2}$

Főkvantumszám:

$n = 1, 2, \dots$

$$\frac{Z\alpha E}{\sqrt{m^2 - E^2}} = n' + \gamma = n - j - \frac{1}{2} + \gamma$$

$$E = \pm m \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\left(n - j - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - (Z\alpha)^2}\right)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Sommerfeld-féle finomszerkezeti formula

→ E n-től j-től függ (l-től, s-től nem) (a potenciál miatt csak $|\kappa|$ jelenik meg)

→ negatív energiás megoldások is vannak (→ térelmélet)

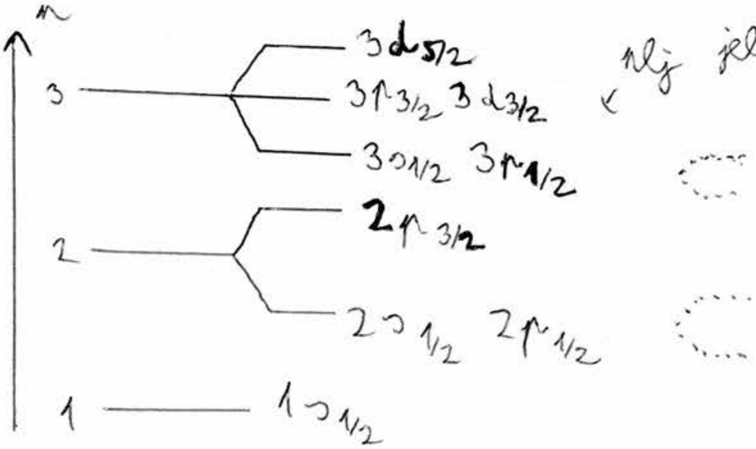
→ E tartalmazza az mc^2 nyugalmi energiát

→ $Z\alpha$ sorfejtés (HF)

$$\frac{E - mc^2}{mc^2} = -(Z\alpha)^2 \left\{ \underbrace{\frac{1}{2n^2}}_{\text{Bohr-féle formula}} + \underbrace{\frac{(Z\alpha)^2}{2n^3}\left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right)}_{\text{finomszerkezet}} \right\} + O\left((Z\alpha)^6\right)$$

H atom $\quad n = 1, 2, \dots$

$$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \frac{2n-1}{2} \qquad (n^2 \geq 0 \text{ legyen})$$



nlj jelölés (n szám, l betű, j szám)

hiperfinom szerk.

- <u>csak n j szerint van felhasadás</u> (rel. eff. + spin-pálya)
- finomabb effektusok:
  - hiperfinom felhasadás (atommag mérete, spinje)
  - Lamb shift (párkeltés térelméletből)