Zárthelyi feladatsor

A feladatok megoldásához tollon kívül más segédeszköz nem használható.

A megírásra 90 perc áll rendelkezésre.

1. feladat Egy bizonyos helikopter akkor tud egy helyben lebegni, ha motorja P mechanikai teljesítményt ad le. Egy másik helikopter ennek pontosan felére kicsinyített mása (minden lineáris mérete feleakkora, átlag sűrűsége pedig változatlan). Mekkora P' mechanikai teljesítmény szükséges ahhoz, hogy ez a helikopter lebegni tudjon? Dr. Ali Tudde Mynek elárulta nekünk, hogy a helikopter motorjának teljesítményét pontosan ki tudja számolni a helikopter L hosszából, a g nehézségi gyorsulásból, valamint a levegő és a helikopter sűrűségéből.

Segítség: Középiskolából remélhetőleg még mindenkinek rémlik, hogy a teljesítményt J/s egységekben mérik.

2. feladat Egy autó v állandó nagyságú sebességgel elhajt egy nyugalomban lévő rendőrautó előtt. A rendőrök azonnal üldözni kezdik a gyorshajtót. A rendőrautó sebessége az idő gyökével arányosan növekszik, $v(t) = \kappa\sqrt{t}$. Mikor és hol éri utol a rendőrautó az egyenletes sebességgel haladó gyorshajtót? Mikor lesz a legnagyobb a távolság a rendőrautó és a gyorshajtó között, milyen messze lesznek ilyenkor egymástól?

Segítség: Integrálás nélkül is könnyen rájöhetünk, mely függvény deriváltja a $v(t)$ függvény!

3. feladat Egy toronyból v_0 kezdősebességgel elhajítunk egy követ úgy, hogy a kezdeti sebessége α szöget zár be a vízszintessel. Az eldobástól számítva mennyi idő után következik be, hogy a kő sebességvektora és az eldobási ponttól a kőhöz mutató helyvektor egymásra merőleges? Milyen feltételt kell kielégítenie α-nak, hogy a leírt jelenség bekövetkezhessen?

Segítség: Nem szeretjük, ha a másodfokú egyenlet diszkriminánsára negatív értéket kapunk.

4. feladat Egy csiga egy R sugarú körpályán mozog, úgy hogy a kör középpontjától a csigához húzott egyenes x tengellyel bezárt szöge $\phi(t)$ alakban változik. Mutasd meg, hogy a sebesség és gyorsulás vektor által bezárt α szög koszinuszának időfüggése az alábbiak szerint számolható ki:

$$\cos\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\dot{\phi}(t)^4}{\ddot{\phi}(t)^2}}}! \qquad (1)$$

Segítség: Ne felejtsük el deriválni a belső függvényt, például $\frac{d}{dt}\sin\phi(t) = \dot{\phi}(t)\cos\phi(t)$!