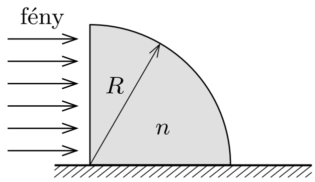
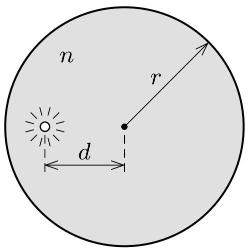
Optika feladatok
(szemelvények a „333 Furfangos Feladat Fizikából” könyvből)

Feladatok

F. 1. Vízszintes asztallapra fektetünk egy negyedhenger alakú üvegtömböt, amelynek függőlegesen álló síklapját rá merőleges, egyenletes fénynyalábbal világítjuk meg. Hol tapasztalhatunk a henger után az asztallapon fényfoltot, ha a henger sugara $R = 5$ cm, anyagának törésmutatója $n = 1{,}5$?

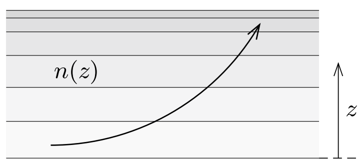




F. 2.** Egy r sugarú, tömör, n törésmutatójú üvegből készült gömb belsejében, a középponttól d távolságra egy pontszerű fényforrás helyezkedik el. A gömb különlegessége, hogy a fényforrásról *tökéletes* (látszólagos) képet alkot, azaz a forrástól az *ábra* jobb oldali térfelébe induló, majd a gömb felületén megtörő fénysugarak meghosszabbításai ugyanabban a pontban metszik egymást.

Mekkora a d távolság, és hol jön létre a fényforrás éles képe?

F. 3.* Egy közegben z irányban változik az optikai törésmutató. Erre merőlegesen vékony fénysugarat indítunk, amely a közegben körív mentén halad. Hogyan függ a törésmutató z-től? Mekkora lehet maximálisan a fény által befutott körív?



F. 4. Egy gömb alakú bolygón a légkör törésmutatója a felszíntől mért h magasság függvényében az

$$n(h) = \frac{n_0}{1 + \varepsilon h}$$

összefüggés szerint változik, ahol n_0 és ε állandók. A bolygó különlegessége, hogy a tetszőleges magasságban vízszintesen elindított lézersugár mindig „körbeszalad” a bolygón. Mekkora a bolygó sugara?

F. 5. Egy rövidlátó ember leveszi a szemüvegét, és miközben egyre távolabb tolja el magától a szemüveget, azon keresztül egy meghatározott tárgyat figyel.

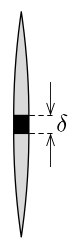
Meglepetten tapasztalja, hogy a tárgy eleinte kisebbnek, majd egyre nagyobbnak látszik. Mi ennek az oka? A szemüveg melyik helyzetében látszik a tárgy a legkisebbnek?

F. 6.* Milyen alakzattá képezi egy f fókusztávolságú gyűjtőlencse a fókusza körüli r sugarú gömböt?

F. 7. Egy optikai padon az ernyő és egy kis izzószál távolsága 120 cm. A lencsét közöttük mozgatva két helyzetben kapunk éles képet, és a két kép méretének aránya 1 : 9. Mekkora a lencse fókusztávolsága? Melyik kép világosabb? Határozzuk meg a két kép fényességének arányát!

F. 8.* Hányszor „fényesebb” a Hold képe egy távcsövön keresztül nézve, mint szabadszemmel? És a csillagok?

F. 9.* Egy f fókusztávolságú gyűjtőlencsét az optikai tengelyét tartalmazó síkkal kettévágunk, majd a két féllencse közé egy kicsiny δ vastagságú, fekete lemezkét toldunk be. A lencsétől $t > f$ távolságra (az „optikai tengelyre”) egy monokromatikus, λ hullámhosszúságú, pontszerű fényforrást helyezünk.



Hány interferenciacsíkot láthatunk a lencse túloldalán H távolságra elhelyezett, az optikai tengelyre merőleges síkú ernyőn? (Adatok: $f = 10$ cm, $t = 20$ cm, $\delta = 1$ mm, $\lambda = 0{,}5$ µm, $H = 50$ cm.)

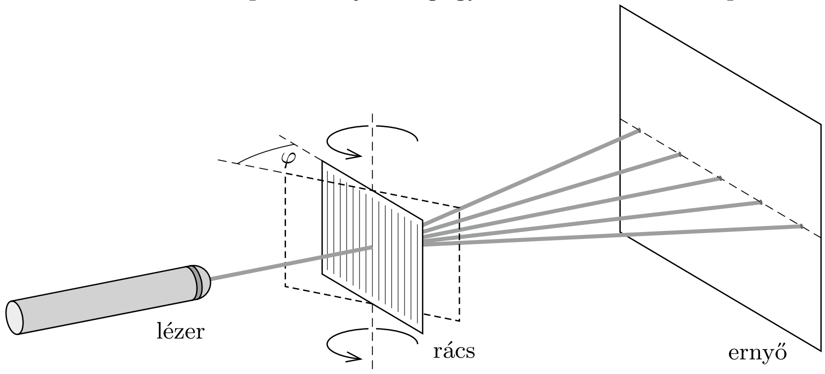
F. 10.* Egy furcsa optikai rácson a rések nem egyenlő közönként helyezkednek el: a szomszédos rések távolsága felváltva d és $3d$. Milyen elhajlási kép alakul ki az L távolságra elhelyezett ernyőn, ha a rácsot (annak síkjára merőlegesen) λ hullámhosszúságú lézerfénnyel világítjuk meg? (A rések szélessége egyforma és sokkal kisebb a távolságuknál, valamint $\lambda \ll d$.)

F. 11.* Egy optikai rácsra, rá merőlegesen, λ hullámhosszúságú lézerfényt bocsátunk. A rács, melynek szomszédos rései d távolságra vannak egymástól, nem egészen szokványos: szélesebb és keskenyebb rések felváltva követik egymást. (Például a páratlan sorszámúak szélessége a, a párosaké b, ahol $b < a$ és mindkettő sokkal kisebb, mint d.)

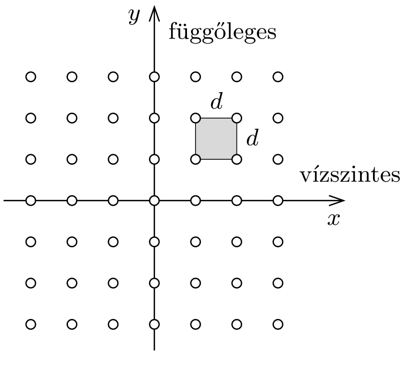
A rács fenti sajátsága jellegzetes, könnyen észrevehető módon mutatkozik meg az elhajlási képben. Hogyan? Milyen lesz az elhajlási kép a $b \ll a$ és $b \approx a$ esetekben? (A rács és az ernyő távolsága L, és $\lambda \ll d$.)

F. 12. Vízszintesen haladó, keskeny, λ hullámhosszúságú lézernyalábbal világítunk meg egy – a lézerfény irányára merőlegesen álló – optikai rácsot, amelynek d távolságú rései függőlegesek. A rácstól viszonylag messze, a beeső lézerfény irányára merőlegesen elhelyezett ernyőn kialakuló elhajlási kép – mint az jól ismert – vízszintes egyenesen elhelyezkedő „pontsorból” (valójában fényfoltokból) áll.

Hogyan változik meg az ernyőn látható kép (lásd a következő oldal felső *ábráját*), ha a rácsot *függőleges* középvonala körül φ szöggel elforgatjuk? Vizsgáljuk meg részletesebben a „nagyon lapos beesés” (vagyis a $\varphi \approx 90°$) határesetet! Mekkora rácsállandó esetén kaphatunk jól megfigyelhető interferenciaképet?



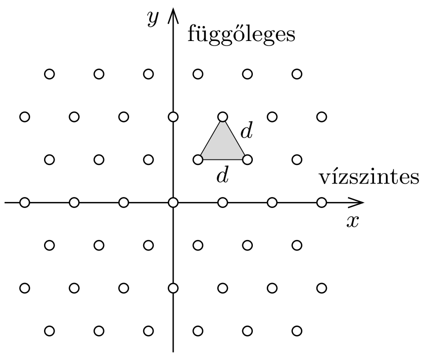
F. 13.** Hogyan változik meg az *előző feladatban* leírt elrendezésben az ernyőn látható elhajlási kép, ha a rácsot *vízszintes* középvonala körül forgatjuk el valamekkora φ szöggel? (Legyen például $\varphi = 45°$.)



F. 14.* Egy átlátszatlan lapon kicsiny lyukak vannak az *ábrán* látható négyzetrács elrendezésben. A lapot monokromatikus, λ hullámhosszúságú lézerfénnyel világítjuk meg merőlegesen. Milyen elhajlási képet figyelhetünk meg a rácstól L távolságra elhelyezett ernyőn, ha a rácsállandó d? (Feltételezhetjük, hogy $L \gg d \gg \lambda$.)

Hogyan változik az interferenciakép, ha a lapot a négyzet egyik oldala mentén N-szeresére nyújtjuk, és így a rajta lévő lyukak elrendeződése „téglalaprács” lesz?

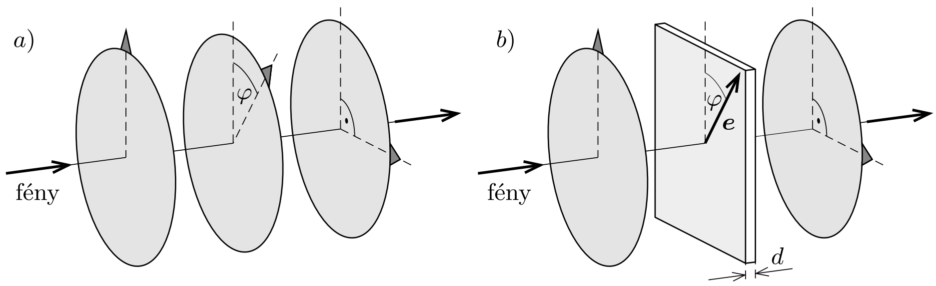
F. 15. Egy átlátszatlan lapon kicsiny lyukak vannak az *ábrán* látható háromszögrács elrendezésben. A lapot monokromatikus, λ hullámhosszúságú lézerfénnyel világítjuk meg merőlegesen. Milyen elhajlási képet figyelhetünk meg a rácstól L távolságra elhelyezett ernyőn, ha a rácsállandó d? (Feltételezhetjük, hogy $L \gg d \gg \lambda$.)



F. 16.* *a*) Keresztezett állású polárszűrőkön nem jut át a fény. Ha közéjük becsúsztatunk egy harmadik polárszűrőt, valamennyi fény átjuthat. A bejövő fény intenzitásának legfeljebb hányadrésze juthat át? Mekkora ebben az esetben az *a*) *ábrán* látható φ szög?

b) Úgy is átjuthat fény a keresztezett állású polárszűrőkön, ha közéjük egy velük párhuzamos, kettőstörő kristályból készült plánparalel lemezt helyezünk. Ennek a lemeznek az a speciális tulajdonsága, hogy törésmutatója a síkjában fekvő $\boldsymbol{e}$ iránnyal párhuzamos polarizációjú fényre nézve n_1, az $\boldsymbol{e}$ irányra merőleges polarizációjú fényre nézve pedig n_2.

Legfeljebb hányadrésze juthat át a bejövő fény intenzitásának, ha a rendszert (a polárszűrők és a lemez síkjára merőlegesen) λ hullámhosszú, monokromatikus fénnyel világítjuk meg? Ebben az esetben mekkorának kell lennie a kettőstörő lemez d vastagságának, és hogyan válasszuk meg az $\boldsymbol{e}$ irányt?



F. 17.** *a*) Péter, a tizedik osztályos gimnazista nagytakarításkor egy régi, 3D-s filmvetítéskor használatos szemüvegre bukkant, amivel kísérletezni kezdett. A szemüveggel a fején tükörbe nézve azt tapasztalta, hogy ha az egyik szemét becsukja, akkor a tükörképen csak a nyitott szemét látja; a másik, csukott szeme előtti szemüveglencsét teljesen sötétnek látja. Mi lehet Péter kísérletének magyarázata?

b) Néhány héttel később Péter 3D-s moziban járt, és hazatérve az újonnan kapott 3D-s szemüveggel is elvégezi a kísérletet. Legnagyobb meglepetésére ezúttal épp fordított eredményre jut: csak a becsukott szemét látja a tükörben, a nyitott szemét pedig nem. Segítsünk Péternek megmagyarázni a különös tapasztalatokat!

Útmutatás

U. 1. Sem a negyedhenger közvetlen közelében, sem egy meghatározott távolság után nem éri fény az asztalt. Az asztal közeli pontjait a teljes visszaverődés miatt nem érheti fény, míg a megvilágított tartomány távolabbi határát úgy határozhatjuk meg, ha a negyedhenger asztalhoz közeli részét sík-domború hengerlencsének tekintjük.

U. 2. Ha két, azonos pontból induló, egymáshoz közeli fénysugár egy pontban újra találkozik, akkor a Fermat-elv szerint a két sugármenet optikai úthosszai egyenlőek. Széttartó sugarakra ez úgy alkalmazható, ha leképező eszközzel (mondjuk egy lencsével vagy a szemünkkel) egy pontba fókuszáljuk őket. Ennek segítségével megmutatható, hogy tökéletes képalkotás esetén bármely sugármenetre igaz az, hogy a fényforrástól a fénysugár töréspontjáig megtett *optikai úthossz* megegyezik a töréspont és a képpont távolságával.

A Fermat-elv helyett a Snellius–Descartes-törvény segítségével is megoldhatjuk a feladatot, például egy speciális (a gömbből érintőlegesen kilépő) sugármenet vizsgálatával.

U. 3. Képzeletben szeleteljük fel a közeget z-re merőlegesen vékony rétegekre. Az egyes rétegeket tekintsük különböző törésmutatójú plánparalel lemezeknek, és állapítsuk meg, hogy milyen összefüggés érvényes a réteg törésmutatója és a fénysugár beesési szöge között.

U. 4. A Fermat-elv szerint az egymáshoz nagyon közeli fénysugarak ugyanannyi idő alatt futják be a pályájukat.

A Huygens-elv alkalmazása is eredményre vezethet. Eszerint az azonos fázisú felületek minden pontjából elemi gömbhullámok indulnak ki, melyek a fény c/n fázissebességével terjedve kialakítják az új fázisfelületet. A geometriai optika szóhasználatának megfelelő „fénysugár” (amely csak közelítő leírásmód) a fázisfelületekre merőleges irányban halad.

Teljes visszaverődések sorozatával is értelmezhetjük az „elkanyarodó” fény jelenségét.

U. 5. A kép látszólagos nagyságát nem a kép mérete, hanem a látószöge szabja meg.

U. 6. Kövessük nyomon a gömb egy felületi pontjáról kiinduló fénysugarak útját! A megoldás egy kúpszelet alakú görbének az optikai tengely körüli megforgatásából adódó forgásfelület lesz.

U. 7. A fókusztávolságot a leképezési törvény és a nagyítás összefüggésének felhasználásával kaphatjuk meg. A fényességek arányát nemcsak a képek mérete, hanem a lencsére érkező fény mennyisége is befolyásolja.

U. 8. A Hold látszólagos fényességét a retina megvilágításának erőssége (vagyis az ideghártya egységnyi felületére érkező fény intenzitása) határozza meg. Távcsövön keresztül nézve több energia érkezik a szemünkbe, mint amikor szabad szemmel nézzük a Holdat, de a keletkező kép területe is nagyobb a távcsöves megfigyelés esetében.

U. 9. A két féllencse egy-egy pontszerű, valódi képet állít elő a fényforrásról. Ezek a képek, mint koherens pontforrások hoznak létre interferenciát az ernyőn. Az ernyőnek csak azon a részén figyelhetünk meg interferenciacsíkokat, ahol a két képpontból érkező fénynyalábok átfednek.

U. 10. A furcsa optikai rács felfogható két $4d$ rácsállandójú, egymáshoz képest d távolsággal eltolt hagyományos optikai rács szuperpozíciójaként. Az ernyő különböző pontjaiban mérhető fényintenzitás egyenesen arányos az oda jutó fényhullámok eredő amplitúdójának *négyzetével*.

U. 11. Az elhajlási képről a *Huygens–Fresnel-elv* alapján tehetünk kijelentéseket. Eszerint az egyes réseken áthaladó „elemi hullámok" amplitúdó- és fázishelyes összege adja meg az eredő hullámot, ennek amplitúdó-négyzetével arányos az ernyő egyes pontjaiba érkező fény intenzitása. Egy-egy résből érkező hullám amplitúdója a rés *szélességével* arányos, fázisát pedig az optikai úthossz határozza meg.

U. 12. Vizsgáljuk meg, hogy milyen irányokban lesz a különböző réseken áthaladó fénysugarak útkülönbsége a hullámhossz egész számú többszöröse. A lézerfény beesési irányából tekintve a rácsra annak rácsállandóját $d\cos\varphi$ méretűnek „látjuk". Tévedés lenne ebből arra következtetni, hogy az elhajlási irányok egy ilyen (sűrűbb) rácsra merőlegesen eső fény elhajlási képével egyezik meg.

U. 13. Érdemes először rács helyett egyetlen keskeny rés által létrehozott elhajlást vizsgálni. A résen irányváltoztatás nélkül áthaladó fénynyaláb sugarai zérus útkülönbséggel érkeznek az ernyőre, itt tehát erősítést tapasztalunk. Keressük meg, hogy ezen kívül még a tér mely irányaiban lesz a fénysugarak útkülönbsége nulla. Szükségünk lesz a kúpszeletekre vonatkozó ismereteinkre.

U. 14. Az ernyőn olyan pontokban tapasztalunk interferencia-maximumot (fényes foltocskákat), ahová az összes lyukból ugyanolyan fázisban érkeznek meg a fényhullámok (Huygens–Fresnel-elv). Fogalmazzuk meg ennek matematikai feltételét a lyukak helyzetét megadó $\boldsymbol{r} = (x, y)$ és az ernyőn az erősítési pontba mutató $\boldsymbol{R} = (X, Y)$ vektorok segítségével!

U. 15. Egy négyzetrács alkalmas irányú és alkalmas szorzófaktorú *nyújtással* szabályos háromszögráccsá alakítható át, és viszont. Hogy mi történik eközben az elhajlási kép mintázatával, az kiderül az előző feladat megoldásából.

U. 16. *a*) A polárszűrők csak a polarizációs irányukkal párhuzamos elektromos térerősségű fényt engedik át. A fény intenzitása arányos az amplitúdó négyzetével.

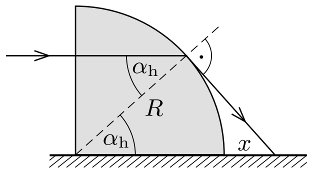
b) Meglepő, de a d lemezvastagság és az $\boldsymbol{e}$ irány megfelelő választása esetén a bejövő fény 100%-a is átjuthat a rendszeren.

U. 17. *a*) A takarításkor talált 3D-s szemüveg „lencséi” (valójában fóliái) lineáris polárszűrők, melyek egymásra merőleges állásúak.

b) Az *a*) esettől merőben eltérő tapasztalat arra utal, hogy az újonnan szerzett 3D-s szemüveg cirkulárisan poláros fénnyel működik. Ilyen fényt lineárisan poláros fényből az előző feladatban is szereplő kettőstörő lemezzel lehet előállítani (és analizálni), ha a lemez vastagsága és az orientációja megfelelő.

Megoldások

M. 1. Tekintsük a fénynyalábot egymással párhuzamos fénysugarakból állónak! A sugarak irányváltoztatás nélkül haladnak át a negyedhenger függőleges síklapján, majd különböző beesési szöggel érik el a palástot. A fénysugarakhoz tartozó beesési merőlegesek mindig sugárirányúak.



Minél magasabban lép be egy fénysugár a negyedhengerbe, annál nagyobb lesz a beesési szöge a hengerpaláston. Az *ábrán* látható esetben a beesési szög éppen a teljes visszaverődés határszöge, tehát csak az ennél alacsonyabban érkező fénysugarak léphetnek ki a negyedhengerből (különböző mértékű fénytörés után). A határhelyzet az ábra alapján meghatározható:

$$\sin\alpha_h = \frac{1}{n} = \frac{2}{3}, \qquad \text{továbbá} \qquad \frac{R}{R+x} = \cos\alpha_h,$$

amiből $x = 1{,}71$ cm, tehát a negyedhenger mögött ekkora távolsággal kezdi megvilágítani a fény az asztalt.

Az asztalhoz egyre közelebb haladó, vízszintes fénysugarak beesési szöge egyre kisebb, így egyre kevésbé térülnek el a fénytörés következtében. Geometriai számításokkal belátható, hogy a kisebb beesési szögű fénysugarak egyre messzebb érik el az asztal felületét. Könnyen arra gondolhatunk, hogy a fényfolt elvileg akármilyen messze eljuthat az asztalon, hiszen az asztal síkjában érkező sugár irányváltoztatás nélkül lép ki. Ez azonban tévedés! A fénysugarak útját (például a beesési szög függvényében) végigkövetve láthatjuk, hogy a fény nem is jut olyan messzire az asztallapon.

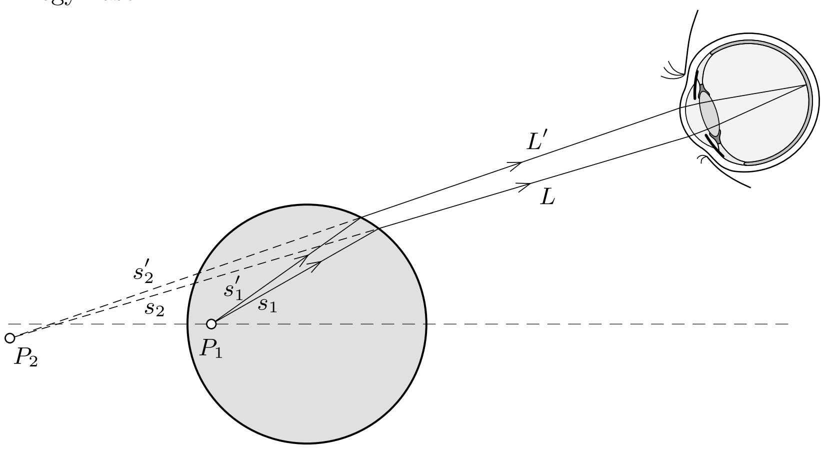
A hosszadalmas (bár trigonometriai közelítésekkel leegyszerűsíthető) számolás helyett egy egyszerű „trükk” segítségével is megkaphatjuk a fényfolt legtávolabbi pontját. Tekinthetjük úgy, mintha az asztalhoz közel haladó fénysugarak előbb egy R-nél kicsivel kisebb vastagságú plánparalel lemezen, majd egy ehhez kapcsolódó vékony, R görbületi sugarú síkdomború hengerlencsén haladnának át. A merőleges beesés miatt a plánparalel lemez hatása figyelmen kívül hagyható. A síkdomború lencse f fókusztávolságát a vékony lencsékre érvényes

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

formula alapján számíthatjuk ki, ahol R_1 és R_2 a lencsét két oldalról határoló felületek görbületi sugara. Esetünkben $R_1 = R$, valamint $R_2 \to \infty$, innen a fókusztávolság, vagyis a fényfolt legtávolabbi részének távolsága a negyedhengertől:

$$f = \frac{R}{n-1} = 10 \text{ cm}.$$

M. 2. *I. megoldás.* Válasszuk optikai tengelynek a pontszerű fényforráson és a gömb középpontján átmenő egyenest. Ha a fényforrást a gömb belsejében valamely általános P_1 pontba helyezzük, a kialakuló látszólagos kép nem lesz pontszerű. Bár az optikai tengely közelében haladó keskeny sugárnyaláb az optikai tengelyen, jó közelítéssel egy pontban fókuszálódik, de a tengelytől jobban eltávolodó, egymással kis szöget bezáró fénysugarak meghosszabbításai nem ugyanebben a pontban metszik egymást.



1. ábra

Tekintsük az *1. ábrán* látható, egymáshoz közel haladó két fénysugarat. A fényforrástól a gömb felületéig a sugarak s_1 és s_1' utat tesznek meg, itt megtörnek, majd L, illetve L' optikai úthossz befutása után végül a (távoli) szemünk retináján találkoznak. A Fermat-elv szerint a fény két pont között olyan útvonalon halad, melynek megtételéhez szükséges idő (és így a két pont közötti optikai úthossz is) az egymáshoz közeli pályák közül a lehető legkisebb. Ha a fény két *közeli* pályán is eljut az egyik pontból a másikba, akkor a két pályán az optikai úthosszak megegyeznek:

$$ns_1 + L = ns_1' + L'. \tag{1}$$

A szemünk a P_1 pontba helyezett fényforrást a vizsgált két fénysugár meghosszabbításának P_2 metszéspontjában érzékeli. Ez a metszéspont általában nem esik az optikai tengelyre, és helyzete függ a vizsgált két fénysugár megválasztásától (azaz a szemünk helyzetétől). Ha a P_2 pontban keletkező virtuális kép helyére gondolatban egy fényforrást helyezünk, ismét alkalmazhatjuk a Fermat-elvet az 1. ábrán látható két sugárra. A P_2 ponttól a szemünk retinájáig megtett optikai úthosszak egyenlőek:

$$s_2 + L = s_2' + L'. \tag{2}$$

Képezzük az (1) és (2) egyenletek különbségét:

$$ns_1 - s_2 = ns_1' - s_2'. \tag{3}$$

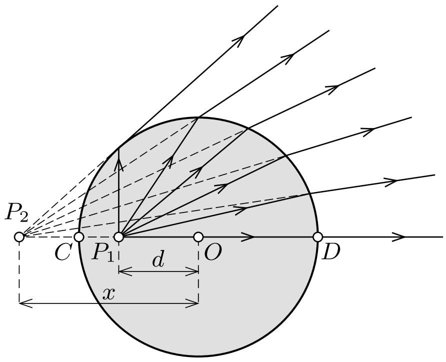
Ez az összefüggés jellemzi tehát két *közeli* fénysugár metszéspontjának helyét. Egymáshoz képest nagy szögben haladó fénysugarakra hasonló egyenlőség általában nem igaz, kivéve azt a speciális esetet, amikor a (3) egyenlet mindkét oldalán nulla áll, vagyis bármely sugármenetre $s_2/s_1 = n$. Ez teljesíthető, ha az üveggömb felülete éppen a P_1 és P_2 pontok egyik *Apollóniosz-gömbjével* esik egybe[1]. Ekkor a P_2 pont helyzete nem függ a közeli fénysugarak megválasztásától, minden sugár meghosszabbítása ugyanazon a ponton megy keresztül (amely a szimmetria miatt az optikai tengelyre esik).

Tökéletes képalkotás esetén tehát a gömb bármely pontja n-szer távolabb helyezkedik el a képponttól, mint a fényforrástól. Ez igaz a *2. ábrán* látható C és D pontokra is:

$$\frac{x-r}{r-d} = n, \qquad \frac{x+r}{d+r} = n,$$

ahol x a képpont távolsága a gömb O középpontjától. Ebből a két egyenletből meghatározhatjuk a keresett távolságokat:

$$d = \frac{r}{n} \qquad \text{és} \qquad x = nr.$$



2. ábra

II. megoldás. Tekintsük a gömb *3. ábrán* látható síkmetszetét (ez a k_1 kör), és jelöljük a pontszerű fényforrás keresett helyzetét T-vel, a keletkező (tökéletes) képpontot pedig K-val. Vizsgáljuk azt a fénysugarat, amely a gömbből éppen érintőlegesen lép ki, és jelöljük a kilépési pontot A-val. A tökéletes képalkotás miatt ennek a fénysugárnak a meghosszabbítása átmegy a K ponton. A megtört fénysugár merőleges a gömb O középpontjából az A pontba húzott sugárra, ezért a törési szög $\beta = 90^\circ$. A Snellius–Descartes-törvény szerint

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = n, \tag{4}$$

azaz a vizsgált fénysugár α beesési szögére fennáll a $\sin\alpha = 1/n$ összefüggés.

A (4) egyenlet igaz a gömbből kilépő többi fénysugárra is (azaz a k_1 kör K ponton átmenő szelőire), ezért az összes lehetséges sugármenet közül $\sin\alpha$ akkor maximális, ha $\sin\beta$ értéke a lehető legnagyobb, nevezetesen 1. Az α szög tehát éppen az A pontnál érintőlegesen kilépő sugár esetén maximális, ami azt jelenti, hogy az A ponthoz *közeli* pontokban kilépő fénysugarak beesési szöge mind ugyanakkora. Ebből következik, hogy a TO szakasz fölé rajzolt, α szögű k_2 látószögkörív

[1] Apollóniosz tétele szerint a sík azon pontjainak mértani helye, melyek a sík két rögzített pontjától mért távolságának aránya (1-től különböző) állandó, egy kör (Apollóniosz-kör), térben pedig ezen kör megforgatásából adódó gömb.

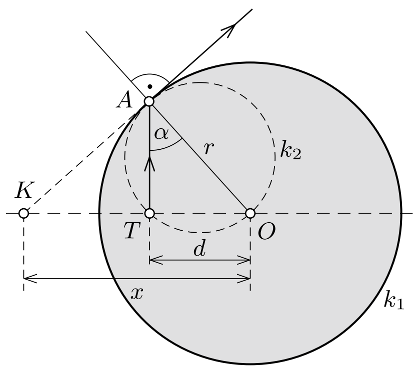
Apollóniosz időszámításunk kezdete előtt 262-től 190-ig élt; a kúpszeletekről írt munkájában ő vezette be az ellipszis, a parabola és a hiperbola kifejezéseket.

éppen érinti a k_1 kört az A pontban. (Ellenkező esetben a k_1 és k_2 körök metszenék egymást az A pontban, így az A pontnál kilépő fénysugár kilépési pontját kicsit elmozdítva a beesési szög csökkenne vagy növekedne.) A k_2 kör átmérője tehát az AO szakasz, így az OTA háromszögnek k_2 a Thalész-köre, az OTA szög pedig derékszög.

Az OTA derékszögű háromszög TO befogója nem más, mint a keresett d távolság, ezért

$$\sin\alpha = \frac{d}{r},$$

ahonnan $d = r/n$. Az OTA és OAK háromszögek hasonlóságából a kép és a gömb középpontjának távolságára $x = nr$ adódik.

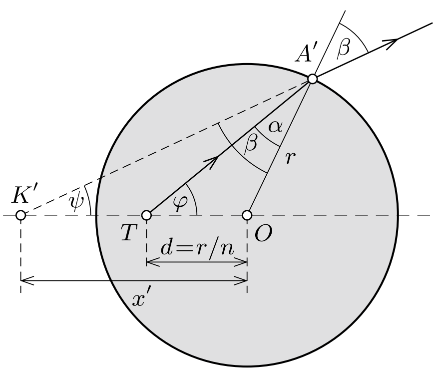


3. ábra

Hátravan még annak belátása, hogy a T pontból (a jobb oldali térfél felé) induló, majd a gömbfelületen megtörő *valamennyi* fénysugár meghosszabbítása a K ponton halad keresztül. Jelöljük a T-ből φ szögben kiinduló fénysugár törési pontját A'-vel (*4. ábra*), és számítsuk ki, hogy ezen fénysugár meghosszabbítása mekkora x' távolságban metszi az optikai tengelyt.

Írjuk fel az OTA' háromszögre a szinusztételt, és használjuk ki, hogy $d = r/n$:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = \frac{d}{r} = \frac{1}{n}.$$



4. ábra

Ebből, valamint a (4) Snellius–Descartes-törvényből $\sin\beta = \sin\varphi$ adódik, és mivel hegyesszögekről van szó, ebből $\beta = \varphi$ következik. Igaz továbbá, hogy $\varphi + \alpha = \psi + \beta$, tehát fennáll az $\alpha = \psi$ összefüggés is. Innen, valamint az $OK'A'$ háromszögre felírható szinusztételből következik, hogy

$$x' = r\frac{\sin\beta}{\sin\psi} = r\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = nr,$$

és K' egybeesik K-val. Mivel ez minden (90°-nál nem nagyobb) φ-re, tehát minden (jobb oldali térfél felé induló) fénysugárra igaz, a képalkotás ezekre a sugarakra tökéletes.

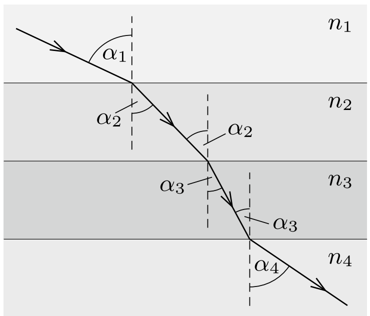
M. 3. Az *1. ábrán* egymás után elhelyezett, különböző abszolút törésmutatójú plánparalel lemezeket láthatunk, amelyeken vékony fénysugár halad át.

A Snellius–Descartes-törvény alkalmazásával a következő összefüggéseket ismerhetjük fel:

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_3}, \ldots$$

Megállapíthatjuk, hogy a beesési szög szinusza és az abszolút törésmutató szorzata a helytől független állandó:

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2 = \ldots = n \sin\alpha = \text{állandó}.$$



1. ábra

A folytonosan változó törésmutatójú közegre is érvényes ez az összefüggés, hiszen a közeget tekinthetjük úgy, mintha vékony plánparalel lemezekből épülne fel. Helyezzük a koordináta-rendszer origóját oda, ahonnan a fénysugár indul. Itt a beesési szög 90°-os, és ha ugyanitt a törésmutató n_0 értékű, akkor a fenti összefüggés így írható:

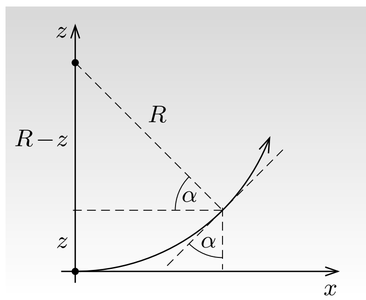
$$n(z) \sin\alpha = n_0.$$

Tételezzük fel, hogy a fény R sugarú köríven halad, és vizsgáljuk a *2. ábrán* feltüntetett z koordinátájú helyet. Alkalmazzuk az előbbiekben megállapított összefüggést:

$$n_0 = n(z)\sin\alpha = n(z)\frac{R-z}{R},$$

amiből a törésmutató helyfüggése:

$$n(z) = \frac{R}{R-z} n_0.$$



2. ábra

A legnagyobb törésmutatójú ismert anyag (látható fény esetén) a gyémánt, de még ennek törésmutatója sem éri el az $n_{\max} = 2{,}5$-ös értéket. Lényegében ez szab határt annak, mekkora lehet maximálisan a fénysugár által befutott körív. Ha a törésmutató $n_0 = 1$-től $n_{\max} = 2{,}5$-ig változik, akkor z legnagyobb értéke $3R/5$ lehet, ami 66,4°-os középponti szögű körívnek felel meg.

A gyakorlatban pontosan körív mentén nehezen „terelhető” a fény, olyan oldatot azonban lehet készíteni, amelyben a koncentráció – és ezzel együtt a törésmutató – függőleges irányban folytonosan változik. Ilyen oldatban a fénysugár nem egyenesen, hanem valamilyen „sima” görbe mentén terjed.

Megjegyzések. 1. Felmerülhet a kérdés, hogy miért kezd el görbülni az x tengely mentén belépő fénysugár. Ennek oka az, hogy végtelen vékony fénysugár nincs, a „sugár” mindig valamilyen véges vastagságú nyalábot jelent. A nyaláb keresztmetszete mentén a törésmutató (vagyis a terjedési sebesség) változik, emiatt a hullámfront elfordul, és a nyaláb eltérül.

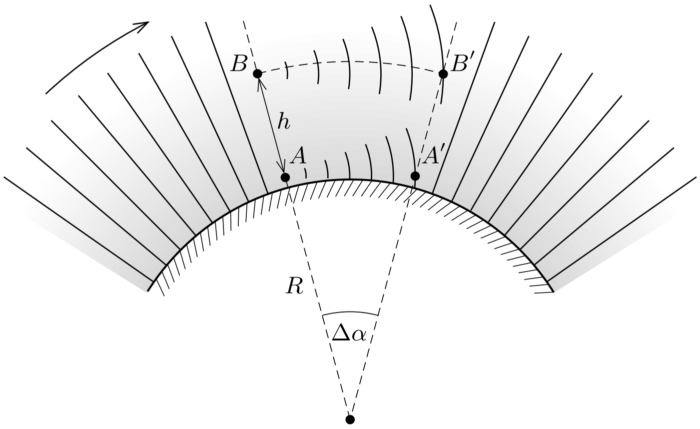
2. Nyáron a felforrósodott talaj fölötti levegőben függőlegesen felfelé haladva gyors ütemben csökken a hőmérséklet, ezáltal a sűrűség és a törésmutató is növekszik. Az ebben a közegben elgörbülő fénysugarak okozzák a délibáb jelenségét.

M. 4. *I. megoldás.* A *Fermat-elv* szerint az egymáshoz nagyon közeli fénysugarak ugyanannyi idő alatt futják be a pályájukat. Alkalmazzuk ezt az R sugarú bolygó felszínének közelében $2R\pi$ utat c/n_0 sebességgel befutó fény és a h magasságban ($h \ll R$) $c/n(h)$ sebességgel haladó fényre:

$$\frac{2R\pi}{c}n_0 = \frac{2(R+h)\pi}{c}n(h) = \frac{2\pi R n_0}{c}\cdot\frac{1+h/R}{1+\varepsilon h}.$$

Ez az összefüggés akkor teljesül különböző $h \neq 0$ értékekre, ha $R = 1/\varepsilon$.

II. megoldás. A *Huygens-elv* szerint az azonos fázisú felületek (hullámfrontok) minden pontjából elemi gömbhullámok indulnak ki, melyek a hullám terjedési sebességével haladnak. Ez a sebesség (ún. fázissebesség) a vákuumbeli c fénysebességnek $1/n(h)$-szorosa, ahol $n(h)$ a közeg törésmutatója az aktuális helyen.



1. ábra

Vizsgáljuk az *1. ábrán* látható, az A és B pontokra illeszkedő, az ábra síkjára merőleges hullámfrontot. Egy kicsiny Δt idővel később a hullámfront az A' és B' pontokra illeszkedik, és ha eközben az iránya éppen $\Delta\alpha$ szöggel fordul el, akkor a rá merőleges fénysugarak „vízszintesen” haladnak tovább. Ennek feltétele a fázissebességekkel kifejezve:

$$BB' = (R+h)\Delta\alpha = \frac{c}{n(h)} \cdot \Delta t,$$

$$AA' = R\Delta\alpha = \frac{c}{n_0} \cdot \Delta t.$$

A két egyenletet elosztva egymással:

$$1 + \frac{h}{R} = \frac{n_0}{n(h)} = 1 + \varepsilon h,$$

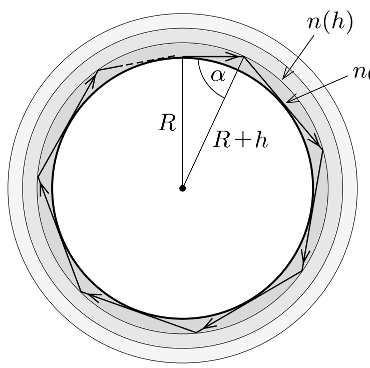
amiből $R = 1/\varepsilon$ következik, összhangban az I. megoldás eredményével.

Megjegyzés. A kétféle megoldás nem független egymástól, hiszen a geometriai optika keretei között megfogalmazott Fermat-elv hullámoptikai megalapozását éppen a Huygens-elv biztosítja.

III. megoldás. A körbefutó fény jelenségét teljes visszaverődések sorozataként is értelmezhetjük (*2. ábra*). Közelítsük a folytonosan változó törésmutatójú légkört kicsiny $h \ll R$ vastagságú rétegekkel, és egy-egy rétegen belül tekintsük a törésmutatót állandónak. Ha teljesül az

$$\frac{n(h)}{n_0} = \sin\alpha = \frac{R}{R+h},$$

vagyis az $R = 1/\varepsilon$ feltétel, akkor a vízszintesen elinduló fénysugár a réteg tetejénél teljes visszaverődést szenved, és teljes visszaverődések sorozata után „körbefutva” visszaérkezhet a kiindulási helyre. (Természetesen ehhez még a fényelnyelődésnek is elhanyagolhatóan kicsinek kellene lennie, ami reális körülmények között nem áll fenn.)



2. ábra

M. 5. A rövidlátók szemüvegének lencséje szórólencse. Jelöljük a szórólencse (negatív) fókusztávolságát $-f$-fel, a tárgy és a szemünk távolságát d-vel, a tárgy méretét pedig T-vel (lásd az *ábrát*)! A keletkező (virtuális) kép távolsága a lencsétől a lencsetörvény szerint

$$\frac{1}{-k} + \frac{1}{t} = \frac{1}{-f}, \qquad \text{azaz} \qquad k = \frac{tf}{t+f},$$

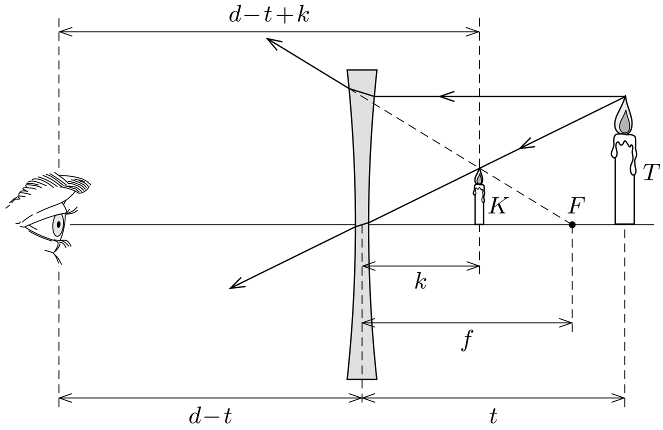
a kép mérete pedig

$$K = \frac{k}{t}T = \frac{f}{t+f}T.$$

A kép látszólagos nagyságát azonban nem K, hanem az a φ látószög határozza meg, amely alatt a kép látszik. Ennek nagysága (a tárgytávolsághoz képest kis tárgyat tételezve fel):

$$\varphi = \frac{K}{d-t+k} = \frac{fT}{t(d-t)+fd},$$

ahol d a szemünk és a tárgy távolsága.



A látószög t függvényében akkor lesz a legkisebb, amikor a fenti kifejezés jobb oldalán a nevező a legnagyobb. A t és $(d-t)$ pozitív mennyiségekre felírhatjuk a számtani és mértani középértékek közötti egyenlőtlenséget:

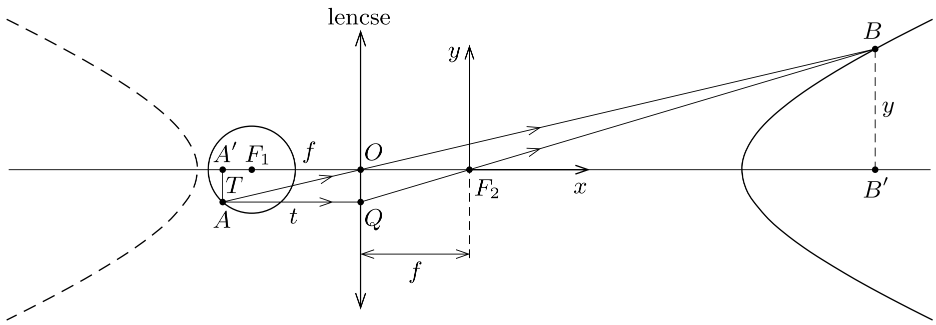
$$t(d-t) \le \left[\frac{t+(d-t)}{2}\right]^2 = \frac{d^2}{4}.$$

Egyenlőség $t = d/2$ esetén áll fenn, ekkor lesz a φ látószög a lehető legkisebb. A tárgyat tehát akkor látjuk a legkisebbnek, amikor a lencsét ugyanolyan messze tartjuk a szemünktől, mint a tárgytól. Érdekes, hogy ez a feltétel független a lencse fókusztávolságától.

M. 6. Tételezzük fel, hogy a gömb átlátszó (tehát a felületének bármely pontjából eljuthat a fény a lencséhez), de a belsejének törésmutatója nem különbözik a levegőétől, így a fénysugarak csak a lencsénél törnek meg. A gyakorlatban ilyen helyzet például egy gömbfelület alakú, vékony, de nem nagyon sűrű szövésű dróthálóval valósítható meg.

A gömbfelület forgásszimmetriája miatt elegendő a gömb egy síkmetszetének, az optikai tengelyre illeszkedő egyik főkörének képét meghatároznunk, a teljes kép ezen görbe megforgatásából adódó forgásfelület lesz.

Tekintsük a lencse egyik (F_1) fókuszpontja körüli r sugarú kör valamely A pontját, és szerkesszük meg két nevezetes sugár segítségével az A-nak megfelelő B képpontot az *ábrán* látható módon. Célszerű a B pontot a másik (F_2) fókuszpontba helyezett derékszögű koordináta-rendszerbeli (x, y) számpárral jellemezni.



Az $OA'A$ és $OB'B$ háromszögek hasonlóságából

$$\frac{y}{x+f} = \frac{T}{t},$$

az $F_2B'B$ és F_2OQ háromszögek hasonlóságából pedig

$$\frac{y}{x} = \frac{T}{f}$$

következik. (A szokásos módon t az A pontnak megfelelő tárgytávolságot, T pedig a tárgy méretét jelöli.) Ezekből az arányokból T és t kifejezhető x és y segítségével:

$$T = f\frac{y}{x}, \qquad \text{illetve} \qquad t = f + \frac{f^2}{x}.$$

Az A és F_1 pontok távolsága rögzített érték (a gömb r sugara):

$$(t-f)^2 + T^2 = r^2,$$

ahonnan t és T behelyettesítése, valamint algebrai átalakítások után a következőt kapjuk:

$$\left(\frac{rx}{f^2}\right)^2 - \left(\frac{y}{f}\right)^2 = 1.$$

Ez az összefüggés egy hiperbolát ír le, melynek az optikai tengellyel párhuzamos „valós féltengelye” f^2/r, „képzetes féltengelye” pedig f hosszúságú.

A teljes gömbfelület képe a hiperbola mindkét ágának megforgatásából adódó ún. kétköpenyű forgáshiperboloid lesz. A gömb egyik ($t > f$ módon jellemezhető) felének képe *valódi* kép, ennek síkmetszetét az ábra jobb oldalán folytonos vonallal ábrázoltuk. A másik, lencséhez közelebb eső félgömb képe *látszólagos* kép, ennek a bal oldali „köpeny” felel meg (síkmetszetét szaggatott vonal jelzi). A lencse fókuszsíkjában fekvő kör pontjairól nem jön létre kép, a hozzá közeli pontok képei pedig valamelyik hiperboloid-felületen nagyon messze (határesetben a „végtelenben”) alakulnak ki. Ha a gömb nem átlátszó, akkor természetesen csak a lencséhez közelebbi felének virtuális képe jön létre.

Megjegyzés. A megoldás során feltételeztük, hogy a lencse vékony és a képalkotás torzításmentes. Ez utóbbihoz az (is) szükséges, hogy a képalkotásban résztvevő fénysugarak az optikai tengellyel majdnem párhuzamosan haladjanak, ez pedig akkor teljesül, ha a lencse fókusztávolsága a gömb sugaránál is és a lencse átmérőjénél is sokkal nagyobb. A megoldásban szereplő ábra méretaránya tehát erősen torzított, vagy ha ténylegesen ilyenek az arányok, akkor a kiszámított képfelületnek csak egy kis darabját szabad elfogadnunk.

Hasonló okok miatt nincs sok értelme a lencsébe nyúló, vagy azt magába foglaló gömb ($r \geq f$) esetét tanulmányoznunk. Matematikailag érdekes ugyan a paraméterek teljes tartományának vizsgálata, és az $r > f$ eset a „dróthálóba bújtatott" lencsével még fizikailag is megvalósítható, a leképezés torzításai miatt azonban ennek elemzése a ténylegesen tapasztalható képalkotás szempontjából érdektelen.

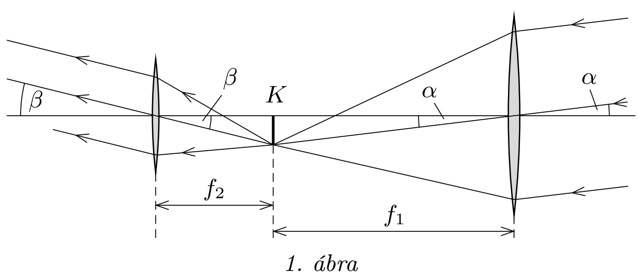
M. 7. Mivel a leképezési törvényben a t tárgytávolság és a k képtávolság egymással felcserélhető, arányuk pedig a nagyítást mutatja meg, ezért $(k/t)^2 = 9$ (vagy 1/9), tehát $k/t = 3$ (vagy 1/3). Így a tárgytávolság 30 cm (vagy 90 cm), a képtávolság pedig 90 cm (vagy 30 cm). A fókusztávolságot a leképezési törvényből kaphatjuk:

$$f = \frac{kt}{k+t} = 22{,}5 \text{ cm.}$$

Ha a lencsére ugyanannyi fény jutna mindkét esetben, akkor a 9-szer kisebb kép 81-szer fényesebb lenne, mert az ernyőn a kis kép 81-szer kisebb területet foglal el. A háromszor messzebb lévő lencsére azonban (a *kis* izzószál miatt) csak a fény kilenced része jut ahhoz képest, ami a közeli lencsét éri, tehát a kis kép csak 9-szer fényesebb a nagynál.

Általánosságban is megmutatható, hogy ilyen esetben a kis kép annyiszor fényesebb, ahányszor nagyobb nála a másik kép.

M. 8. Tekintsük például a két gyűjtőlencséből összeállított Kepler-távcsövet! (Más távcsövekre hasonló elemzés készíthető.) A távoli tárgyakról az f_1 fókusztávolságú objektív (tárgylencse) majdnem pontosan a fókuszsíkjában alkot képet. Ha ezt a képet egy f_2 fókusztávolságú szemlencsén (okuláron) keresztül nézzük, akkor ennek a fókuszsíkja is majdnem pontosan a kép helyére esik, hiszen a szemünket „végtelenre állítjuk", nagyon távol keressük a képet.



1. ábra

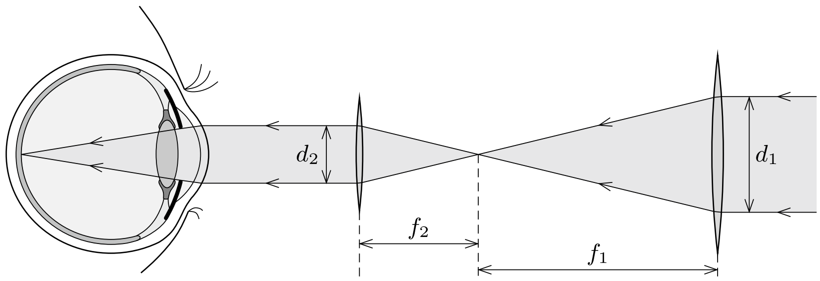
Az erősen eltorzított méretarányú *1. ábráról* leolvashatjuk, hogy a távcső szögnagyítása (a Hold két „széléről” érkező fénysugarak látószög-növekedési faktora):

$$N_{\mathrm{sz}} = \frac{\beta}{\alpha} \approx \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} \approx \frac{(K/f_2)}{(K/f_1)} = \frac{f_1}{f_2}.$$

Vizsgáljuk meg, hányszor több energia érkezik a szemünkbe a távcsövön keresztül, mintha szabad szemmel néznénk a Holdat! Feltételezzük, hogy a pupillánk d_2 átmérője mindkét esetben ugyanakkora, és kisebb, mint a távcső okulárjának átmérője. A *2. ábrán* (amely csak a majdnem párhuzamosan érkező fénysugarakat mutatja, a képalkotást nem ábrázolja) látható, hogy időegységenként a szemünkbe jutó fény mennyisége a távcső esetén

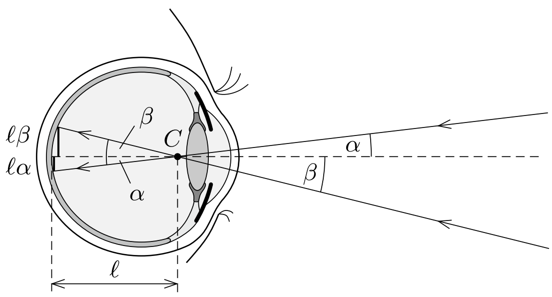
$$\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 = N_{\mathrm{sz}}^2$$

faktorral nagyobb, mint az távcső nélkül lenne.



2. ábra

Végül hasonlítsuk össze a retinán keletkező kép méretét a kétféle megfigyelésnél. A retinán keletkező kép lineáris mérete jó közelítéssel egyenesen arányos a tárgy látószögével, a kétféle kép területének aránya tehát a szögnagyítás négyzetével, N_{sz}^2-tel egyenlő.



3. ábra

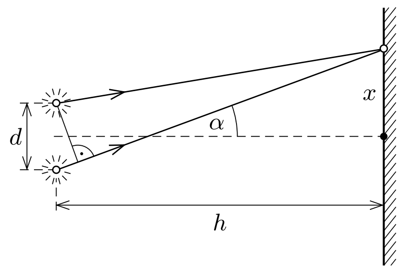
Megjegyzés. A szem több törőfelületből álló, bonyolult optikai rendszer, amelynek működése nem írható le egyetlen vékony lencse segítségével. A szembe érkező fénysugarak két lényeges helyen törnek meg: először a szaruhártyán (cornea), másodszor pedig a szemlencsén. A szemet kitöltő közegek (csarnokvíz és üvegtest) törésmutatója a levegőétől jelentősen különböző, 1,3 körüli érték, ezért a fénytörés jelentős része már a szaruhártyán bekövetkezik. A belül változó törésmutatójú, vastag szemlencse a rajta áthaladó fénysugarak irányát az éles kép elérése érdekében csak „korrigálja".

Mindezek ellenére a szem képalkotása jól közelíthető egyetlen, gömb alakú „helyettesítő" törőfelülettel, melynek C középpontján áthaladó fénysugarak irányváltoztatás nélkül jutnak a retinára (*3. ábra*). Innen látható, hogy a szabad szemmel, illetve távcsővel történő megfigyeléseknél keletkező képek mérete egyenesen arányos az α és β látószögekkel.

Ezek szerint távcsövön keresztül a Holdat *éppen olyan fényesnek* látjuk, mint szabad szemmel! Megfontolásaink érvénytelenné válnak, amikor egy olyan kicsiny látószögű égitestet figyelünk meg, amelynek képe nem kiterjedt terület, hanem csak egyetlen fotoreceptorra esik fény a retinán (illetve egy digitális kamerában egyetlen pixelt világít meg). Ilyen esetekben a távcső megnöveli a beérkező fény teljesítményét, amit nem ront le a kép méretének növekedése, tehát a csillagot *fényesebbnek* észleljük.

Megjegyzés. Amennyiben a távcső okulárja kisebb átmérőjű lenne, mint a kitágult pupillánk (a gyakorlatban nem ez a helyzet!), akkor a távcsövön keresztül a Hold halványabbnak látszana, mint szabad szemmel. Ugyanezt a hatást eredményezi a pupilla összeszűkülése, ami reflexszerűen történik, ha erős fénybe nézünk.

M. 9. A lencse két fele a pontforrásról egy-egy pontszerű, valódi képet alkot, melyek koherens fényforrásként viselkedve interferenciát hoznak létre az ernyőn. Ezért érdemes előbb megizsgálni, hogy milyen interferenciaképet hoz létre két, egymástól d távolságra lévő, koherens, λ hullámhosszúságú, monokromatikus fényt kibocsátó pontforrás a tőlük $h \gg d$ távolságra elhelyezett ernyőn.



1. ábra

A tér azon pontjaiban tapasztalhatunk maximális erősítést, mely pontoknak a két fényforrástól mért távolságának *különbsége* éppen a λ hullámhossz egész számú többszöröse. Ez azt jelenti, hogy az erősítési helyek olyan kétköpenyű forgási hiperboloidokon helyezkednek el, melyek szimmetriatengelye illeszkedik a két fényforrásra. Az ernyőn ezeknek a hiperboloidoknak a tengelyükkel párhuzamos síkmetszeteit figyelhetjük meg, ezért a kialakuló interferenciacsíkok (nagyon enyhén görbülő) hiperbola alakúak lesznek. A csíkok sűrűsége a hiperbolasereg szimmetriatengelyén a legnagyobb, ezért a továbbiakban csak a fényforrásokra illeszkedő, az ernyőre merőleges síkban elhelyezkedő fénysugarakkal foglalkozunk (*1. ábra*).

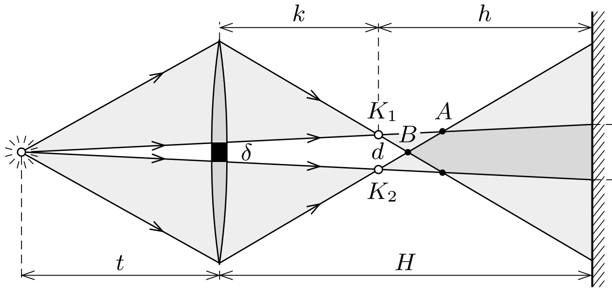
Az 1. ábrán látható, α szögben induló fénysugarakra a maximális erősítés feltétele:

$$d\sin\alpha = n\lambda,$$

ahol n egész szám. Kis α szögekre használhatjuk a $\sin\alpha \approx x/h$ közelítést, ezzel

$$\frac{xd}{h} = n\lambda, \qquad \text{azaz} \qquad x = n\frac{\lambda h}{d}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a szomszédos interferenciacsíkok távolsága $\Delta = \lambda h/d$.



2. ábra

Most térjünk rá arra a kérdésre, hogy milyen képeket alkot a pontszerű fényforrásról a félbevágott gyűjtőlencse! A leképezési törvény szerint

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f},$$

amiből a k képtávolságra

$$k = \frac{tf}{t-f}$$

adódik. A (nem méretarányos) *2. ábráról* a megfelelő háromszögek hasonlóságát felhasználva leolvasható, hogy ha a két féllencse közötti rés vastagsága δ, akkor a keletkező K_1 és K_2 képek d távolságára fennáll a

$$\frac{d}{\delta} = \frac{t+k}{t}$$

összefüggés, amelyből

$$d = \frac{t+k}{t}\delta = \frac{t\delta}{t-f}.$$

A lencse által előállított K_1 és K_2 képek interferenciacsíkokat hoznak létre az ernyőn, melyek távolsága (ahogy előbb láttuk) $\Delta = \lambda h/d$, ahol h a képek és az ernyő távolsága:

$$h = H - k = \frac{H(t-f) - tf}{t-f}.$$

A szomszédos interferenciacsíkok távolsága tehát

$$\Delta = \frac{\lambda\,(H(t-f)-tf)}{t\delta}.$$

Interferenciát csak az ernyő azon részén figyelhetünk meg, ahol a két képből érkező fénynyalábok átfednek. Ismét a megfelelő háromszögek közötti hasonlóságot használva kapjuk az átfedési tartomány D szélességét:

$$D = \delta\frac{H+t}{t}.$$

Az ernyőn látható interferenciacsíkok száma:

$$N \approx \frac{D}{\Delta} = \frac{\delta^2}{\lambda}\frac{H+t}{H(t-f)-tf}.$$

A rendelkezésre álló adatok behelyettesítése után $N \approx 46{,}7$ eredményt kapunk, azaz 47 interferenciacsíkot láthatunk az ernyőn.

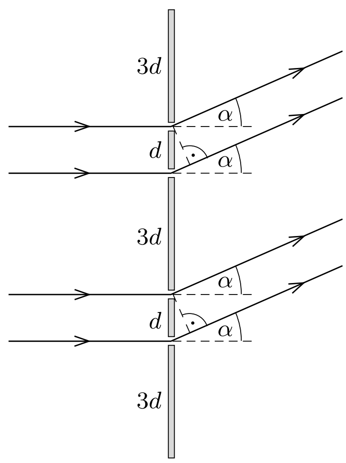
Megjegyzés. A feladatban megadott számadatok esetén az ernyő távolabb helyezkedik el a lencsétől, mint a *2. ábrán* látható A pont. Ellenkező esetben az átfedési tartomány D méretét máshogy kellene számolni, ehhez azonban szükségünk lenne a lencse átmérőjére. Ha az ernyőt a B pontnál közelebb helyezzük a lencséhez, nem jön létre interferencia.

M. 10. Először képzeljük el, milyen lenne a diffrakciós kép, ha minden második rést (a másodikat, negyediket stb.) kitakarnánk! Ekkor a $4d$ távolságra elhelyezkedő rések egy szokásos optikai rácsot alkotnának, az n-edik elhajlási maximum ernyőn mérhető x_n helyzetét pedig a

$$4d\sin\alpha_n = n\lambda, \qquad \sin\alpha_n \approx \operatorname{tg}\alpha_n = x_n/L$$

összefüggésekből számíthatjuk ki:

$$x_n = n\frac{\lambda L}{4d}. \tag{1}$$



1. ábra

(Felhasználtuk, hogy $d \gg \lambda$, vagyis az elhajlási szögek kicsik.) Ugyanilyen lenne az elhajlási kép, ha a másik réssort (azaz az első, harmadik stb. rést) takarnánk ki. Ha mindkét réssoron átengedjük a fényt, akkor az (1) egyenlet által meghatározott irányok közül bizonyos irányokban (azaz bizonyos n értékeknél) részleges vagy teljes kioltást tapasztalhatunk. Azt kell tehát megvizsgálnunk, hogyan adódik össze a két, d távolsággal eltolt, $4d$ periódusú réssoron áthaladó fény amplitúdója.

A következő négy eset lehetséges:

1. Ha $n = 4k + 1$ (ahol k egész), akkor a két réssoron áthaladó fény közötti útkülönbség $\lambda/4$, ami $\pi/2$ fáziskülönbségnek felel meg. Két, $\pi/2$ fáziskülönbséggel találkozó, azonos amplitúdójú (azaz térerősségvektorú) hullám összegének amplitúdója a tér egy rögzített pontjában:

   $$E_{\text{eredő}}(t) = E_0 \sin \omega t + E_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = E_0 \sin \omega t + E_0 \cos \omega t,$$

   amely $\sqrt{2}$ kiemelése után egyetlen szinuszfüggvénnyé alakítható:

   $$E_{\text{eredő}}(t) = \sqrt{2} E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \omega t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \omega t\right) = \sqrt{2} E_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

   Az amplitúdó tehát az egy réssoron átjutó fény amplitúdójának $\sqrt{2}$-szerese. Mivel a fény *intenzitása* az amplitúdó *négyzetével* arányos, így az eredő intenzitás az egy réssor esetében mérhető intenzitásnak a kétszerese lesz.

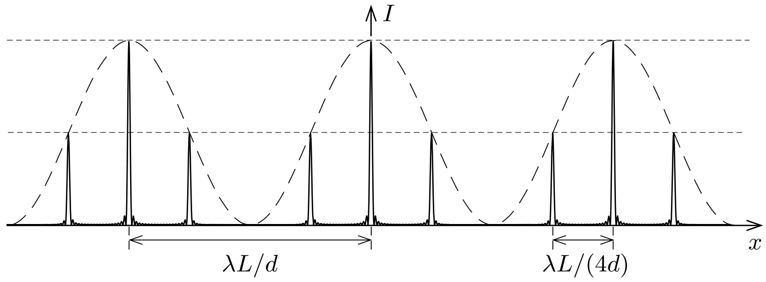
   Ugyanehhez az eredményhez úgy is eljuthatunk, ha az amplitúdókat forgóvektorként (más néven fázisvektor) adjuk össze. Ekkor két egyforma nagyságú, egymással 90°-os szöget bezáró „amplitúdóvektort” kell összeadnunk, amelyek eredője az eredeti vektoroknál $\sqrt{2}$-ször hosszabb, és azokkal 45°-os szöget zár be.

2. Ha $n = 4k + 2$, akkor a két réssor közötti fáziskülönbség π, tehát ilyen irányokban tökéletes kioltást tapasztalunk.

3. Ha $n = 4k + 3$, a fáziskülönbség $3\pi/2$, így az amplitúdó (az első esethez hasonlóan) az egyetlen réssoron áthaladó fény amplitúdójának $\sqrt{2}$-szerese, az intenzitás pedig a kétszerese lesz.

4. Ha $n = 4k$, akkor minden sugár erősíti egymást, az amplitúdó tehát egyetlen réssoron áthaladó fény amplitúdójának kétszerese, az intenzitás pedig négyszerese lesz.

Összefoglalva: a *2. ábrán* folytonos vonallal ábrázolt intenzitáseloszlás alakul ki, a nagy intenzitású csúcsok közötti távolság $\lambda L/d$.



2. ábra

Megjegyzések. 1. A „furcsa” optikai rácsot felfoghatjuk olyan $4d$ rácsállandójú rácsként is, melyet nem egyszerű rések, hanem d réstávolságú (*Young*-féle) *kettősrések* alkotnak. Egy $4d$ rácsállandójú, (igen keskeny résekből álló) hagyományos optikai rács intenzitáseloszlása azonos magasságú, egymástól $\lambda L/(4d)$ távolságra elhelyezkedő, éles csúcsokból áll. Belátható, hogy egyetlen, d réstávolságú kettősrés elhajlási képe a 2. ábrán szaggatott vonallal jelölt koszinuszfüggvény. A furcsa rács esetén mérhető intenzitáseloszlást úgy kaphatjuk meg, hogy az említett két intenzitáseloszlást összeszorozzuk.

2. Szembetűnő, hogy az optikai rácson a 4-szer ritkább periodikus mintázat 4-szer sűrűbb mintát eredményez az elhajlási képen. Ez a fajta fordított arányosság általánosan igaz a diffrakciós jelenségeknél: a legnagyobb mintázat alakítja ki a diffrakciós kép legfinomabb részleteit, és fordítva, a rács legapróbb mintázata adja az elhajlási kép nagyléptékű szerkezetét. A feladatban a d és $4d$ távolságokon kívül van egy harmadik méretskála is, amit eddig elhanyagoltunk: a rések szélessége. Ha ezt is figyelembe vennénk, akkor ez az elhajlási képben egy hosszú periódusú modulációt eredményezne. (A 2. ábrán látható intenzitáseloszlást meg kellene szorozni az egy rés diffrakciós képének intenzitáseloszlásával.)

3. Az intenzitáscsúcsok nem végtelen „élesek”, hanem bizonyos szélességük van, melynek oka a megvilágító lézernyaláb vastagságával áll kapcsolatban. Ha például a megvilágító lézernyaláb vékony (az ernyőtávolság pedig nagy), akkor csak kevés résen halad át fény, ami az intenzitáscsúcsok kiszélesedéséhez vezet. Ezt az állítást legegyszerűbben egy hagyományos („egyenközű”) optikai rács példáján keresztül szemléltethetjük. Ha egy ilyen rács N darab rését világítjuk meg, akkor a maximális erősítési irányokban mind az N résből jövő amplitúdó összeadódik, az eredő amplitúdó tehát N-nel, az intenzitáscsúcsok *magassága* pedig N^2-tel arányos. A rácson átjutó fény által szállított teljesítmény arányos N-nel, és ugyanígy kell viselkednie az intenzitáscsúcsok alatti területnek is (hiszen az energia megmarad). Ez pedig csak úgy lehetséges, ha az intenzitáscsúcsok *szélessége* $1/N$-nel arányos.

M. 11. A rácsra merőlegesen esik monokromatikus fény, emiatt a résekből kilépő fényhullámok fázisa kilépéskor egyenlő, amplitúdójuk pedig (keskeny rések esetén) arányos a rések szélességével. (Ez utóbbi állítás következik a Huygens–Fresnel-elvből, hiszen egy n-szer szélesebb rés felfogható n darab egymás melletti résként, és az ezeken átjutó elemi fényhullámok mindegyike ugyanakkora, azonos fázisú járulékot eredményez az eredő hullámban.)

Az ernyőn látható fény intenzitása az eredő hullámamplitúdó négyzetével arányos. $N \gg 1$ rés esetén nagyon sok hullám interferenciáját kell tanulmányoznunk; az interferencia eredménye a találkozáskor fellépő fáziskülönbségektől, az pedig az útkülönbségektől függ. Ha a szomszédos résekből jövő hullámok között valamekkora fáziskülönbség van, a sok hullám járuléka általában kioltja egymást. Kivételt csak az az eset képez, amikor minden második résből azonos fázisban érik el az ernyőt a hullámok. Ekkor mind a páros, mind pedig a páratlan sorszámú rések hullámai erősítik egymást, eredő amplitúdójuk

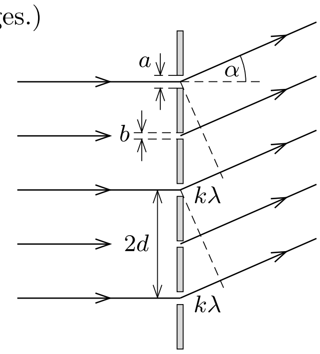
$$E_{\text{páros}} = K \cdot \frac{N}{2} b, \qquad \text{illetve} \qquad E_{\text{páratlan}} = K \cdot \frac{N}{2} a.$$

(A K állandó nagysága függ a rácsra eső fény erősségétől és az ernyő távolságától, pontos értéke azonban a továbbiakban nem lényeges.)

Melyek azok az irányok, amelyeknél a fenti feltétel teljesül? Az *1. ábráról* leolvasható, hogy amennyiben az eredeti iránnyal α szöget bezáró irányban tovaterjedő hullámokra fennáll, hogy

$$2d \sin\alpha = k\lambda, \qquad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

a páros és a páratlan hullámok külön-külön azonos fázisban adódnak össze (tehát erősítik egymást).



1. ábra

Most már csak két hullámot kell összegeznünk, a páros sorszámú rések $E_{\text{páros}}$ amplitúdójú eredőjét a páratlan sorszámú rések $E_{\text{páratlan}}$ amplitúdójú eredőjével. Mekkora a fáziskülönbség ezen hullámok között? Mivel a szomszédos rések hullámainak útkülönbsége $k\lambda/2$, páros k-ra a két hullám *azonos*, páratlan k-ra pedig *ellentétes* előjellel összegződik. Ezek szerint az ernyőt α_k szögben érő fény (vagyis a k-adik elhajlási maximum) intenzitása

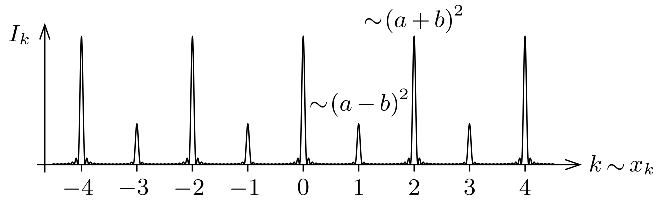
$$I_k \sim \begin{cases} (a+b)^2, & \text{ha } k \text{ páros} \\ (a-b)^2, & \text{ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

A k-adik intenzitáscsúcs a rácstól L távolságban lévő ernyőn az eltérülésmentes fény helyétől

$$x_k = L \operatorname{tg}\alpha_k \approx L \sin\alpha_k = k\frac{L\lambda}{2d}$$

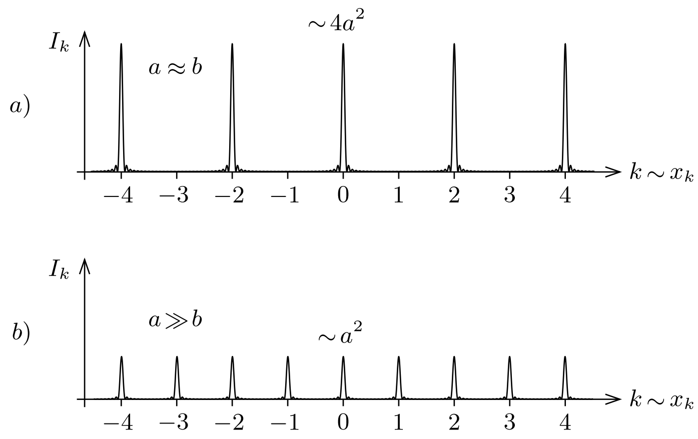
távolságra keletkezik. (Felhasználtuk, hogy $d \gg \lambda$ miatt az elhajlási szögek kicsik.)

Az ernyőn tehát egymástól egyenlő távolságra aránylag éles, apró fénypontokat (foltokat) látunk, de ezek intenzitása *nem egyforma*: felváltva követik egymást az erősebb és a halványabb fénypontok (*2. ábra*).



2. ábra

Ha $a \approx b$, akkor a *3. ábra a)* részén látható intenzitáseloszlást, ha pedig $a \gg b$, akkor a *b)* részen bemutatott intenzitáseloszlást figyelhetjük meg az ernyőn.



3. ábra

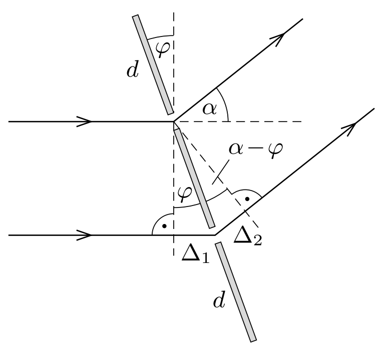
M. 12. Nézzük a rácsot (és a lézersugarat) függőleges irányból (*1. ábra*). Az útkülönbség két tagból, a rács előtti és a rács utáni részek járulékából tevődik össze:

$$\Delta_1 + \Delta_2 = d\,[\sin\varphi + \sin(\alpha_k - \varphi)] = k \cdot \lambda,$$

ahonnan az interferenciás erősítés feltétele:

$$\sin\varphi\,(1 - \cos\alpha_k) + \cos\varphi \sin\alpha_k = k\frac{\lambda}{d}, \tag{1}$$

itt $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$



1. ábra

Megjegyzések. 1. Az $\alpha = 0$ szögre tetszőleges φ esetén teljesül a hullámerősítés (1) feltétele $k = 0$ mellett. Ez a nulladrendű maximum, a változatlan irányban továbbhaladó fény esete.

2. Merőlegesen tartott rács ($\varphi = 0$) esetén (1)-ből természetesen visszakapjuk a szokásos

$$\sin\alpha_k = k\frac{\lambda}{d} \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots) \tag{2}$$

egyenletet.

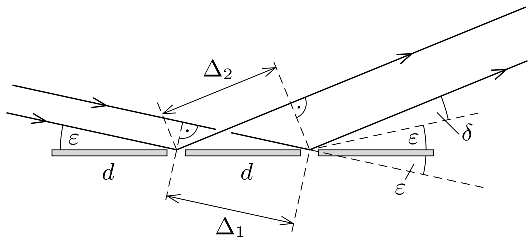
3. $\varphi \neq 0$ esetén az eltérítés feltétele nem szimmetrikus a $k \leftrightarrow (-k)$ cserére, ezért a nulladrendű maximumhoz képest jobbra és balra különböző szögekben terül el a fény.

Az aszimmetrikus eltérítési szögek is jól mutatják, hogy *téves* az a naiv elképzelés, miszerint a ferdén tartott rács úgy téríti el a fényt, ahogy azt egy sűrűbb, $d' = d\cos\alpha$ rácsállandójú rács tenné.

4. Az (1) egyenlet $\alpha < \varphi - 90^\circ < 0$ esetén is érvényes. Ilyenkor a fény a rácsnak ugyanazon térfelén halad tovább, mint ahol a lézer található, a rács tehát „visszatükrözi”

a fényt. Ebben a tartományban is találunk $k = 0$-nak megfelelő, a hullámhossztól független eltérítési irányt: $\alpha = 2\varphi - 180^\circ$, ami a geometriai optikából is ismert síktükrön történő visszaverődésnek felel meg.

A merőlegesen vagy ahhoz közeli szögekben beeső lézerfény esetén csak akkor kaphatunk szabad szemmel is jól látható interferenciát, ha a d rácsállandó nagyságrendileg ugyanolyan kicsi, mint a látható fény (ezred milliméternél is kisebb) hullámhossza. Ha d milliméteres nagyságrendű, vagy még ennél is nagyobb, akkor a (2) egyenlet szerinti α_k szögek annyira kicsik lennének, hogy az ernyőn a „foltocskák” egymásba lógnának, összemosódnának. Emiatt hiába is próbálnánk pl. egy műanyagvonalzó 1 mm-es beosztású skálájára ejtett lézerfénnyel a fény hullámtermészetét „megfigyelni”, nem járnánk sikerrel.



2. ábra

Más a helyzet akkor, ha a fény nagyon lapos szögben esik a rácsra. Legyen $\varphi = 90^\circ - \varepsilon$, ahol ε egy kicsiny szög (pl. $1^\circ \approx 0{,}02$ radián). Írjuk fel az eltérülés szögét $\alpha = -(2\varepsilon + \delta)$ alakban, ahol δ a síktükrön való visszaverődés szögétől való – feltehetően kicsi – eltérés (*2. ábra*). Ezekkel a változókkal a hullámerősítés feltétele (mint az akár az (1) egyenletből, akár a 2. ábráról leolvasható):

$$\cos\varepsilon - \cos(\varepsilon + \delta) = -k\frac{\lambda}{d}.$$

Innen (ε és δ kicsiny voltát felhasználva)

$$\frac{1}{2}\delta^2 + \varepsilon\delta + k\frac{\lambda}{d} = 0,$$

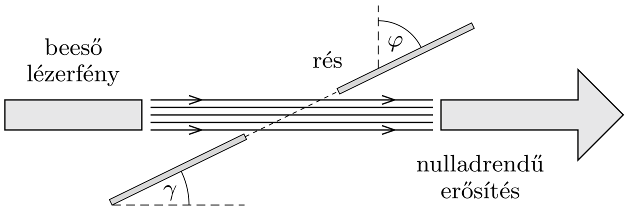
vagyis

$$\delta_k = \sqrt{\varepsilon^2 - 2k\lambda/d} - \varepsilon$$

adódik. Ha például ε néhány fokos szög, és $d = 1$ mm, akkor a δ_k szögek is néhány fok nagyságrendűek. Emiatt akár egy közönséges iskolai műanyagvonalzó (a fény hullámhosszánál kb. 10^4-szer durvább) milliméteres beosztása is képes reflexiós elhajlási képet előidézni, ha a vonalzóra kicsiny szögben ejtjük a lézerfényt. Az elhajlási kép kísérleti vizsgálatával, tehát vonalzóval is „meg tudjuk mérni” egy ismeretlen lézer hullámhosszát.

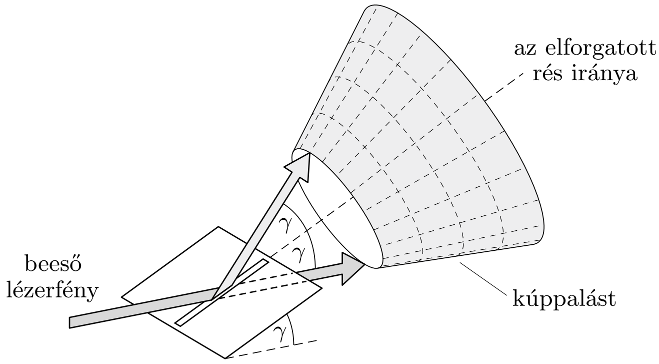
M. 13. Vizsgáljuk meg először, milyen lenne az elhajlási kép, ha az optikai rács helyére egyetlen, vékony rést helyeznénk! Ha a résre merőlegesen esik a fény ($\varphi = 0$), akkor a távoli ernyőn egy vízszintes, folytonosan változó intenzitású egyenes fénycsíkot látunk, amely a rés kioltási irányainak megfelelő helyeken megszakad. Ha a rés elegendően vékony, akkor a kioltási helyek távol helyezkednek el egymástól, így az ernyőn kialakuló fénycsík folytonos lesz.

Ha a rést előredöntjük a megadott vízszintes tengely körül, akkor a lézerből jövő fénynyaláb eredeti irányában továbbra is erősítést tapasztalunk. Ez azért van így, mert igaz ugyan, hogy a rés különböző pontjaiba (a lézertől mért távolságok különbözősége miatt) más-más fázissal érkezik a síkhullám, de a résen áthaladva és az eredeti irányban terjedve éppen akkora útkülönbséggel érkeznek az elemi hullámok az ernyőhöz, hogy a teljes fáziskülönbség közöttük nulla (lásd az oldalnézeti *1. ábrát*).



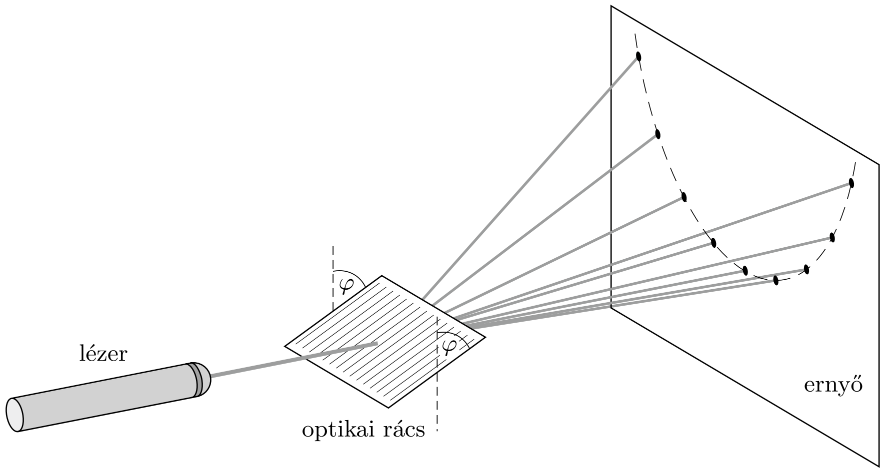
1. ábra

Ha az elemi hullámok a φ szögben megdöntött réssel γ szöget bezáró irányban ($\gamma = 90° - \varphi$) erősítik egymást, akkor ez nemcsak az 1. ábra síkjában következik be, hanem a háromdimenziós tér minden olyan irányában, amely a rés irányával ugyancsak γ szöget zár be! (Az eredeti, függőlegesen álló rés esetén $\gamma = 90°$, ezért kaptunk ott az ernyőn vízszintes vonalat.) A résen elhajló fény erősítési irányai tehát a *2. ábrán* látható, egyetlen vízszintes alkotóval rendelkező kúppalástra illeszkednek. A kúp csúcsa a rés közepe, tengelyének iránya a rés iránya, fél nyílásszöge a fenti γ, amely az elforgatás szögének pótszöge.



2. ábra

Az ernyőn keletkező kép az ernyő síkjának és a 2. ábrán látható kúppalástnak a metszésvonalaként kialakuló *kúpszelet*, amely ellipszis, parabola vagy hiperbola lehet. Parabolát éppen akkor kapunk, ha az ernyő síkja a kúp valamelyik alkotójával párhuzamos. Esetünkben ez akkor következik be, ha a kúpnak van függőleges alkotója. Vízszintes alkotója az eredeti fénysugár, függőleges tehát csak akkor lehet a másik alkotó, ha a kúp nyílásszöge 90°. Ekkor $\gamma = 45°$, $\varphi = 90° - \gamma = 45°$, ez az elforgatási szög szerepelt példaként a feladatban.



3. ábra

Térjünk most vissza az eredeti elrendezéshez, az optikai rácshoz. A rács minden egyes résére igaz, hogy annak pontjaiból kiinduló hullámok külön-külön azonos fázisban, tehát egymást erősítve haladnak tovább, és ezért az ernyőn egy kúpszelet mentén fényes vonalat hoznának létre, ha a többi rés nem lenne jelen. A rács különböző rései azonban általában különböző fázisú hullámokat juttatnak az ernyőre, és csak a kúpszelet bizonyos pontjaiban fog teljesülni, hogy ezen hullámok fáziskülönbsége 2π egész számú többszöröse. Ezekben a pontokban az ernyőn fényes foltokat, a többi helyeken viszont gyakorlatilag nulla megvilágítást észlelünk, ahogy azt a *3. ábra* mutatja.

M. 14. A lapon lévő lyukak helyzete az $\boldsymbol{r} = (x, y)$ síkbeli vektorral adható meg (*1. ábra*), ahol x és y is a d rácsállandó egész számú többszöröse. Egy ilyen lyuk és az ernyő $\boldsymbol{R} = (X, Y)$ helyvektorú pontjának távolsága:

$$s(x,y) = \sqrt{L^2 + (X-x)^2 + (Y-y)^2} \approx \sqrt{L^2 + X^2 + Y^2 - 2(xX + yY)},$$

hiszen x és y általában sokkal kisebbek, mint X és Y. Ez a távolság közelítőleg így is írható:

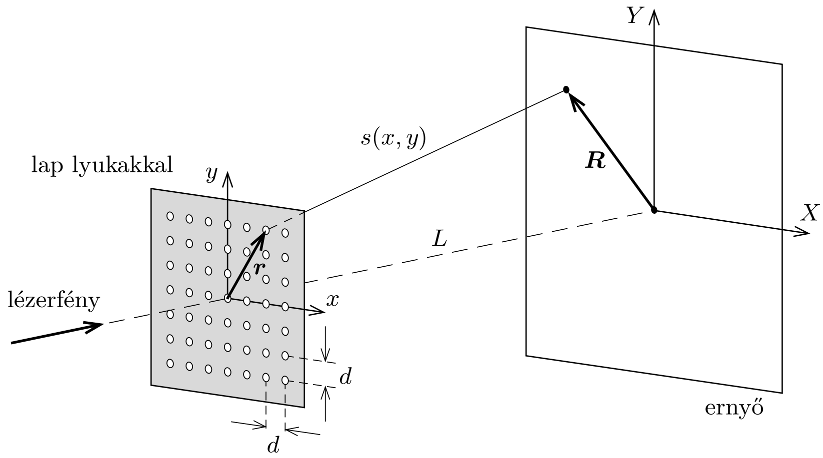
$$s(x,y) = \sqrt{L^2 + X^2 + Y^2}\sqrt{1 - 2\frac{xX + yY}{L^2 + X^2 + Y^2}} \approx$$

$$\approx \sqrt{L^2 + X^2 + Y^2} - \frac{xX + yY}{\sqrt{L^2 + X^2 + Y^2}}.$$

Az x és y koordinátájú lyukakból érkező fényhullám és egy (önkényesen) kiválasztott, mondjuk az $x = y = 0$-nak megfelelő hullám útkülönbsége

(1) $$\Delta s = -\frac{xX + yY}{\sqrt{L^2 + X^2 + Y^2}} \approx -\frac{xX + yY}{L}.$$

(Felhasználtuk, hogy L sokkal nagyobb, mint az ernyő mérete.)



1. ábra

Ha az (1) útkülönbség a hullámhossz egész számú többszöröse, akkor valamennyi hullám ugyanolyan fázisban érkezik az ernyő megfelelő pontjához, tehát ott erősítést tapasztalunk. Ennek feltétele:

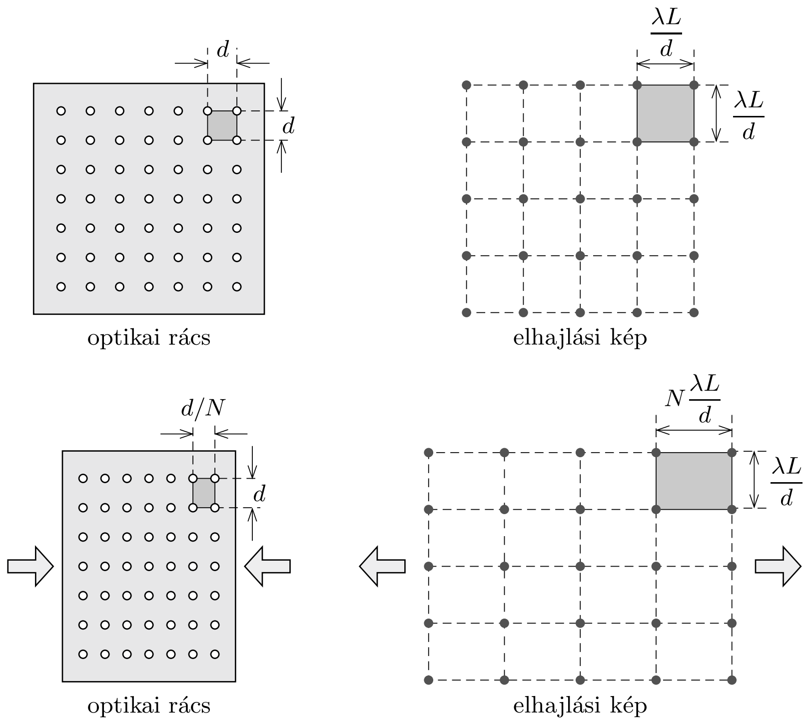
(2) $$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{R} = xX + yY = \text{egész szám} \cdot (\lambda L).$$

Figyelembe véve x és y lehetséges értékeit, a (2) feltétel

$$X = n \cdot \frac{\lambda L}{d} \qquad \text{és} \qquad Y = m \cdot \frac{\lambda L}{d}$$

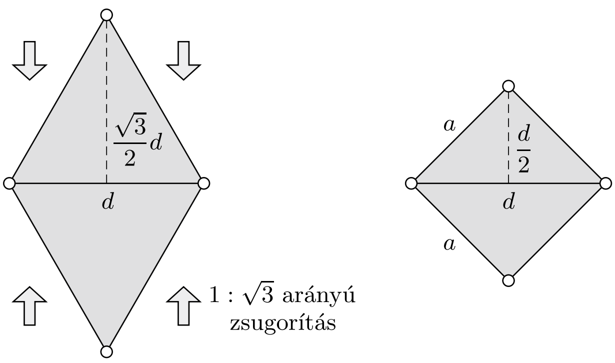
esetén teljesíthető, ahol n és m tetszőleges egész számok. Eszerint az elhajlási képen is négyzetrácsot látunk, melynek rácsállandója $\lambda L/d$.

Ha az optikai rácsot valamelyik irányban, mondjuk az x tengely mentén N-edrészére *zsugorítjuk*, a (2) feltétel akkor marad érvényben, ha az elhajlási maximumhelyek X koordinátája N-szeresére *növekszik*. A téglalaprács elrendezésű lyukrendszeren áthaladó fény elhajlási képe az ernyőn tehát ugyancsak téglalaprácsot alkot, annak méretaránya ugyanakkora, mint a lyuksor téglalapjainak méretaránya, de a szereposztás fordított: minél kisebb valamelyik irányban a lyukak távolsága a lapon, annál messzebb helyezkednek el az intenzitáscsúcsok az ernyőn ugyanebben az irányban (*2. ábra*).



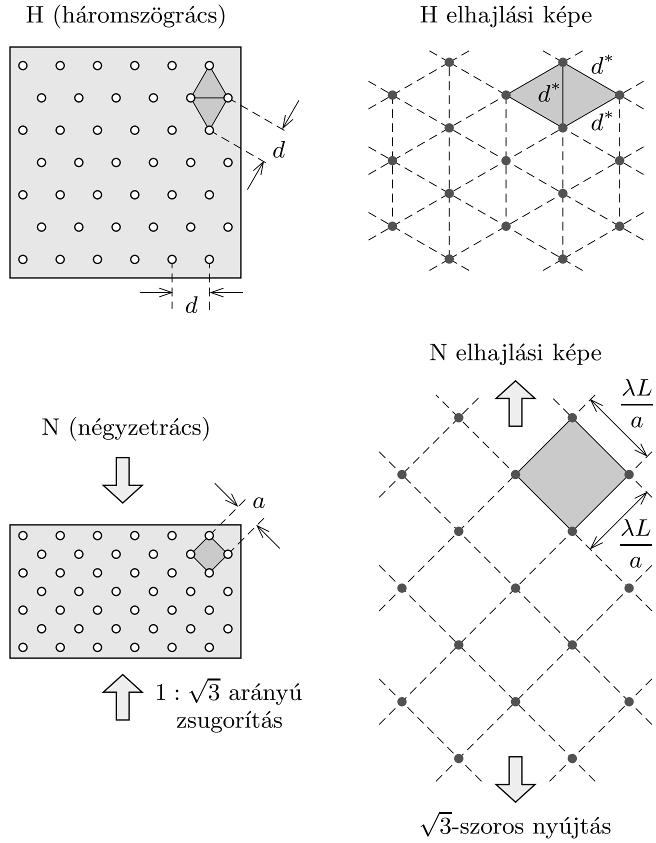
2. ábra

M. 15. Tekintsük a háromszögrács (H) két szomszédos „elemi celláját”, melyek egyik (vízszintes) oldalélük mentén illeszkednek egymáshoz. Ha ezt az alakzatot a függőleges irányban $1 : \sqrt{3}$ arányban összezsugorítjuk (*1. ábra*), akkor olyan négyzetet kapunk, amelynek oldaléle $a = d/\sqrt{2}$.



1. ábra

Az a rácsállandójú négyzetrács (N) elhajlási képe ugyanilyen állású, $\lambda L/a = \sqrt{2}\lambda L/d$ rácsállandójú négyzetrács lesz (lásd az *előző feladat* megoldását). Az előző feladat megoldásából az is következik, hogy N elhajlási képe a H rács elhajlási képének $1:\sqrt{3}$ arányú, függőleges irányú nyújtásával adódik, a keresett mintázat tehát N elhajlási képének ugyanilyen arányú zsugorításával kapható meg (*2. ábra*).



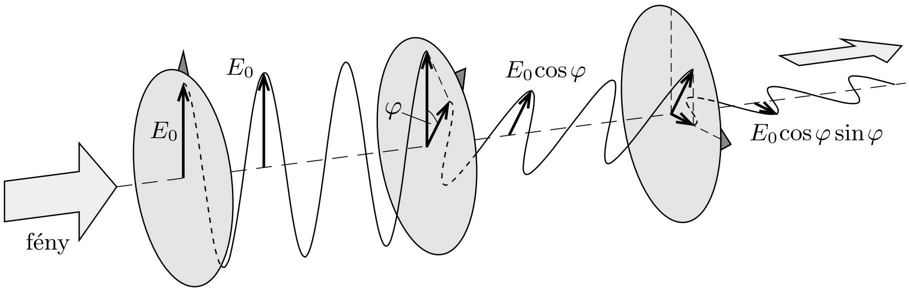
2. ábra

H diffrakciós képe tehát egy olyan rács, amelynek elemi cellái ugyancsak szabályos háromszögek és a háromszögek oldaléle

$$d^* = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\lambda L}{d}.$$

Érdekes, hogy amíg a lyukas lapon lévő szabályos háromszögek egyik oldala *vízszintes*, a másik kettő pedig „ferde”, az ernyőn megfigyelhető H rács háromszögeinek állása más: nincs vízszintes oldaluk, viszont az egyik oldalélük *függőleges*.

M. 16. *a*) Az első polárszűrőn átmenő fény intenzitása akkor a lehető legnagyobb, ha a ráeső fény már eleve polarizált, polarizációjának síkja pedig párhuzamos a szűrő polarizációs irányával. Ekkor az első polárszűrőn (az elnyelődést elhanyagolva) a teljes beeső intenzitás áthalad.



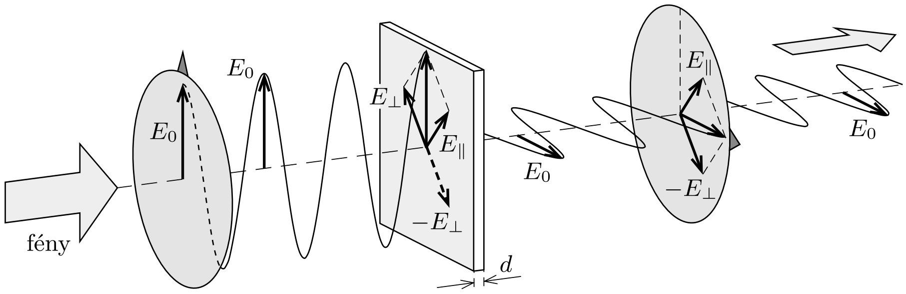
1. ábra

Jelöljük a beeső fény maximális elektromos térerősségét (amplitúdóját) E_0-lal (*1. ábra*). Az első szűrőhöz képest φ szöggel elforgatott második polárszűrő felé haladó fény felbontható a szűrő „átengedő” irányába eső és arra merőleges polarizációjú összetevőkre. A második szűrő e két komponens közül csak az $E_0 \cos\varphi$ térerősségű összetevőt engedi át. Hasonlóan, a harmadik szűrőn áthaladó fény amplitúdója:

$$E = E_0 \cos\varphi \cos(90^\circ - \varphi) = E_0 \cos\varphi \sin\varphi = \frac{1}{2} E_0 \sin 2\varphi.$$

Ennek abszolút értéke akkor a legnagyobb, ha $\sin 2\varphi = \pm 1$, azaz $\varphi = \pm 45^\circ$. Ekkor az átjutott fény amplitúdója a beeső amplitúdónak éppen fele, az amplitúdó négyzetével arányos fényintenzitás tehát *negyedrészére* csökken.

b) Ebben az esetben is akkor jut át a legtöbb fény az első polárszűrőn, ha a ráeső fény polarizációs síkja párhuzamos a szűrő „átengedő” irányával.



2. ábra

A kettőstörő lemez felé haladó fényt felbonthatjuk gondolatban az $\boldsymbol{e}$ iránnyal párhuzamos ($E_\parallel$), és arra merőleges ($E_\perp$) polarizációjú komponensekre. A lemezbe belépő két komponens (a különböző törésmutatók miatt) a lemez vastagságától függő fáziskülönbséggel lép ki a lemezből. Itt a kétféle polarizációjú összetevő szuperpozíciója adja meg a továbbhaladó fény polarizációját, amely a fáziskülönbség értékétől függően maradhat lineáris, de kialakulhat elliptikus vagy cirkuláris polarizáció is.

Ha a kettőstörő lemezen áthaladó két komponens közötti fáziskülönbség π, vagy annak páratlan számú többszöröse, akkor a lemezből kilépve a két komponens ellentétes fázisban találkozik, amire úgy is tekinthetünk, mintha valamelyik összetevő (mondjuk $E_\perp$) előjelet váltana. Ennek feltétele:

$$(1) \qquad |n_1 d - n_2 d| = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad \text{ebből} \qquad d = \left(k + \tfrac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{|n_1 - n_2|},$$

ahol k egész szám. Az eredő polarizáció ilyenkor lineáris marad, a fény amplitúdójának nagysága nem változik, de a polarizáció síkja elfordul.

Ha a lemez $\boldsymbol{e}$ orientációs iránya 45°-os szöget zár be mindkét polárszűrő polarizációs irányával, akkor a lemezen áthaladó fény polarizációs síkja (a *2. ábrán* látható módon) éppen 90°-kal fordul el. Így a harmadik polárszűrő már nem tudja megváltoztatni a fény amplitúdóját. Az (1) összefüggéssel megadott vastagságú lemez és $\varphi = \pm 45°$-os orientáció esetén tehát a beeső (megfelelően polarizált) fény intenzitásának 100%-a átjuthat a rendszeren.

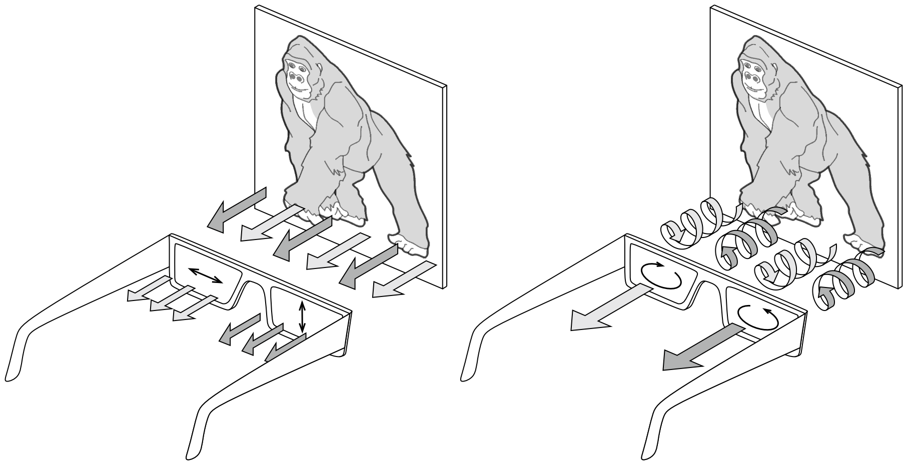
Megjegyzések. 1. Ha a rendszerre beeső fény polarizálatlan (vagyis két, egymásra merőlegesen polarizált fényhullám időben gyorsan, de egyenletesen változó keveréke), akkor már az első polárszűrő felére csökkenti a fény erősségét, akárhogy is forgatjuk azt. Az *a*) esetben ekkor az átjutó fény intenzitása a beeső intenzitásnak legfeljebb 1/8 része, a *b*) esetben pedig a fele.

2. Optikai kísérletekben a lineárisan polarizált fény polarizációs síkjának elforgatására gyakran használják az (1) képletnek megfelelő vastagságú kettőstörő lemezt, amelyet (a két, egymásra merőleges polarizációjú komponens optikai útkülönbsége miatt) kettőstörő $\lambda/2$-es lemeznek neveznek. Létezik kettőstörő $\lambda/4$-es és $\frac{3}{4}\lambda$-ás lemez is, ezekkel lineárisan polarizált fényt lehet cirkulárisan polarizálttá (és vissza-)alakítani (lásd a *következő feladatot*).

M. 17. A 3D-s mozifilmek úgy készülnek, hogy a forgatás során minden egyes jelenetet két, kicsit eltérő nézőpontú kamerával vesznek fel. A mozifilm vetítése során a kamerák által rögzített felvételeket két külön projektorral vetítik a vászonra: az egyik vetített kép a bal szemnek, míg a másik a jobb szemnek szól. Ahhoz, hogy a jobb és bal szemünkbe csak a kívánt képről kiinduló fénysugarak jussanak el, a fény polarizációjának jelenségét használják.

A régebbi típusú 3D-s mozikban a két vetítőgép lencséje után egy-egy (egymásra merőleges orientációjú) polárszűrő van elhelyezve. A speciális, fémszemcsékkel (általában ezüstszemcsékkel) bevont vászonról a nézőközönség felé visszaszóródó fény megőrzi polarizációjának síkját. A nézők által hordott szemüvegkeretben szintén két, egymásra merőleges állású polárszűrő található, melyek orientációja összhangban van a vetített képek polarizációs irányával. A polárszűrők az orientációjukkal párhuzamos polarizáltságú fényt átengedik, az erre merőlegesen polarizált fényt viszont nem: így érik el, hogy a jobb és a bal szem csak a kívánt képet lássa (lásd az *1. ábra* bal felét).

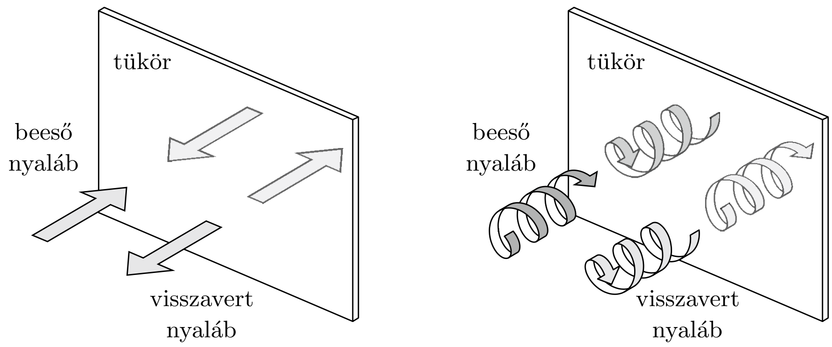
A lineárisan polarizált fény használatának hátránya, hogy a nézők fejének megdöntésekor a polárszűrőkön a nem kívánt fény egy része is áthalad, szellemkép keletkezik. Az újabb típusú 3D-s mozikban ezért cirkulárisan polarizált fényt használnak. Az egyik vetítőgép jobbra, a másik pedig balra cirkulárisan polarizált fényt vetít az ezüstös vászonra. A visszaszóródó fény nemkívánatos részének kiszűréséről a 3D-s szemüveg fóliái gondoskodnak (*1. ábra* jobb fele), melyek azonban – mint látni fogjuk – nem egyszerű polárszűrők, hiszen azok átengednék a cirkulárisan poláros fény egy részét.



1. ábra

Most már rátérhetünk Péter kísérleteinek elemzésére.

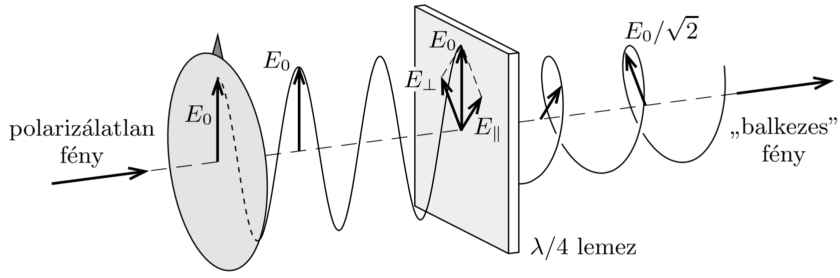
a) A nagytakarításkor talált, régi 3D-s szemüveg szemüveg biztosan lineáris polárszűrőket tartalmazott. Péter becsukott (mondjuk bal oldali) szeméről kiinduló, polarizálatlan fénysugarak a szemüveg bal oldali fóliáján áthaladva lineárisan polarizálttá válnak. A polarizáció iránya a tükörről való visszaverődés közben nem változik meg (lásd a *2. ábra* bal felét), így ezek a sugarak nem jutnak át (a bal oldali fóliához képest keresztezett állású) jobb oldali polárszűrőn: a becsukott szem nem látszik a tükörben, helyette Péter csak elsötétült „szemüveglencsét" lát. A nyitott (jobb oldali) szeméről kiinduló fénysugarak viszont a tükörről visszaverődve átjutnak a jobb oldali polárszűrőn, ezért láthatja Péter a nyitott szemét a tükörben.



2. ábra

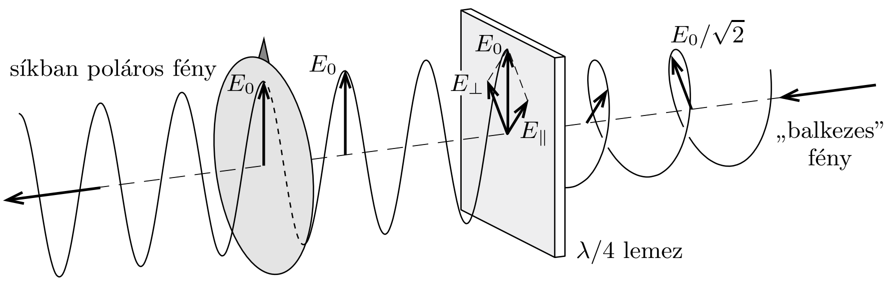
b) Az a tény, hogy az új 3D-s szemüveg éppen ellentétesen viselkedik, mint a régi, arra utal, hogy ebben az esetben a tükörről visszavert fénynek a haladási irányán kívül más tulajdonsága is megváltozik. Mivel a lineárisan poláros fény polarizációját a tükör nem változtathatja meg, ezért cirkulárisan poláros fénnyel van dolgunk.

Cirkulárisan poláros fényt egy polárszűrővel és egy hozzá képest 45°-os orientációjú, ún. $\lambda/4$-es lemezzel lehet létrehozni a *3. ábrán* látható módon. A $\lambda/4$-es lemez egy kettőstörő anyagból készült plánparalel lemez, amelynek törésmutatója az orientációs irányával párhuzamos polarizációjú fényre nézve más, mint az arra merőleges polarizációjú fény esetében (lásd az *előző feladat* megoldását). Emiatt a kétféle polarizációjú komponens között optikai útkülönbség lép fel, amely a $\lambda/4$-es lemez esetén éppen a hullámhossz negyede.



3. ábra

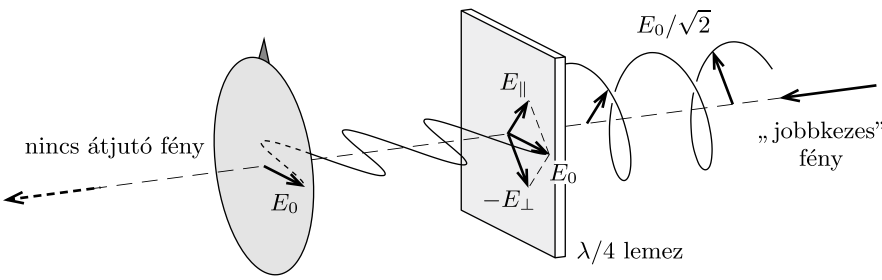
A beérkező, polarizálatlan fény a (mondjuk függőleges állású) polárszűrőn áthaladva lineárisan polarizálttá válik. A $\lambda/4$-es lemezen áthaladva a lemez orientációjával párhuzamos $E_\parallel$ és az arra merőleges $E_\perp$ térerősségkomponensek között $\pi/2$ fáziskülönbég lép fel, így cirkulárisan poláros fény alakul ki. Attól függően, hogy a kétféle polarizációjú komponens közül melyik halad gyorsabban a kettőstörő lemezben, a kialakuló cirkuláris polarizáció lehet „jobbkezes" vagy „balkezes". A 3. ábrán látható esetben a $\lambda/4$-es lemezünk olyan, hogy „balkezes" fény keletkezik. Ha „jobbkezes" fényt szeretnénk ugyanebből az anyagból készült kettőstörő lemezzel előállítani, akkor ahhoz más vastagságú, ún. $\frac{3}{4}\lambda$-ás lemezre van szükség (amelynél a két térerősségkomponens közötti fáziskülönbség $3\pi/4$).



4. ábra

Péter új 3D-s szemüvegében olyan fóliák vannak, amelyek kiszűrik a jobbra, illetve balra cirkulárisan poláros fényt. Ezek a cirkuláris „analizátorok” a 3. ábrán látható elrendezéshez nagyon hasonlóan működnek, de a cirkulárisan poláros fény előbb a kettőstörő lemezen, utána pedig a polárszűrőn halad át. Ha a 3. ábrán is szereplő kettőstörő $\lambda/4$-es lemezre „balkezes” fény esik (amelyben $E_\parallel$ és $E_\perp$ között $-\pi/2$ fáziskülönbség van), akkor a 3. ábrán látható folyamat fordítottja megy végbe, és a lemezben bekövetkező $+\pi/2$ fázistolás hatására függőleges irányú lineáris polarizációjú fény keletkezik (*4. ábra*). Ezt a fényt a függőleges irányú polárszűrő átengedi.

Ha viszont a $\lambda/4$-es lemezhez érkező fény „jobbkezes” (azaz $E_\parallel$ és $E_\perp$ közötti fáziskülönbség $+\pi/2$), akkor a kettőstörő lemezben bekövetkező $+\pi/2$ fázistolás hatására végül vízszintes irányú lineárisan polarizált fény jön létre, amelyet a polárszűrő nem enged át (*5. ábra*). Az ilyen felépítésű „szemüveglencse” tehát a „balkezes” fényt átengedi, de a „jobbkezest” nem. Ha a $\lambda/4$-es lemezt $\frac{3}{4}\lambda$-ás lemezre cseréljük, akkor a „lencse” fordítva működik: a „jobbkezes” fényt engedi át, a „balkezest” viszont nem. Ezen az elven működik tehát a cirkulárisan polarizált fényt használó 3D-s mozi (1. ábra jobb fele).



5. ábra

Most már megmagyarázhatjuk Péter második kísérletét. A becsukott (mondjuk bal) szemről kiinduló fénysugarak a bal oldali „szemüveglencsén” áthaladva (mondjuk balra) cirkulárisan polarizálttá válnak (hiszen előbb a polárszűrőn, utána pedig a kettőstörő lemezen haladnak át). A „balkezes” fény viszont a tükörről „jobbkezesként” verődik vissza (hasonlóan ahhoz, ahogy a balkezes kesztyű tükörképe is jobbkezes kesztyű, lásd a 2. ábra jobb felét), ezért a szemüveg jobb oldali fóliáján akadály nélkül át tud jutni. Péter ezért láthatja becsukott szemét a tükörben. Ezzel ellentétben a (jobb oldali) nyitott szemét nem láthatja, hiszen a jobb oldali szemről kiinduló fény a szemüveg fóliáján áthaladva „jobbkezessé” válik, ami a tükörről „balkezes” fényként visszaverődve nem juthat át a szemüveg jobb oldali fóliáján.

Megjegyzések. 1. A kettőstörő $\lambda/4$-es lemez működési elvéből következik, hogy csak bizonyos hullámhosszú (adott színű), lineárisan polarizált fényt képes cirkulárisan polarizálttá (és viszont) változtatni. Vékony bevonatok alkalmazásával azonban elérhető, hogy a látható fény hullámhossztartományának jelentős részében is „viszonylag jól” működjön a kettőstörő lemez.

2. Egyes 3D-s mozik és otthoni televíziók esetén nem polárszűrős szemüveggel, hanem aktív (elektronikával vezérelt) folyadékkristályos lencsékkel felszerelt szemüveggel oldják meg a két szembe jutó képek szeparálását. A 3D-s TV-k képernyőjén 100-200 Hz frekvenciával, felváltva villannak fel a két szemnek szánt képkockák. A szemüvegeket rádióhullámok, infravörös jelek vagy vezeték segítségével lehet szinkronizálni a TV felvillanásaival. Ennek eredményeképp a folyadékkristályos (LCD) „szemüveglencsék" a rájuk kapcsolt feszültség hatására (mindig a megfelelő pillanatban) felváltva sötétülnek el vagy világosodnak ki, így nyújtva otthoni háromdimenziós filmélményt.